MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

C. V.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

ÍRTÁK:
DR. MEDGYESSY PÁL
ÉS
DR. TAKÁCS LAJOS

Harmadik kiadás

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1973

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS,
DR. MATH. SC.

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR,
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK
DOKTORA

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS,
KANDIDÁTUS

★

SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1973

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI:

A.

A. I. Középiskolai matematika (Ötödik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Harmadik kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Harmadik kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Negyedik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Negyedik kiadás)
A. V.** Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Negyedik kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Negyedik kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Negyedik kiadás)
A. X. A logarléc (Hatodik kiadás)

B.

B. I-II-III. Vektoranalízis. (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők) (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Negyedik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok (Harmadik kiadás)
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek. (Első rész) (Ötödik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész) (Harmadik kiadás)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás (Harmadik kiadás)
C. III. Integrálegyenletek (Harmadik kiadás)
C. IV. Mátrixszámítás (Negyedik kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Harmadik kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

C. V.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

ÍRTÁK:

DR. MEDGYESSY PÁL

A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA,
AZ MTA MATEMATIKAI KUTATÓINTÉZETÉNEK FŐMUNKATÁRSA

ÉS

DR. TAKÁCS LAJOS

A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORA,
A CLEVELANDI EGYETEM TANÁRA

Harmadik kiadás

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
K 045 603

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTÉK:

DR. PRÉKOPA ANDRÁS
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA, EGYETEMI DOCENS

DR. ARATÓ MÁTYÁS
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA, TUDOMÁNYOS KUTATÓ

© *Dr. Medgyessy Pál, Dr. Takács Lajos, 1957*

Kiadását
a művelődésügyi miniszter
rendelte el

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott, műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

*Munkánk A. és B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetében nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matemaikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

* E sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

Az *A. rész füzeteiben*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B. és C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatáraink legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt*, megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak*, különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek*, amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen, az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplináját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és emiatt mind inkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. IV., B. I-II-III., B. VII.

Az utóbbi második kiadások egy éven belüli elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével, a héjelmélet modern, tenzorszámítási tárgyalásmódjával kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítés helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumokon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi, nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni, és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének korszerűsítésének nagy munkáját, továbbra is kérve ehhez a Minisztérium, a Kiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk áldozatkész, buzdító támogatását.

Budapest, 1964. július 15.

A SZERKESZTŐ

A) ÁLTALÁNOS RÉSZ

Írta: MEDGYESSY PÁL

ELŐSZÓ E RÉSZHEZ

A hazai valószínűségszámítási irodalom viszonylag elég gazdag, s ezért olvasónk jogos gyanakvással kérdezheti, miért volt szükség erre a könyvre. Legjobban így tudom megindokolni: A meglevő munkák javarészt elsősorban a matematikusnak szólnak; a többiben pedig a problémák matematikai oldala kellő tárgyalására általában nincs lehetőség. A valószínűségszámítás jelentősége számos tudományterület számára egyre nagyobb; épp ezért az említett helyzet ismeretében olyan könyvet akartunk írni, amely azoknak a kutatóknak a számára, akiket a téma tisztán matematikai oldala csak kevéssé érdekel, *összefoglalja a valószínűségszámítás bizonyos fejezeteiből mindazt, ami az alkalmazások szempontjából fontos, majd ezek felhasználását a legkülönbözőbb tudományok területéről vett példákkal illusztrálja* — mindezt lehetőleg röviden és tömören. Ilyen munka nemcsak hazai viszonylatban hiányzik; az általunk ismert külföldi munkák közt sincs olyan, amely az előbb vázolt sokoldalú célkitűzést akarná megvalósítani a gyakorlati jelleg szigorú megőrzése mellett.

Már itt megmondjuk, hogy a terjedelem kötöttsége folytán nem tárgyalhattuk a valószínűségszámítás összes fejezeteit ; mindenre kitérni — a jelen terjedelem mellett — csakis könyvünk minőségének lerontása mellett lehetett volna; így aztán elhatároztuk, hogy a matematikai statisztikát kihagyjuk; azért választottuk e fejezetet, mert vele valószínűleg külön kötet is foglalkozhat majd e sorozatban.

Célkitűzésünk után érthetőleg sok nehézséggel járt munkánk: könyvünk már csak újszerűsége miatt sem sikerülhetett kifogástalanul. Nem tagadom, hogy előttem követendő példaként PÓLYA GYÖRGY és SZEGŐ GÁBOR híres könyve lebegett; ennek a valószínűségszámítás alkalmazásainak területére szóló analogonját szerettem volna megvalósítva látni ezzel a munkával. Biztos, hogy ez csak kismértékben sikerült, de első kísérletnek talán mégsem rossz.

Magától értetődik, hogy könyvünk nem lehetett máshonnan kiollózott részletek összetákolása. Ezt az elvet annyira következetesen igyekeztünk megvalósítani, hogy számos, valószínűségszámítási könyvekben rendszeresen szereplő részletkérdést, amely tulajdonképp az analízis egyes területeiről való, nem boncolgattunk, hanem csak a végeredményeket, képleteket használtuk fel. Jobbnak látjuk, ha egy könyv másokra támaszkodik, mintha mindent le akar tárgyalni. *Ilyenformán könyvünk nem kezdő matematikusnak való,* és feltételezi az analízis elemeinek ismeretét. Az utóbbiak forrását illetőleg: hazai irodalmunk elég gazdag ahhoz, hogy kiki maga is megtalálja őket, miután egy ideig már foglalkozott matematikával. Ha nem így jártunk volna el, a valószínűségszámítás problémái nem domborodhatnának ki, mert a segédeszközök elnyomnák őket. Megjegyezzük, hogy azért józan mérséklettel éltünk az előismeretek megkövetelését illetőleg, és erősen modern, speciálistát kívánó segédeszközökre nem támaszkodtunk.

A könyv két részre tagolható: Az egyik a szerintünk célunk szempontjából fontosnak tartott valószínűségszámítási ismeretek összefoglalása fejezetekre bontva, a másik: az egyes fejezetekhez kapcsolódó példák és feladatok, amelyeket talán legjobb lett volna egy tömegben közölni, hiszen sokat nehéz volt ide vagy oda sorolni; erről csak az áttekinthetőség kedvéért tettünk le. A valóságban legtöbbször úgyis majdnem minden fejezetre szükség lesz egy feladat megoldásakor.

Ez a könyv nem egy szerző műve. Az összeállításában megmutatkozó specializálódás könyvíráskor előny is, hátrány is; a mi esetünkben előnyeit reméltük. Bár a társszerzők belekapcsolódtak egymás munkájába, és ismerték is egymás munkáját, jobbnak láttuk — bírálóink szempontjából is — pontosan megjelölni, ki mit írt. Ennek értelmében történt

a könyv részekre tagolása is; a részletezés a tartalomjegyzékből, megokolása pedig ez előszóból látható.

A következőkben kimondottan az általam írt résszel kapcsolatos megjegyzéseimet szeretném megtenni.

Az összefoglaló (repetitórium) rész fejezetei felosztásában és megírásában standard munkára akartam támaszkodni; e célra RÉNYI ALFRÉD akadémikus tankönyvét választottam; itt semmi értelme sem lett volna önállóságra törekedni. Az az olvasó, aki részletek iránt érdeklődik, támaszkodjék erre a mindenütt elismerő kritikát aratott könyvre.

Az általam írt részbe a valószínűségszámítás bármely területén állandóan használt ismeretanyagot vettem fel. A BOOLE-algebrát csak a legszükségesebb mértékben érintem, a benne elvégezhető műveletek szemléletes ábrázolását — mivel jogosultsága bizonyítását fel nem vethettem, és egyébként is alá akartam húzni az axiomatikus gondolkodásmód fontosságát — teljesen mellőztem. Nem hiszem, hogy ez nehézséget okozna. Egyes példákban — az előadás élénkítésének kedvéért — úgyis szóba mondtam el, hogyan áll elő a vizsgálandó esemény, míg másutt teljesen BOOLE-algebrai formalizmust használtam. A valószínűség bevezetésénél igyekeztem megtartani az axiomatikus utat, a könyv jellegére és terjedelmére való tekintettel azonban eleve nem indulhattam ki a KOLMOGOROV-féle axiómákból. Ezt a tárgyalásmódot persze a valószínűségi változó és az eloszlásfüggvény bevezetésénél is meg kellett tartanom. Tárgyalásmódom megfelelő volta vitatható; az adott helyzetben azonban nem láttam más megoldást. A mondott megalapozásból következett, hogy a STIELTJES-integrálon felül más integrál használatára nem volt szükség; ezt azonban az a felfogás is támogatta, hogy lehetőleg az eloszlásfüggvényre támaszkodva történjenek a vizsgálódások. Megszokottsága, technikai előnyei miatt természetesen sokhelyütt áttértem RIEMANN-integrálokra, amennyiben persze ez eleve lehetséges volt. Egyes részletek — természetesen — csak azért szerepelnek, mert a könyv többi részeiben már szükség van rájuk. Az elnevezéseket olykor egységesíteni volt tanácsos; ez itt-ott némi eltérésre vezetett más könyvekhez viszonyítva. Illusztrációt csak a legfontosabb esetekben közöltem; nem közöltem máshonnan jól ismert vagy könnyen elképzelhető függvények stb. grafikonjait. Történeti megjegyzéseimet hely hiján túlnyomórészt a személyek adatainak közlésére korlátoztam.

A feladatokat az egyes fejezetek anyagához igyekeztem szabni. A gyakorlati jelleg kedvéért csak olyan feladatokat vettem fel (a legkülönbözőbb szakmunkákból), amelyek ténylegesen valamilyen tudomány területéről származnak. Ez fáradságos munkával járt; egyébként ezért maradtak ki sablonos kocka, kártya stb. példák. A feladatok ilyen megválogatása persze azzal a veszéllyel jár, hogy a szerző — nem lévén annyi területen szakember — vázlatosan vázolja fel a feladat szakmai hátterét. Ilyen hibák bizonnyal itt is vannak; mégis remélem, hogy az itt érintett területek szakemberei örömmel látják majd a valószínűségszámítás alkalmazási lehetőségeit egyéni munkaterületükön, míg a többieket talán a témák sokfélesége, tarkasága köti majd le. Persze, nem részletezhettem túlságosan a speciális (fizikai stb.) hátteret sem; nem írhattam egyúttal tankönyvet is arról a hozzá nem értő számára (bár igyekeztem nem szakemberrel is megértetni a hátteret). A feladatgyűjtésben jelentősen felhasználtam a külföldi valószínűségszámítási irodalmat; ha nem matematikai jellegű pontatlanságok vannak, azok náluk is jórészt megvannak. Egyes sokszor felbukkanó problémaköröket (rádioaktivitás, kinétikus gázelmélet) a valószínűségszámítás szempontjából egységesen igyekeztem tárgyalni. Kétségtelen, hogy erre fizikusmúltam is ösztönzött. A feladatoknál kiindulásnak minden esetben a valószínűségszámítás egyes fejezeteit tekintettem; ekörül csoportosítottam a feladatokat — s nem megfordítva. A gyakorlattal való kapcsolat folytán érthető, hogy a legtöbb feladat a várható érték és szórásnégyzet tárgyalásánál található.

Tervszerűen küzdöttem az ellen az elterjedt beállítottság ellen, hogy „nem matematikusnak így is jó". Ameilett, hogy sokféle szakember számára rámutattam: itt és itt tulajdonképp valószínűségszámítással állunk szemben, illetve erre lesz szükség, arra is rá akartam mutatni, hogyan is kezeljük hát valószínűségszámítási alapossággal a kérdést (s nem úgy, mint egyes szakkönyvek). Persze, egyes feladatoknál tettem elhanyagolásokat, ha az könnyebbséget jelentett és a probléma is megengedte; erre azonban mindig rámutattam. A feladatok általában nem rövidek; ezt a precizitás is maga után vonja, és amúgy sem könnyű rövid, de tényleg gyakorlati példákat találni. Egyes feladatok anyagát többfelé is osztottam. A megoldásokban igyekeztem mellőzni olyan részleteket, amelyeket az olvasó maga is gépiesen kiszámolhat. Sokszor egy-egy gondolatmenet értelemszerűen másutt is felhasználható volt.

Mivel PÓLYA és SZEGŐ könyvének szellemében íródtak a feladatok, mindnek közöltem a megoldását is. Ezekkel magukkal is tanítani, újabb összefüggésekre rámutatni, „fogásokat közölni" volt szándékom; épp ezért helyenként — első olvasásra — szokatlanul részletesnek látszanak. Fontos gondolatokat azonban csak így lehet igazán megértetni, elsajátíttatni. A megoldások jellegzetessége még, hogy olykor az olvasóra hagyja a valószínűségszámításban gyakran szükséges kézenfekvő vagy alkalmas feltevések megtételét; ez azonban általános munkamódszer, amit meg kell szoknunk (el nem feledkezve arról, hogy a kézenfekvő feltevéseket mindig ellenőrizni kell, ha eredményeinket alkalmazni akarjuk). Nem mindig a kitaposott út a legrövidebb; épp ezért sokszor szerepeltettem termékeny heurisztikus meggondolásokat is. Didaktikai szempontból fontos problémákat különböző módszerekkel is letárgyaltam. Nyugodtan közöltem egészen modern és saját eredményeket is, ha fontosnak láttam; mellőztem ellenben a tisztán rutinfeladatokat (pl. a geometriai valószínűségeknél), amelyekben a tulajdonképpeni valószínűségszámítási mag kevés — nem is beszélve olyanokról, amelyek lényege valamilyen, az analízis körébe tartozó számolás (integrálok) vagy pláne gépies behelyettesítés egy képletbe, illetve numerikus számolás. Ilyeneket az olvasó maga is csinálhat (hiszen van bizonyos értékük), könyvünkben azonban fölöslegesek. Vannak feladatok, amelyek a repetitóriumrész anyagát hivatottak elmélyíteni, másoknak viszont az ad egyéni ízt, hogy úgy írtam meg őket, ahogy én „átéltem". A levezetések általában a megszokott utakat követik, de van néhány gyökeresen új is.

Mik az általam írott rész hibái? A szakszerűség kérdését már érintettem; idevágó hibák — egyetlen szerző esetében — elkerülhetetlenek. Egyesek kifogásolhatják a kiválogatás módját a valószínűségszámítás problémái közül. A legtöbb hiba abból eredhet, hogy ez, vagy az kimaradt a könyvből. Ennek az oka részben az, hogy a megengedett terjedelem nagyon kicsi a feldolgozandó óriási anyaghoz viszonyítva; ennek a következménye számos feladat kihagyása volt. A pesszimista olvasó mindjárt rábukkan, mi az a probléma, amit ő keresett ebben a részben, de nem talált meg; épp ezért néhány téma hiányát külön megemlítem. Aránylag kevés a modern magfizika: a problémák részben nem ide tartoznak, részben túl hosszú tárgyalást kívántak volna. A statisztikus mechanikától — hely híján — csak a kinétikus gázelmélet pár kérdésével foglalkozhattam. Mérési eredmények feldolgozása, hibaszámítás, kiegyenlítő számítások — napjainkban már mind a matematikai statisztika speciális fejezetébe tartoznak, s ezért alig írtam róluk. Tárgykörömön kívül esik az információelmélet is; nem érintettem. Mivel — mint mondottam — a valószínűségszámítási problémák köré építettem a feladatokat és nem megfordítva, számos témát — bár szívesen írtam volna róluk — logikusan a könyv többi részei tárgyalásának kellett átengednem. Mindazonáltal azt hiszem, hogy azt, ami ebbe az első, általános részbe a nemzetközi irodalom szerint beletartozik, le is tárgyaltam. Hogy sok minden mégis kimaradt, azért sokban a terjedelem korlátozása a felelős. — Természetesen mondanom sem kell, hogy bármilyen megjegyzést, kritikát mindig hálásan veszek.

Pár „használati utasítást" szeretnék még adni. Kezdő a szöveget általában elejétől kezdve olvassa; aki már ismeri a tárgykört, bárhol kiválaszthat neki szükséges feladatot (gondolok itt elsősorban gyakorlatvezetőkre). A szövegben számos rövidítés található; ezeket összegyűjtve is közlöm. Aránylag sok táblázatot adtam (bár nem sokat használom őket), ez főleg a formulákat egyszerűen csak alkalmazni kívánók kényelmét szolgálja. Egyesek csak a számítások kényelmesebbé tételét szolgálják; ezeket a legvégére hagytam. A táblázatok kiegészítésére szolgálnak a repetitóriumrészben bőven közölt közelítő és becslési formulák, amelyek akkor is segítséget nyújtanak, amidőn a táblázat már használhatatlan. A numerikus számításokhoz szükséges logaritmustáblázattal az olvasó nyilván rendelkezik. — Utalásokkal gyéren éltem. Szóban forgó táblázatot pl. maga az olvasó is kikereshet, mint ahogy én is tettem a feladatok kidolgozása közben; korábbi tételekre tb. csak a lelőhely hozzávetőleges megjelölésével utaltam, korábbi feladatok eredményeit igen sokszor (külön hivatkozás nélkül) felhasználtam. További tájékozódást az irodalomjegyzék van hivatva elősegíteni. — Hogy az olvasó ceruzával a kezében, számolva és rajzolgatva kövesse a szöveget, felesleges hangsúlyozni.

Végül meg kell mondanom, hogy sokaknak tartozom köszönettel azért, hogy munkámban támogattak; elsősorban RÉNYI ALFRÉD akadémikusnak, hiszen a repetitóriumrészben az ő egyetemi előadásaira támaszkodhattam. Szerzőtársam, valamint lektoraim is számos tanáccsal, ötlettel segítettek. Itt mondok köszönetet intézetünkből mindazoknak, akik a kézirat technikai előkészítésében közreműködtek, valamint az Egyetemi Nyomda gondos munkát végző dolgozóinak.

Budapest, 1956. szeptember 30.

MEDGYESSY PÁL
A MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE

AZ A) RÉSZBEN SZEREPLŐ RÖVIDÍTÉSEK EGYES JELÖLÉSEK

$A : (\ldots)$	A az az esemény, amelyet a zárójelek közt leírtunk
vsz.	valószínűség(i)
$P(\ldots)$	a zárójelek közt leírt esemény valószínűsége
vsz. v.	valószínűségi változó
e.f.	eloszlásfüggvény
vsz.e.	valószínűség-eloszlás
e.	eloszlás
s.f.	sűrűségfüggvény
v.é.	várható érték
$M(\xi)$	a ξ valószínűségi változó várható értéke
sz.n.	szórásnégyzet
$D^2(\xi)$	a ξ valószínűségi változó szórásnégyzete
sz.	szórás
$D(\xi)$	a ξ valószínűségi változó szórása
k.e.	korrelációs együttható
$R(\xi, \eta)$	a ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatója
k.f.	karakterisztikus függvény
g.f.	generátorfüggvény

* * *

$[x]$	x egész része; az a legnagyobb egész szám, amely $\leqq x$
$\max(a, b, \ldots)$	az $a, b, \ldots$ számok közül a legnagyobb
$\min(a, b, \ldots)$	az $a, b, \ldots$ számok közül a legkisebb
$O[f(x)]$ (ha $x \to a$)	„nagy ordo $f(x)$": $f(x)$ olyan függvénye, amelyre $\lvert O[f(x)]\rvert / f(x) < K$ (konst), amidőn $x \to a$. Hasonlóan értelmezzük $O[f(xy, y, \ldots)]$ (ha $x \to a$, $y \to b, \ldots$)-t.
$o[f(x)]$ (ha $x \to a$)	„kis ordo $f(x)$": $f(x)$ olyan függvénye, amelyre $o[f(x)]/f(x) \to 0$, amidőn $x \to a$. Hasonlóan értelmezzük $o[f(x, y, \ldots)]$ (ha $x \to a$, $y \to b, \ldots$)-t.
$f(x) \sim g(x)$ (ha $x \to a$)	„$f(x)$ aszimptotikusan egyenlő $g(x)$-szel": $f(x)/g(x) \to 1$, amidőn $x \to a$
	Ha $\{a_n\}$ $(a_n < 0)$ egy számsorozat:
$O(a_n)$	„nagy ordo a_n": olyan számsorozat, amelyre $\lvert O(a_n)\rvert / a_n < K$ (konst), ha $n \to \infty$, vagy ha $n \to 0$
$o(a_n)$	„kis ordo a_n": olyan számsorozat, amelyre $o(a_n)/a_n \to 0$, ha $n \to \infty$, vagy ha $n \to 0$
	Ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ két számsorozat:
$a_n \sim b_n$	„a_n aszimptotikusan egyenlő b_n-nel": $a_n/b_n \to 1$, ha $n \to \infty$
$\approx$	közelítőleg egyenlő
$f^{-1}(x)$	az $f(x)$ függvény inverz függvénye
$F * G$	az F és G függvények konvolúciója
log	természetes logaritmus
$x \in H$, $x \notin H$	x beletartozik H-ba, x eleme H-nak — és ennek ellentéte.

Ahol mást nem mondunk, $i = \sqrt{-1}$.

Ha egy függvény értelmezési tartományát nem említjük meg külön, az azt jelenti, hogy az értelmezési tartomány $(-\infty, \infty)$

1. §. A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS TÁRGYA ESEMÉNYEK, ESEMÉNYALGEBRA

a) **A valószínűségszámítás tárgya**

A világ jelenségeinek egy része a következő szkémába foglalható: Fennáll körülmények, feltételek bizonyos $\mathcal{K}$ összessége (= „kísérlet"), és ennek okozataként bekövetkezik az $A, B, C, \ldots$ események közül* az egyik — *jelen* ismereteink segítségével azonban nem tudjuk előre meghatározni, melyik —, ahogy mondani szoktuk, *a véletlentől függ*, hogy pl. A következzék be (és nem $B, C, \ldots$). Az ilyen ún. *sztohasztikus* szkéma fennállása esetén A-t **véletlen eseménynek** nevezzük. (Nyilván $B, C, \ldots$ is véletlen esemény.) Ezek ellentéte az ún. szükségszerű esemény; azt mondjuk, hogy ez ún. kauzális (okozati) szkémába tartozik.

Ha $\mathcal{K}$ következményeivel együtt a világban (elvileg) tetszőleges sokszor fellelhető vagy megvalósítható, az említett véletlen eseményeket **megismétlődő véletlen eseményeknek** nevezzük.

A valószínűségszámítás megismétlődő véletlen események bizonyos összességeinek vizsgálatával foglalkozik, azokra matematikai elméletet ad meg.

Példa: Legyen $\mathcal{K}$ a következő: Egy (vákuumban levő) dróton gyenge áramot bocsátunk keresztül; ennek hatására elektronok lépnek ki (ezeket alkalmas berendezéssel regisztráljuk). Kössük ki, hogy az A esemény legyen a következő: az észlelés kezdetétől számított 0,05 sec-on belül regisztrál legalább egy elektront a berendezés; a B esemény pedig legyen ennek az ellenkezője. A vagy B véletlen esemény, mert az elektronok kilépésének időpontjait jelen ismereteink segítségével nem tudjuk megadni. Minthogy a kísérlet elvileg (akár egyszerre is) akárhányszor elvégezhető, A-t vagy B-t egyszersmind megismétlődő véletlen eseménynek is nevezhetjük. Később látni fogjuk, hogyan jellemezhetjük a valószínűségszámítás eszközeivel az elektronok kilépését. *Megállapításainknak azonban nem egyetlen említett (kísérleti) eredményre, hanem (esetleg ugyanazon berendezéssel megismételt) kísérleti eredmények (= véletlen események)* **bizonyos összességére** *lesz csak gyakorlati értelme.* Ezért szerepelnek a definícióban véletlen események bizonyos összességei.

Egyszer bekövetkező véletlen eseményeket nem is tudunk vizsgálni (a vizsgálat feltétele itt az ismétlődés), s ezért nem is foglalkozunk velük.

Példánkban bizonyos határok közt mi adtuk meg, mi legyen az A (stb.) esemény. Lehet, hogy másképp választva A-t, az nem lenne véletlen esemény (és így nem sztohasztikus, hanem kauzális szkémát kapnánk). Ha pl. A-nak azt az eseményt vennénk, hogy az elektronokat kibocsátó drót felmelegszik, a szkéma már kauzális lenne, hiszen fizikai törvény az áram hőhatása, s így A biztosan bekövetkezik. Épp ezért minden problémánál nagyon pontosan meg kell határozni $\mathcal{K}$-t, és az $A, B, C, \ldots$ eseményeket.

* Végtelen sok $A, B, C, \ldots$ eseményről is lehet szó. Az események jelleget a megfigyelő is kikötheti.

Kauzális szkémára legjobb példákat a klasszikus természeti törvények körében találhatunk. Hogy némi hasonlóság legyen az előző példával, tekintsük a következő kísérletet: Légüres térben 0 időpontban 1 cm magasban elengedünk egy golyót; az leesik ($\mathfrak{K}$). Legyen A: A golyó 0,05 sec-on belül földet ér. A szabadesés törvényei (nehézségi gyorsulás stb.) ismeretében mondhatjuk, hogy A biztosan, szükségszerűen bekövetkezik. A szkéma kauzális.

Természetes, hogy ismereteink haladásával egyes, ma még véletlennek minősített eseményeket egykor szükségszerűeknek fogunk osztályozni, miután lefolyásukat időközben már minden oldalról felderítettük (pl. a meteorológiai jelenségek).

Később látni fogjuk, hogy nemcsak szükségszerű, hanem véletlen események vizsgált összességét is áthidalják bizonyos törvényszerűségek, a valószínűségi törvények, amelyek sokszor kapcsolatba hozhatók a klasszikus természettörvényekkel.

b) **Események algebrája**

Minthogy véletlen eseményekkel fogunk foglalkozni, hasznosnak bizonyul meghatározott jelölésmódot bevezetni az eseményekre.* Ez nemcsak az írásmódot rövidíti meg, hanem további következtetéseket is megenged.

Tetszőleges események jelölésére vezessük be az A, B, C, ... nagybetűket. Egy esemény sokszor más eseményekből van valamiképpen felépítve, vagy egyéb kapcsolatban áll velük. Ezekre a kapcsolatokra külön jelöléseket vezetünk be.

Felsoroljuk az A és B események különböző kapcsolatával létesíthető vagy velük másként kapcsolatba hozható eseményeket, és jelüket (ezeknek tetszőleges A, B, ... eseményekre mindig van értelme):

Kapcsolat, vele kifejezett esemény	Jele
A ellentéte	$\overline{A}$
A és B közül legalább az egyik (A vagy B)	$A+B$
A és B együtt	AB vagy $A \cdot B$ (néha A, B)

A „lehetetlen" eseményt O-val, a biztosat I-vel jelöljük, A és B azonosságát pedig $A = B$-vel. Nyilvánvaló, hogy $\overline{A}$ ugyanaz, mint A, és ha $A=B$, akkor $\overline{A}=\overline{B}$.

Azt, hogy pl. A **„az az esemény, hogy ..."** *a következőkben így jelöljük:* **A: az (esemény leírása).**

Ezek után mutassunk példát táblázatunkra. Legyen A: (Budapesten tegnap esett az eső), B: (Budapesten tegnap fújt a szél). Akkor $\overline{A}$: (Budapesten tegnap nem esett az eső), $\overline{B}$: (Budapesten tegnap nem fújt a szél), $A+B$: (Budapesten tegnap eső és szél közül legalább az egyik [= eső vagy szél] észlelhető volt), AB: (Budapesten tegnap eső is esett, a szél is fújt). (Ne felejsük el: $A+B$ *általában nem azt jelenti,* hogy az A, B események közül *csakis az egyik*! Erre még visszatérünk.)

Vegyük észre, hogy a fentiekkel az eseményekre „algebrai műveleteket" vezettünk be. (Bebizonyítható, hogy a táblázat kettőnél több, illetve megszámlálhatóan végtelen sok eseményre azonnal kiterjeszthető, hisz egy „művelet" eredménye szintén esemény, amelyet újabb betűvel jelölhetünk, s ezzel tovább „számolhatunk".) Algebrai analógiák nyomán azt mondjuk, hogy események valamilyen halmaza (pl.: egy kísérlet véges számú vagy végtelen sok eredménye), az $A, B, \ldots$ események **eseményalgebrát** képeznek, ha az események között már értelmeztük az „összeadás" és „szorzás" műve-

* Az „esemény" szót a következőkben mindig absztrakt értelemben használjuk.

letét, az „ellentett" képzését és az O és I kitüntetett (algebrai nyelven „zérus" és „egység") elemeket, ha ezen (esetleg megszámlálhatóan sok elemre is kiterjedő!) műveletek eredményei is a szóban forgó halmazba tartoznak, és $A, B, \ldots$-re a következő, nyilvánvaló „axiómák" állanak fenn:

I.

1. $A + A = A$
2. $A + B = B + A$
3. $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

II.

1. $AA = A$
2. $AB = BA$
3. $A(BC) = (AB)C = ABC$

III.

1. $\bar{A} + A = I$
2. $A + O = A$
3. $A + I = I$

IV.

1. $\bar{A}A = O$
2. $AO = O$
3. $AI = A$

V.

1. $A(B + C) = AB + AC$

Az I., II. és V. alatti axiómák nyilván akárhány eseményre is kiterjeszthetők. Azonnal látható, hogy *egy kísérlet eredményei eseményalgebrát alkotnak.*

Érdemes egybevetni az axiómáink által bevezetett műveleti szabályokat a valós számokra vonatkozó szabályokkal. Eltérnek: I.1., II.1., III.3.; III.1.-nek és IV.1.-nek nincs analogonja. Axiómáink segítségével bizonyos „eseményalgebrai kifejezéseket" átalakíthatunk vagy egyszerűsíthetünk. Kivonás és osztás nem szerepel.

Foglalkozzunk néhány gyakran előforduló speciális eseménykapcsolattal (egyazon eseményalgebrán belül); megjegyzendő, hogy tetszőleges eseményekhez mindig megszerkeszthető egy eseményalgebra, amelynek azok elemei, s így *a jövőben nem fogjuk mindig külön kiemelni az egy eseményalgebrába tartozást;* ezt már megszerkesztettnek tesszük fel (szöveges feladatoknál ajánlatos ezt esetről esetre megszerkeszteni).

Ha A és B **kizárják** egymást, nyilván $AB = O$.

Azt, hogy A **maga után vonja** B-t, így jelöljük: $A \subset B$. Példa: Ha A: (egy kockával 2-t dobok), B: (ugyanezen kockával párosat dobok), nyilván $A \subset B$. Világos, hogy bármely A és B-re $AB \subset A$, $AB \subset B$. Mindez eddigi jelöléseinkkel is kifejezhető, ti. $A \subset B$ azzal ekvivalens, hogy $A = AB$ vagy $B = A + B\bar{A}$.

A-t **összetett eseménynek** nevezzük, ha előállítható két, vele nem azonos esemény összegeként [vagyis, ha $A = B + C$ $(B, C \neq A)$].

Egy *nem összetett eseményt* (amely $\neq O$) **elemi eseménynek** hívunk.

Ha egy eseményalgebra egy kísérlet *összes* lehetséges A_i $i = 1, \ldots, m$) kimeneteleiből áll, $A_1 + \ldots + A_m \equiv \sum_{i=1}^{m} A_i = I$.

Ha egy eseményalgebra *egyes* A_i elemei (pl. egy kísérlet egyes eredményei) $(i = 1, \ldots, n)$ egymást kizárják, vagyis $A_iA_k = O$ $(i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, n)$ és $\sum_{i=1} A_i = I$, azt mondjuk, hogy az A_i-k **teljes eseményrendszert** alkotnak. (Ez $n = \infty$-re is kiterjeszthető!)

Bebizonyítható, hogy *egy véges (vagy végtelen) sok eseményből álló eseményalgebrában minden esemény felbontható elemi események összegére. A felbontás — a sorrendtől eltekintve — csakis egyféleképpen lehetséges. Ebből az is következik, hogy egy véges elemszámú eseményalgebra elemi eseményei teljes eseményrendszert alkotnak.*

Példa. Legyen A: (egy kockával párosat dobunk), A_i: (ugyanezzel i-t dobunk) $(i = 1, \ldots, 6)$. Ekkor $A_i A_k = O$ $(i, k = 1, \ldots, 6; i \neq k)$, ti. egyszerre csak egyetlen számot dobhatunk. Az A_i-k teljes eseményrendszert alkotnak. A összetett esemény $A = A_2 + A_4 + A_6$; A_i elemi esemény.

Igen fontos a következő: Ha $AB = O$, $A + B$: (A és B közül *csakis* az egyik).

c) **Boole-algebra** Fontos definíció a következő: **Tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ elemek** egy halmazát (absztrakt) **Boole-algebrának*** nevezzük, ha $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$-ra értelmezve van két művelet (nevezzük őket „összeadásnak" és „szorzásnak"), melyeket $\alpha + \beta$-val és $\alpha\,\beta$ (vagy $\alpha \cdot \beta$)-val jelölünk *(ezeknek semmi köze valós számok összegéhez és szorzatához!)*, ezek eredménye szintén a halmazba tartozik, továbbá minden α-hoz hozzá van rendelve egy $\bar{\alpha}$ elem és a halmaznak van két kitüntetett eleme, o és $\imath$, végül mindezek az elemek eleget tesznek az

I.

1. $\alpha + \alpha = \alpha$
2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
3. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$

II.

1. $\alpha\,\alpha = \alpha$
2. $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$
3. $\alpha(\beta\,\gamma) = (\alpha\,\beta)\,\gamma = \alpha\,\beta\,\gamma$

III.

1. $\bar{\alpha} + \alpha = \imath$
2. $\alpha + o = \alpha$
3. $\alpha + \imath = \imath$

IV.

1. $\alpha\,\bar{\alpha} = o$
2. $\alpha\,o = o$
3. $\alpha\,\imath = \alpha$

V.

1. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$

axiómáknak.

Pl. egy előbb említett eseményalgebra vagy egy kísérlet eredményei BOOLE-algebrát alkotnak, ha $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$-nak az $A, B, C, \ldots$ eseményeket, a $+$-szal jelölt műveletnek események fentebb definiált összegét stb., stb. vesszük. Nagyon sokféle értelmet adhatunk α, β, γ-nak és a „műveleteknek" úgy, hogy a BOOLE-algebra axiómái teljesüljenek. Ekkor azonban az axiómákból levezetett, az $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$-ra vonatkozó tételek szintén átvihetők lesznek azokra a dolgokra, amelyeket itt $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$-nak vettünk. Ez adja meg a BOOLE-algebra jelentőségét (l. 1. § 14. fel.); ezért tartottuk szükségesnek, hogy itt megemlítsük.

Példák és feladatok

1. Állapítsuk meg az alábbi események jellegét: *a)* Napfogyatkozás. *b)* Földrengés Görögországban. *c)* Egy családban az újszülött fiú. *d)* Cseppkő képződése. *e)* Egy sakkjátszma eredménye. *f)* Kilőtt puskagolyó a céltáblán a 10-es körbe csapódik be.

2. Ha A: (10 kockadobás közt nincs 4-es), mi $\bar{A}$ jelentése?

3. Egy műhelyben három munkagép dolgozik: I., II. és III. Legyen A: (I. elromlik egy éven belül), B: (II. elromlik egy éven belül), C: (III. elromlik egy éven belül). Fejezzük ki a következő eseményeket: Egy éven belül: 1. csak az I. romlik el; 2. I. és II. elromlanak, de III. nem; 3. I., II. és III. mindhárman elromlanak; 4. legalább egy gép elromlik; 5. legalább két gép elromlik; 6. pontosan egy gép romlik el; 7. pontosan két gép romlik el; 8. egyik gép sem romlik el; 9. legfeljebb két gép romlik el.

4. Legyen A: (egy telefonhívás $(t, t + T_1)$ időintervallum alatt érkezik be), B: (ugyanez a hívás $(t, t + T_2)$ időközben érkezik be). Mi a kapcsolat A és B között T_1 és T_2 különböző értékei mellett?

* *George Boole* (1815—1864) angol filozófus és matematikus.

5.* Bebizonyítandó: $A = A + AB$, ahol B tetszőleges.

Megoldás. A IV. 3. axióma alapján $A = AI$ és így $A + AB = AI + AB =$ $= (\text{lásd VII. axióma}) = A(I + B) = (\text{l.: I. 2.}) = A(B + I) = (\text{l.: III. 3.}) = AI =$ $= (\text{l.: IV. 3.}) = A$.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B tetszőleges események, $B = AB + \bar{A}B$.

7. Bebizonyítandó: Ha A és B két tetszőleges esemény, $A + B = A + \bar{A}B$; vagyis tetszőleges két esemény összege előállítható két egymást kizáró esemény összegeként $[A\,(\bar{A}B) = O\,!]$.

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B események összege előállítható három egymást kizáró esemény összegeként, $A + B = AB + A\bar{B} + \bar{A}B$ alakban.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha az $A_i\ (i = 1, \ldots, n)$ események teljes eseményrendszert képeznek, akkor tetszőleges B esetén $B = \sum_{i=1}^{n} BA_i$.

Megoldás. Feltevésünk azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{n} A_i = I$. Mindkét oldalt B-vel megszorozva, az V. 1. és IV. 3. axióma alapján a szóbanforgó összefüggést kapjuk.

10. Ha A és B két tetszőleges esemény, hogyan írható fel a C: (A és B közül *csakis* az egyik) esemény?

Megoldás. (Változatosság kedvéért szemléletes meggondolást is belevonva:) C előáll, ha A fennáll és B nem $(= A\bar{B})$, vagy megfordítva $(= \bar{A}B)$. $A\bar{B}$ és $\bar{A}B$ azonban kizárják egymást, hisz $(A\bar{B})\,(\bar{A}B) = (A\bar{A})\,(B\bar{B}) = O \cdot O = O$ (l. a II. 3. és IV. 2. axiómát). Így tehát: C: (A és B közül csakis az egyik) $= A\bar{B} + \bar{A}B$.

11. Bebizonyítandó: $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$ és $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$. Mi következik ebből események BOOLE-algebra értelmében vett $W = (A \cdot B \cdot C \cdots) + (D \cdot E \cdot F \cdots) + \ldots$ típusú kifejezése ellentettjének képzésére?

Megoldás. A hosszas, axiómákra támaszkodó bizonyítás helyett (amely abból indul ki, hogy egy A esemény $\bar{A}$ ellentettjét az $A + \bar{A} = I$ és $A\bar{A} = O$ összefüggések egyértelműen meghatározzák) bemutatunk az első összefüggésre egy szemléleteset: A bal oldal azt jelenti: A és B közül egyik sem; a jobb oldal: sem A, sem B (együtt) — ez a kettő azonban ugyanaz. A második összefüggést az elsőből kapjuk, ha abban először ellentettjeikkel cseréljük fel az eseményeket (az összefüggés bármilyen eseményekre igaz !), aztán mindkét oldal ellentettjét vesszük. Mindezek teljes indukcióval több eseményre is kiterjeszthetők. Egy $W = (A \cdot B \cdot C \cdots) + (D \cdot E \cdot F \cdots) + \ldots$ típusú kifejezés $\overline{W}$ *ellentettjét eszerint úgy képezzük, hogy* $+$ *helyett* $\cdot$*-ot írunk és megfordítva, az események helyett pedig ellentettjüket*: $\overline{W} = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \ldots)\,(\bar{D} + \bar{E} + \bar{F} + \ldots) \cdots$

12. Egy amerikai textilgyárban az ott dolgozó 1000 munkásról a következő osztályozást vették fel: Színes bőrű munkás 525, férfimunkás 312, házas munkás 470,

* A következőkben bebizonyított összefüggések nyilván akkor is igazak, ha a betűk tetszőleges BOOLE-algebra elemeit jelentik.

színes bőrű férfimunkás 42, házas színes bőrű munkás 147, házas férfimunkás 86, házas színes bőrű férfimunkás 25. Összeegyeztethetők-e ezek az adatok?

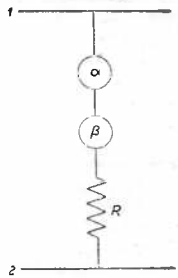
Megoldás. Az áttekinthetőség elérésére alkalmazzunk eseményalgebrát. Legyen A: (egy munkás színes bőrű), B: (egy munkás férfi), C: (egy munkás házas). Ekkor az egyes, a feladatban felsorolt osztályokba tartozás a következő eseményekkel fejezhető ki: A; B; C; AB; AC; BC; ABC. A dolgozók összességébe tartozásnak nyilván az I felel meg. Az adatok ellenőrzését pl. így végezhetjük el: kiindulunk az $I = (A + \bar{A})(B + \bar{B})(C + \bar{C})$ nyilvánvaló azonosságból. Beszorozva: $I = ABC + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Jelentse általában $N(X)$ azon egyének számát, akikre az X esemény fennáll; nyilván $N(X + Y) = N(X) + N(Y)$, ha $XY = O$ [$N(X) \geqq 0$ triviális]. (A mi esetünkben pl. $N(I) = 1000$, $N(ABC) = 25$ é. í. t.). I kifejezésében az egyes tagok (csoportosítva is) kizárják egymást, így az „N-képzés" szabálya alkalmazható: $N(I) = N(ABC) + N(A\bar{B}\bar{C}) + N(A\bar{B}C + AB\bar{C}) + N(AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}) + N(\bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C)$. Egyes eseményeket a fent felsoroltakra fogunk visszavezetni. Összevonás után: $N(I) = N(ABC) + N(A\bar{B}\bar{C}) + N(A\bar{B}) + N(B\bar{C}) + N(\bar{A}C)$. De $A\bar{B} + AB = A$, és így $N(A\bar{B}) + N(AB) = N(A)$, $N(A\bar{B}) = N(A) - N(AB)$, hasonlóan $N(B\bar{C}) = N(B) - N(BC)$, $N(\bar{A}C) = N(C) - N(AC)$ s ezekkel $N(I) = N(ABC) + N(A\bar{B}\bar{C}) + N(A) + N(B) + N(C) - N(AB) - N(BC) - N(AC)$. Ha ebbe $N(I)$ é. í. t. értékeit beírjuk, $N(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$-ra -57 jön ki, ami lehetetlen; az adatokban tehát hiba van. Vegyük észre, hogy itt tulajdonképpen *események* bizonyos *függvényéről* [$N(X)$] volt szó, amelynek számértékei vannak, s erre adtunk meg műveleti szabályokat, ezt kapcsolhattuk össze az események előfordulásának *számával*. Egy másik ilyenszerű függvényt majd a 2. §-ban ismerünk meg; ez valamely esemény *valószínűsége* (mint számérték) lesz.

13. Statisztikai adatgyűjtő ívek rovatainak megtervezésénél lépnek fel az alábbi feladatban szereplőkhöz analóg problémák: Valaki a következő tárgyak közül választhat: 1. matematika; 2. történelem; 3. fizika; 4. magyar; 5. orosz; 6. német; 7. angol. Összesen öt tárgyat kell felvennie. Magyar kötelező. Fizikához kötelező matematika. Orosz és német együtt nem hallgatható, mert az órák ütköznek. Történelmet nem akar felvenni. Fizika és angol okvetlenül kell, tekintettel a következő évfolyamra. Milyen kombinációkban vehet fel öt tárgyat?

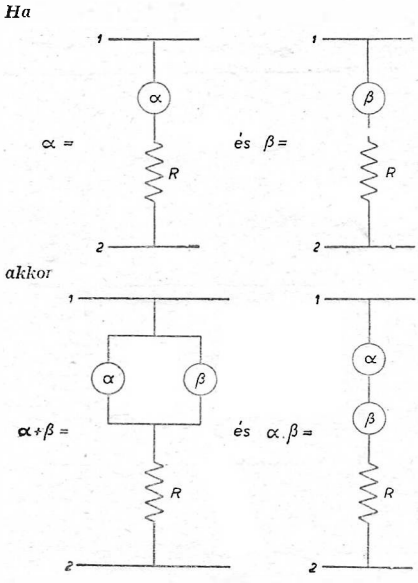
Megoldás. Legyen A_i: (az 1., . . . , 7. tárgyak közül i-t felveszi) ($i = 1., \ldots, 7.$). Azokat az $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_5}, \bar{A}_{j_6}, \bar{A}_{j_7}$ ($j_1, j_2, \ldots = 1, \ldots, 7$) együttes eseményeket kell megállapítanunk, amelyek $\neq O$; az ezekben szereplő A_i-k vehetők fel együtt. A feltételek így fejezhetők ki: A_3, A_4. A_7 mindig szerepeljen, vagyis $\bar{A}_3 A_l$, $\bar{A}_4 A_r$, $\bar{A}_7 A_s = O$ ($l \neq 3$, $r \neq 4$, $s \neq 7$). — $A_3 \subseteq A_1$ (ha fizika szerepel, matematika is; fordítva nem okvetlenül), vagyis mindenesetre $A_3 \bar{A}_1 = O$. — $A_5 A_6 = O$ (orosz, német együtt nem hallgatható, mert ütközik). — A_2 soha ne szerepeljen (történelmet nem vesz fel), vagyis $A_2 A_\nu = O$ ($\nu \neq 2$). Elvileg $\binom{7}{2}$ különböző eseményszorzatot kellene megvizsgálnunk a mondott feltételek mellett; ha ezt megtesszük, azt kapjuk, hogy $\neq O$ eseményszorzatok csak a következők: $A_1 A_3 A_4 A_5 A_7 \bar{A}_2 \bar{A}_6$ (vagyis matematikát, fizikát, magyart, oroszt, angolt felvenni) és $A_1 A_3 A_4 A_7 \bar{A}_2 \bar{A}_5$ (vagyis matematikát, fizikát, magyart, németet, angolt felvenni). Ez az eljárás persze hosszadalmas;

itt közvetlen meggondolással is elérhettük volna az eredményt; bonyolultabb, hasonló típusú feladatoknál azonban csak az itt látott módszer segít, mert *teljesen gépies* (ha a feltételeket egyszer már eseményalgebrai alakban kifejeztük). Ezt kihasználva ilyen típusú (pl. rovattervezési) feladatok megoldására ún. *logikai gépeket* lehetett készíteni. Sokféle technikai megoldás lehetséges; ma már az elektronikusok dominálnak. (Mechanikusokat már a múlt század végén is kigondoltak, illetve megépítettek.) Ezek a gépek természetesen felhasználhatók egyéb olyan problémáknál is, ahol BOOLE-algebra van a háttérben.

14. *Csak* reléket és kapcsolókat *csak* soros vagy párhuzamos kapcsolásban tartalmazó áramkörök elméletében, az ún. *relé-kapcsolástechnikában* eredményesen alkalmazható a BOOLE-algebra. Az alkalmazás alapja a következő: Legyenek $\alpha, \beta, \ldots$ kapcsolási elemek, amelyek kétféle állapotban lehetnek: Vagy átengedik az áramot, vagy nem. Legyenek ezek az elemek valamelyik állapotban; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots$ jelentse ugyanezeket a másik állapotban. Szorzásjellel (összeadásjellel) összekapcsolt két elem jelentse azt az újabb kapcsolási elemet, amelyet az elemek sorba (párhuzamosan) kapcsolásával nyerünk. Jelentsen végül o áramot soha át nem engedő, $\imath$ pedig áramot mindig átengedő kapcsolási elemet. — Bizonyítsuk be, hogy a felsorolt tulajdonsággal bíró $\alpha, \beta, \ldots$ elemek BOOLE-algebrát alkotnak. (Ha egy kapcsolást felrajzolunk, jelöljük az elemeket körbe írt betűjelekkel, és kössük össze ezeket vonalakkal (a „vezetékkel").) Az áramforrás és a működtetett készülék bekötését is tüntessük fel, pl. az 1. ábra módján. 1., 2. az áramforrás sarkai, R a működtetett készülék, α, β kapcsolási elemek. Az összeget és szorzatot mutatja a 2. ábra. Ha egy kapcsolásban több elem egyidejűleg ugyanabban az állapotban van (= egy helyről egyszerre kapcsolható be vagy ki), jelöljük ezt azzal, hogy az illető elemeknek ugyanaz a betűje (pl. α). Ha két elem egyidejűleg különböző állapotban van (= egy helyről az egyiket bekapcsoljuk s a másikat ugyanakkor ki, vagy fordítva), jelöljük ezt azzal, hogy az egyiknél pl. α, a másiknál azonban $\bar{\alpha}$ szerepel.

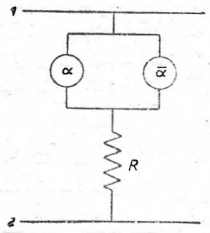


1. ábra

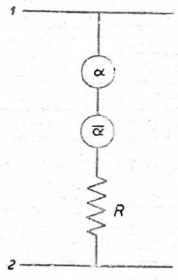


2. ábra

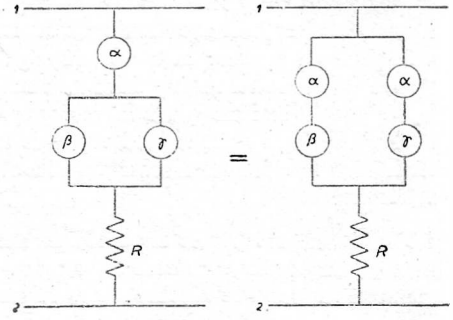
Megoldás. $\alpha + \alpha$ azt jelenti: Egy kapcsolási elemmel párhuzamosan van kötve egy másik, és mindkettő ugyanabban az állapotban van; ez nyilván annyi, mintha csak az egyik kapcsolási elem szerepelne, vagyis $= \alpha$ (I. 1. axióma). Az I. 2. triviális: párhuzamos kapcsolásnál a sorrend lényegtelen. I. 3. szintén rögtön látható. II. 1. bal oldala azt jelenti: Két egyforma állapotú kapcsolási elem sorbakötve; de ez ugyanaz, mintha csak az egyik szerepelne. III. 2., II. 3. triviális. III. 1. bal oldalát felrajzolva a 3. ábra mutatja. (1., 2. az áramforrás sarkai, R a működtetett készülék.) Ez azt jelenti,



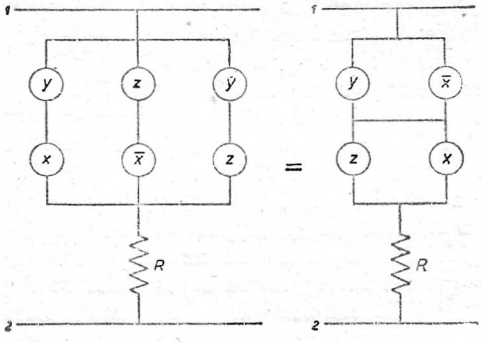
3. ábra



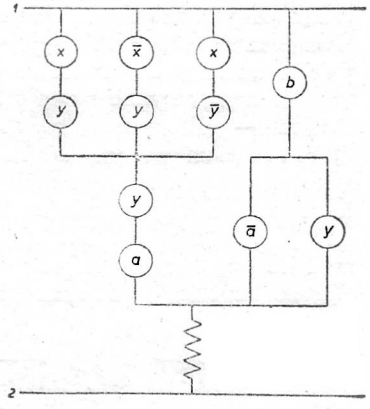
4. ábra



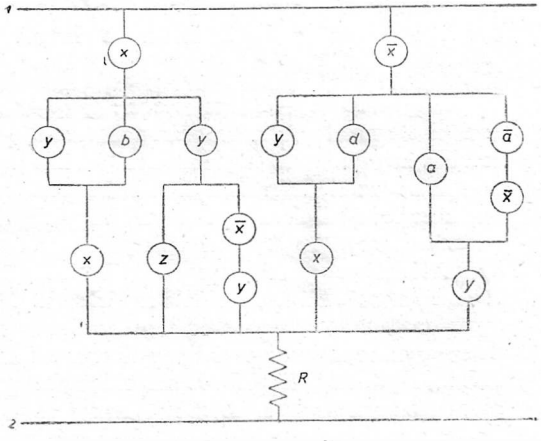
5. ábra



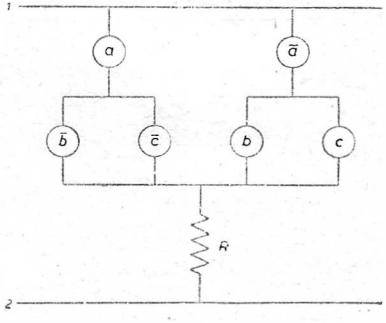
6. ábra



7. ábra



8. ábra



9. ábra

hogy a jobboldali elem mindig ellenkező állapotban van, mint a másik (ugyanis valamelyiken mindig áram folyik át); végül is R-en mindig áram folyik át, az $\alpha + \bar{\alpha}$ minegyetlen elem mindig átengedi az áramot, qu. e. d. III. 2., III. 3. triviális. IV. 1t bal oldalát felrajzolva a 4. ábra mutatja. Látható, hogy az $\alpha\bar{\alpha}$ kapcsolási elem soha nem engedi át az áramot R-be, vagyis $\alpha\bar{\alpha} = O$. IV. 2. és 3. ezek után triviális. V. 1. bal oldala felrajzolva és átalakítva az 5. ábrán látható. Ebből az axióma nyilvánvaló.

15. Bebizonyítandó a 6. ábrán látható egyenlőség. (Írjuk fel az egésznek mint egyetlen elemnek a kifejezését, és egyszerűsítsük a BOOLE-algebra segítségével.)

16. Egyszerűsítsük a 7. ábrán látható kapcsolást.

17. Egyszerűsítsük a 8. ábrán látható kapcsolást.

18. Szerkesszünk meg a 9. ábrán látható kapcsolás helyett egy olyant, amelyik ezzel ellentétes működésű (= átengedi az áramot, amidőn az első nem — és megfordítva).

2. §. ESEMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉGE

a) **Hogyan alkotunk matematikai elméletet**

A véletlen események körében bizonyos szabályosságot figyelhetünk meg; ez teszi lehetővé, hogy matematikai elméletet alkossunk meg a véletlen események leírására: a valószínűségszámítást.

A véletlen eseményeket a fizikai világban észleltük; a valószínűségszámítás megalkotásakor és alkalmazásakor ugyanazt az utat követjük, mint amidőn pl. a fizikai világ jelenségeiből kiindulva a geometriát vagy elméleti fizikát építjük fel, és az eredményt a fizikai világ jelenségeire igyekszünk alkalmazni. Érdemes egy kicsit foglalkozni ezzel az általános eljárással, amely az absztrakt tudományok alapja: matematikai elméletek megalkotásával és az elméletnek a valósághoz való viszonyával.

Ha a fizikai világ bizonyos jelenségeinél szabályosságot látunk, arra gondolhatunk, hogy ezeknek a jelenségeknek a leírására matematikai elméletet lehet kidolgozni. Ekkor a tapasztalatokhoz matematikai modellt dolgozunk ki.

A legegyszerűbb tények alapján axiómákat fektetünk le (a geometria axiómáit pl. tapasztalati tények nyomán állítottuk össze). Az axiómákból aztán tisztán logikai úton tételeket vezetünk le, amelyek matematikailag eleve igazak, a valósággal azonban egyelőre semmilyen kapcsolatba sem hozhatók. Hogy mi a viszonyuk a valósághoz, azt csak formuláinknak reális jelentést adva és azután kísérletezve mutathatjuk meg. Ha a kísérletek eredménye (nagyjából) ugyanaz, mint a matematikai következtetéseké, ez alátámasztja a matematikai modellt (ha pl. a geometriában az axiómákból azt *vezetjük le*, hogy a háromszög szögeinek összege π, és — miután a szög stb. fogalmához realitásokat rendeltünk — a *valóságban is ezt találjuk*, mondhatjuk, hogy axiómáinkat, a matematikai modellt és a belőlük folyó következményeket a valóság alátámasztja). Legideálisabb persze, ha már az axiómákat, alapfeltevéseket is jól alátámasztják a kísérletek.

Minden vizsgálódásnál feltesszük ezenkívül a következőket: *a)* Ha egyszer megegyezést tapasztaltunk bizonyos kísérlet eredménye és az elméleti végkövetkeztetés között, ez a megegyezés a jövőben is meglesz, a kísérlet újból való megismétlésekor. *b)* Ha az elmélet bizonyos tételei megegyeznek a tapasztalattal, megegyeznek azok a tételei is, amelyeket addig nem ellenőriztünk.

Minden elméleti tudomány ezekre a feltevésekre támaszkodik. Az elmélet érvényességéről ezzel a fenntartással beszélhetünk csak. Az elméletet persze minden olyan eset újból és újból támogatja, amelyben beigazolódott; persze, esetenként másképpen értékelünk egy-egy újabb bizonyítékot. Egyetlen ellentmondó eset is felborítja azonban az addig bevált elméletet (gondoljunk pl. a Michelson—Morlay-féle kísérletre, amely elvileg felborította a klasszikus elektrodinamikát; persze, az ebből a kísérletből levonható következtetések egész másképpen értékelendők közepes és igen nagy sebességek esetében).

Egy elmélet gyakorlati értéke következtetéseinek a tapasztalattal való egyezésétől függ, úgy, ahogy előbb kifejtettük.

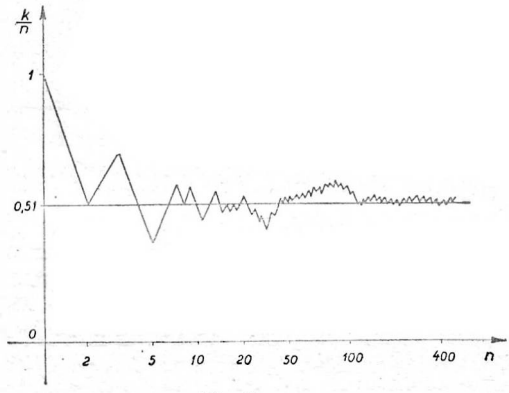
Alkalmazzuk most ezeket az általános elveket a megismétlődő véletlen események bizonyos összességeinek vizsgálatára (= *„véletlen tömegjelenségek"*).

b) **A valószínűségszámítás megalapozása**

Tekintsünk egy $\mathcal{K}$ „kísérletet", amelyet tetszőleges sokszor megismételhetünk. Ennek következménye legyen véletlen esemény: a lehetséges következmények közül tekintsük az egyiket (A). Ismételjük meg n-szer a „kísérletet"; a megismétlések során következzék be A k alkalommal ($0 \leqq k \leqq n$). k-t az A *gyakoriságának*, a k/n hányadost A *relatív gyakoriságának* nevezzük a „kísérletsorozatban". (Példa: $\mathcal{K}$: pénzdobás, A: („fej" esik felülre). Ha n dobásból k „fej", a „fej" relatív gyakorisága k/n.)

Tapasztalat szerint igen sokféle olyan $\mathcal{K}$ „kísérlet" található, hogy $\mathcal{K}$ tetszőleges sokszori megismétlésekor $\mathcal{K}$ egyik következményének — egy bizonyos A véletlen eseménynek — relatív gyakorisága egy bizonyos számérték körül ingadozik.

Példa: Egy klinikán regisztrált születések esetében a fiúszületések relatív gyakorisága tapasztalatilag 0,51 körül ingadozott. (10. ábra: a skála logaritmikus !)



10. ábra

A relatív gyakoriság említett „stabilitásából" kiindulva próbálunk most matematikai elméletet kidolgozni a megismétlődő véletlen eseményekre.

Ha egy kísérletsorozatban A relatív gyakorisága egy bizonyos érték körül ingadozott, akkor — posztulálva, hogy ez a jelenség a kísérletsorozat folytatásakor is megmarad — ezt az értéket hozzárendelhetjük az A véletlen eseményhez. *Ezt az értéket fogjuk A valószínűségének nevezni.* A relatív gyakoriság értelmezése folytán a valószínűség mindig 0 és 1 közt van.

Egyszerű események valószínűségei alapján a bonyolultakét akarjuk majd meghatározni. Ha most meg akarjuk alkotni az ehhez szükséges (matematikai) axiómákat és elméletet, el kell vonatkoztatnunk minden fizikai kísérletezéstől. Az „esemény" fogalmát megtarthatjuk, mert kísérleti vonatkozásait az alábbiakban nem kell kihasználnunk: felfoghatjuk pl. egy halmaz elemének. Későbbi okokból célszerű lesz az eseményeket egy eseményalgebrán belül tekinteni. Ezek után azonban csak az a tény marad meg, hogy egy eseményhez egy szám van rendelve. Így jutunk első **axiómánkhoz:**

α) Adva van egy véges vagy végtelen sok elemű eseményalgebra. Ennek minden A eseményéhez hozzá van rendelve egy $P(A)$ szám $[0 \leqq P(A) \leqq 1]$. $P(A)$-t *az A esemény* **valószínűségének** *nevezzük.*

Ha A lehetetlen, s így a kísérletsorozatban sohasem következik be, relatív gyakorisága 0; ha A biztosan bekövetkezik, relatív gyakorisága 1.

A megfelelő valószínűségeket a következő kézenfekvő **axióma** definiálja:

$\beta)$ $\mathbf{P}(I) = 1$, illetve $\mathbf{P}(O) = 0$

(itt már felhasználtuk, hogy a szóbanforgó események esemény-algebrában vannak).

Tegyük fel, hogy a szóbanforgó kísérletsorozatban az egyes kísérleteknek $A, B, \ldots$ kimenetelei lehetnek, és ezek egymást kizárják. Legyen n kísérlet közt k_A számú olyan, amelyben A következett be, és k_B olyan, amelyben B, vagyis A, illetve B relatív gyakoriságai k_A/n, illetve k_B/n. Mivel A és B kizárják egymást, az $A + B$ esemény n kísérletből nyilván $k_{A+B} = k_A + k_B$-szer következett be, vagyis relatív gyakorisága

$$\frac{k_{A+B}}{n} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n}$$

vagyis A és B relatív gyakoriságainak összege. A relatív gyakoriságot és valószínűséget már az első axiómával kapcsolatba hoztuk. Erre gondolva absztraháljuk eredményünkből a következő **axiómát** (itt is az eseményalgebra létezése az alap):

$\gamma)$ Ha $AB = O$, $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

[$\gamma)$ régebben a valószínűségszámítás *„összeadási tétele"* néven szerepelt. Kiterjesztése véges számú összeadandóra: tétel; végtelen sokra: újabb **axióma** (l. 2. § 5. pl.)]:

$\delta)$ Ha $A_i A_k = O$ $(i, k = 1, 2, \ldots; i \neq k)$, $\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$.

Problémáink túlnyomó részénél ezek az axiómák teljesen megfelelnek, de ha nem eseményalgebra elemeire szólnának, összetett eseményekkel stb. nem tudnánk ezek alapján foglalkozni.

Egy eseményalgebrát, amelynek minden A eseményéhez hozzá van rendelve egy $\mathbf{P}(A)$ szám, amely eleget tesz $\alpha), \beta), \gamma, \delta)$-nak, **valószínűségi algebrának** nevezünk (ha végtelen sok eleme van, az elnevezéshez még a „végtelen" jelző járul).

A jövőben „**valószínűség (i)**" *helyett* „**vsz.**" *rövidítést használunk.*

Tapasztalati tényeinkre támaszkodva tehát megalkottuk *egy matematikai elmélet alapjait. Nézzük ennek gyakorlati értékét.*

Az $\alpha)$ axiómánál közölt meggondolás szerint egy A esemény vsz.-ének azt a számot *fogjuk* nevezni, amely körül rá végzett hosszú kísérletsorozatnál A relatív gyakorisága ingadozik. Ha valamilyen E összetett eseményhez az őt alkotó elemi események pl. kísérletileg meghatározott vsz.-eiből axiómáink alapján vsz.-et számítottunk ki, természetszerűleg úgy fogjuk kapcsolatba hozni a valósággal, hogy azzal a számmal akarjuk azonosítani, amely körül E relatív gyakorisága ingadozik egy hosszú kísérletsorozatban, amely E-t produkálni képes.

Tapasztalat szerint az ilyen számított és észlelt értékek számtalan kísérletben jó közelítéssel megegyeztek. Mivel a számítás közbenső lépéseinél felhasznált feltevések (pl. egymást kizárás) a gyakorlatban biztosan eldönthetők, az egyezést esetleges, a számítás során fellépő eltérések nem vonhatták maguk után, vagyis a matematikai modell jó, és így — mint más kísérleti tudományoknál is — *a vsz. számítás gyakorlati értékének posztulátumait* a következőkben ismételhetjük meg, illetve foglalhatjuk össze:

1. *Kísérletezéskor egy, a kísérlet következményei közé tartozó véletlen elemi esemény vsz.-ének azt a számot fogjuk nevezni, amely körül hosszú kísérletsorozatban relatív gyakorisága ingadozik*; újabb (hosszú) sorozatok ugyanezt a *számot szolgáltatják.*

2. *Legyenek adva az E_1, E_2, ... elemi események vsz.-ei; számítsuk ki egy belőlük képezett G összetett esemény p vsz.-ét axiómáink segítségével. Akkor G relatív gyakorisága rá végzett hosszú kísérletsorozatban ezen p körül fog ingadozni.*

Az elemi események vsz.-ét vagy kísérletezésből közelítőleg ismerjük (ekkor G relatív gyakoriságára is tágabb határok lesznek), vagy feltevéseket teszünk rájuk, amelyeket persze az eredmény kísérleti ellenőrzésével kell jogosítanunk, vagy más, könnyen ellenőrizhető feltevésekből vezetjük le.

A gyakorlat szempontjából megjegyezzük, hogy csak a γ) axiómában szereplő egymást kizárás ténye kíván speciális esetben külön ellenőrzést; ezt azonban legtöbbször már a kísérleti feltételek ismeretében is megállapíthatjuk.

c) A Kolmogorov-féle axiómák

Axiómáinkat még tovább is absztrahálhatjuk. Az axiómák szükségességének felismerése több matematikusnál megtalálható; legabsztraktabb és legszabatosabb megfogalmazásukat azonban A. N. KOLMOGOROV adta meg.*

Halmazelméleti jellegű axiómarendszerét, melyet nagy jelentősége miatt szükségesnek tartunk ismertetni, a következőkben foglaljuk össze:

Adva van egy vizsgált $\mathfrak{K}$ kísérlet, továbbá $\mathfrak{K}$ eredményei (megadott szempont szerint nevezve ezt vagy azt az eseményt $\mathfrak{K}$ eredményének), melyek véletlen események.

I. Adva vannak $\mathfrak{K}$ eredményei közül az elemi események és ezek egy $\mathfrak{H}$ halmaza, az *eseménytér.*

II. Adva van $\mathfrak{H}$ részhalmazainak egy olyan $\mathfrak{T}$ összessége, hogy ha $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ két, $\mathfrak{T}$-hez tartozó halmaz, a halmazelméleti műveletekkel képezett $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}$ szintén $\mathfrak{T}$-hez tartozik. ($\mathfrak{T}$ „halmaztestet" alkot.)

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... azt az összetett eseményt reprezentálja, amely az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ...-t alkotó elemi események összege. Ekkor könnyen belátható, hogy a $\mathfrak{T}$ elemeivel reprezentált események eseményalgebrát képeznek; hogy $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{A}$, illetve $\mathfrak{B}$-t alkotó elemi események összegét reprezentálja, é. í. t.

II.-ből következik, hogy az O üres halmaznak is $\mathfrak{T}$-hez kell tartoznia; ui. legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ elemi esemény, ekkor $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = O$, de a *II.* axióma szerint ennek $\mathfrak{T}$-hez kell tartoznia.

III. $\mathfrak{H}$ maga is $\mathfrak{T}$-hez tartozik ($\mathfrak{H}$ nyilván az I eseményt reprezentálja).

IV. Ha $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n \ldots$ mind $\mathfrak{T}$-hez tartozik, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ is.

V. $\mathfrak{T}$ minden $\mathfrak{A}$ eleméhez (amely $\mathfrak{K}$ egy A kimenetelét reprezentálja) hozzá van rendelve egy $0 \leqq \mathbf{P}(\mathfrak{A}) \leqq 1$ szám.

$\mathbf{P}(\mathfrak{A})$-t nevezzük $\mathfrak{A}$ valószínűségének.

VI. $\mathfrak{H}$-hoz az 1-et, ill. az üres halmazhoz a 0-t rendeljük.

VII. Ha $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = O$, $\mathbf{P}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \mathbf{P}(\mathfrak{A}) + \mathbf{P}(\mathfrak{A})$ (a műveletek halmazelméletiek). $\mathbf{P}(\mathfrak{A})$ *függvénye* $\mathfrak{A}$-nak: ún. *halmazfüggvény.*

VIII. Ha $\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k = O$ $(i, k = 1, 2, \ldots; i \neq k)$, $\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathfrak{A}_k)$.

Egy $\mathfrak{H}$ halmazt, amelyre — illetve amelyhez tartozó $\mathfrak{T}$-re — az összes axiómák teljesülnek, *valószínűségi mezőnek* nevezzük. Ha $\mathfrak{T}$-nek végtelen sok eleme van, az elnevezéshez még a „végtelen" szó járul.

* *Andrej Nikolajevics Kolmogorov* (1903—) szovjet matematikus.

Látjuk, hogy az absztrakció egészen általános. Események helyett tulajdonképpen halmazok szerepelnek, a valószínűség pedig egy halmazfüggvény. A fizikai vonatkozások elmaradtak.

A modern vsz. számítás, mint a matematika egyik ága, a KOLMOGOROV-féle axiómákon nyugszik. Ezek — halmazelméleti megfogalmazásuk folytán — kissé szokatlanok ugyan, de fontosságuk miatt meg kell ismerkedni velük. A szűkebb gyakorlat szempontjából általában elégségesek az $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ axiómák is.

Természetes, hogy a bizonyításokban nem utalunk mindig külön arra, milyen axiómákat használtunk fel.

Ujabb rövidítést vezetünk be: „**Annak a vsz.-e, hogy ... (esemény)**" *helyett* $\mathbf{P}(\ldots)$*-t, ahol a zárójelbe a szóban forgó esemény leírása, jele kerül.*

d) **Egyszerűbb tételek**

Az axiómák alapján most már kimondhatunk néhány egyszerűbb tételt (a szereplő események egyazon vsz. algebra elemei !).*

1. *Ha* $B \subseteq A$, $\mathbf{P}(B) \leqq \mathbf{P}(A)$

2. *Tetszőleges* A, B eseményekre (tehát AB nem okvetlen O !)

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$$

3. Ha $A_1, \ldots, A_n$ egyazon vsz. algebra elemei (pl. egy kísérlet egyes, egymást nem okvetlenül kizáró eredményei), annak a

$$P_k(A_1, \ldots, A_n) = \mathbf{P}\Big(\sum A_{i_1} \cdots A_{i_k} \bar{A}_{i_{k+1}} \cdots \bar{A}_{i_n}\Big)$$

vsz.-ét (a Σ az $1, \ldots, n$ számokból alkotható valamennyi k-ad osztályú kombinációra szól !), hogy ezek közül pontosan k számú ($k = 0, 1, \ldots, n$) fog előfordulni, a

$$P_k(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} B_j$$

képlet adja meg, amelyben $B_0 = 1$ és $B_j = \Sigma\, \mathbf{P}(A_{i_1} \cdots A_{i_j})$ (a Σ az $1, \ldots, n$ számokból alkotható valamennyi j-edosztályú kombinációra szól). Ha $\mathbf{P}(A_{i_1} \cdots A_{i_j}) = \mathbf{P}(A_1 \cdots A_j) = Q_j$ $(1 \leqq i_1 < \ldots < i_j \leqq n;\ j = 1, \ldots, n)$ azt mondjuk, hogy az események *ekvivalensek*; ekkor $B_j = \binom{n}{j} Q_j$, $(Q_0 = 1)$ és

$$P_k(A_1, \ldots, A_n) = \binom{n}{k} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{n-k}{n-j} Q_j.$$

Ez a tétel JORDAN KÁROLYtól** származik.

* Ez a kikötés lényeges, de mindig teljesíthető, ti. példáinkban, feladatainkban ugyan nem mindig nyilvánvaló, hogy a szereplő események egyazon vsz. algebra elemei; többnyire úgy látjuk, hogy különböző „kísérletekről" van szó; azonban mindig találhatunk egy olyan, a valóságos viszonyokkal esetleg nem is egyező „kísérletet", amelynek a szereplő események mind eredményei lehetnek. Hogy ez a „kísérlet" fiktív, az a tételek alkalmazása szempontjából lényegtelen; az a fontos csak, hogy a vizsgált események a feladatbeliek legyenek, ez pedig így is van; vagyis egyazon vsz. algebrába fognak tartozni. Erre még visszatérünk.

** *Jordan Károly* (1871—) a modern valószínűségszámítás és matematikai statisztika első magyar művelője.

e) **Klasszikus kiszámítási mód**

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ véges számú eseményt tartalmazó valószínűségi algebra elemi eseményei, és legyen $\mathbf{P}(A_i) = p$ (konst) $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ha az A összetett esemény k elemi esemény összege, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n}.$$

Ez felel meg a klasszikus valószínűségszámítás hírhedt definíciójának: „Egy esemény valószínűsége egyenlő az esemény bekövetkezésére ‚kedvező' esetek számának és az összes ‚lehetséges' esetek számának hányadosával (‚eset' nálunk elemi esemény), feltéve, hogy ezek az esetek egyenlően ‚lehetségesek' (azaz: egyenlően ‚valószínűek')."

Látjuk, hogy a $\mathbf{P}(A) = k/n$ tételt modern elméletünkben csak elég speciális esetben kapjuk meg. Azt, hogy az elemi események egyenlően valószínűek-e, csak kísérletileg dönthetjük el. (Nem igaz tehát eleve az, hogy pl. a „fej" vsz.-e $^1/_2$ a pénzdobásnál.) Enélkül következtetéseinktől nem várhatjuk, hogy megegyezzenek a valósággal, hiszen ott rejlik mögöttük a „feltéve, hogy az elemi események valószínűsége egyenlő" feltevés, amelynek jogosultságát elméletileg eldönteni nem lehet. Erről a klasszikus valószínűségszámítás elfeledkezett, s ez eredményezte a klasszikus definíció körüli éles vitákat, továbbá a vsz. számítás hírhedt „paradoxonjait".

Sok valószínűségszámítási feladatban feltesszük, hogy az elemi események egyenlően valószínűek, és így számítjuk ki a kiszemelt összetett esemény valószínűségét; utóbbi sokszor már kísérletileg is ellenőrizhető, s így eldönthető kiinduló feltevésünk jogosultsága.

f) **Feltételes valószínűség**

Ezek után azt akarjuk vizsgálni, hogyan fejezhető ki egy vsz.-i algebra két eseménye (eseményalgebrai) szorzatának vsz.-e. Ehhez bevezetjük a **feltételes valószínűség** fogalmát. Legyen A és B egy vsz.-i algebra két eleme. Jelentse $\mathbf{P}(A \mid B)$ A valószínűségét, *B fennállását feltételezve (= B feltétel mellett).* (Kiírt eseményeknél is | a jel!)

Példa: Számlálócsővel α-részeket regisztrálunk. Legyen A: (a számlálócső regisztrál egy t_1 időpontban becsapódó α-részt), B: $[(t_1 - \Delta, t_1)$ időintervallumban α-rész ment át a csövön $(\Delta \leqq 10^{-4}$ sec)]. (Most nem részletezzük, milyen vsz. algebrának elemei ezek mindketten.) Ekkor $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}$ [a t_1-ben jövő α-részt a cső regisztrálja, feltéve, hogy $(t_1 - \Delta, t_1)$ alatt átment α rész]. Tudjuk, hogy ez $\neq \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}$ (t_1-ben érkező α-részt regisztrál a cső, az előzményeket nem tekintve), hiszen a cső regisztrálóképességét erősen lecsökkenti, ha „közvetlenül" (a „holt időnyi" időtartam alatt) az α-rész becsapódása előtt egy másik már áthaladt rajta.

Most $\mathbf{P}(A \mid B)$-t próbáljuk megállapítani. Induljunk ki ismét a tapasztalatból. Végezzünk N kísérletet arra vonatkozólag, hogy a cső regisztrál-e, amidőn egy α-rész áthalad rajta. Legyen B gyakorisága az N kísérletben N_B, AB-jé pedig N_{AB}. Ekkor AB relatív gyakorisága az N_B kísérlethez viszonyítva — vagyis: *B bekövetkezését feltételezve, A relatív gyakorisága*:

$$\frac{N_{AB}}{N_B} = \left(\frac{N_{AB}}{N}\right) \Big/ \left(\frac{N_B}{N}\right)$$

A relatív gyakoriság és vsz. kapcsolata alapján N_{AB}/N $\mathbf{P}(AB)$ körül, N_B/N $\mathbf{P}(B)$ körül fog ingadozni hosszú kísérletsorozat esetén. Következésképpen N_{AB}/N_B a $\mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(A)$ körül fog ingadozni.

Kézenfekvő tehát ezt az értéket tekinteni $\mathbf{P}(A \mid B)$ vsz.-ének. Mivel itt absztrakcióról van szó, $\mathbf{P}(A \mid B)$-t szükségképpen *definiálnunk* kell (tapasztalatainkra támaszkodva). Ha tehát A, B egyazon vsz. algebra elemei,

Definíció: A $\mathbf{P}(A \mid B)$ **feltételes vsz.-et** $\mathbf{P}(B) \neq 0$ *esetén a* $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(B)$ *összefüggéssel definiáljuk.* (Ez eleget tesz a vsz. axiómáinak!)

A vsz.-ekre vonatkozó tételek gyakorlati értékére vonatkozó korábbi megállapításainkat itt azonnal alkalmazhatjuk, minthogy $\mathbf{P}(A \mid B)$ olyan vsz.-ekkel fejezhető ki, amelyeknek már ismerjük a tapasztalati értékét. Kimondhatjuk tehát, hogy $\mathbf{P}(A \mid B)$-n azt a számot fogjuk érteni, amely azoknak a számértékeknek a hányadosa, amelyek körül AB, illetve B relatív gyakoriságai ingadoznak. Megfordítva, számos tapasztalat alapján *posztuláljuk*: ha egy véletlen eseményekre vonatkozó számítás végeredményeként valamely esemény feltételes vsz.-ére egy bizonyos értéket kapunk, ez azt a számot fogja jelenteni, amely körül ezen esemény feltételes relatív gyakorisága hosszú kísérletsorozatnál ingadozni fog.

g) **Két esemény szorzatának valószínűsége**

Az előbbiek szerint két esemény szorzatának vsz.-ét

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B)$$

adja meg. Ekkor $\mathbf{P}(B) = 0$-t sem kell kizárnunk; ez esetben ugyanis $\mathbf{P}(AB)$ is 0.

Fenti definíciónk alapján sok problémát igen egyszerűen megoldhatunk.

Mindezek után mondhatjuk, hogy a vsz. számítás gyakorlati értékére vonatkozó megállapításainkat kiterjesztettük minden olyan eseményre, amelyet elemi eseményekből eseményalgebrai úton állíthatunk elő. Ez elég lesz ahhoz is, hogy a későbbiekben bárhol megmondhassuk, milyen tapasztalati értéket tulajdonítsunk egy vsz. számítási eredménynek.

A 8. §-ban majd pontosabb meghatározását adjuk a relatív gyakoriság ingadozásának a vsz. körül, s ezzel ezt az eddig kvalitatív tényt kvantitatíve is ki fogjuk majd fejezni. Mindaddig feltesszük, hogy annyi kísérletet végzünk, amennyiből a relatív gyakoriság alapján már jól következtethetünk a vsz. értékére.

h) **A teljes valószínűség tétele**

Igen fontos tétel a következő: Ha egy vsz. algebra $B_1, \ldots, B_n$ elemei teljes eseményrendszert képeznek (tehát $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = I$; $B_i B_k = O$ $(i, k = 1, \ldots, n;\ i \neq k)$ és A a vsz. algebra valamely eleme, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid B_k)\,\mathbf{P}(B_k)$$

(n végtelen is lehet). (A feltételek szerint A együtt következik be valamelyik B_i-vel; a gyakorlatban kapcsolatukra gondolhatunk.)

i) **Bayes tétele**

Legyenek $B_1, \ldots, B_n$ és A az előbbiek. Akkor

$$\mathbf{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid B_k)\,\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid B_k)\,\mathbf{P}(B_k)} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

($n = \infty$ is lehet). Ez a tétel a „BAYES-féle tétel" néven ismeretes.* A tétel körüli sok vitát az okozta, hogy a $\mathbf{P}(B_k)$ valószínűségek legtöbb esetben nem voltak ismeretesek és rájuk a legeltérőbb feltevéseket tették, amelyek aztán helytelen eredményekre vezettek.

A B_k-k tekinthetők „okok"-nak (hipotéziseknek) is; ekkor $\mathbf{P}(B_k \mid A)$ annak a vsz.-e, mennyiben támasztja alá A bekövetkezése a B_k hipotézist (innen az „okok vsz.-ének tétele" egykori elnevezés).

j) Események függetlensége. A „szorzási tétel"

Ha A és B ugyanazon valószínűségi algebra elemei, és $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$, azt mondjuk: *$A$ független B-től.* — Példa: Két kockát dobálunk. Legyen A: (az elsőn 2-es esik felül); B: (a másodikon 3-as esik felül). Nyilván $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$ és $\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)$. — Általában is igaz, hogy ha $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$, akkor $\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)$.

Más megfogalmazásban: $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(B)$ alapján függetlenség esetén

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A),$$

vagyis a függetlenség következő feltételét kapjuk: *Ha A és B* **függetlenek**

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B).$$

Kimutatható, hogy ez a feltétel szükséges és elégséges.

Épp ezért ezt az összefüggést, amelyet régebben a valószínűségszámítás *szorzási tételének* neveztek, a *két esemény függetlensége* **definíciójának** *tekinthetjük.*

k) Több esemény függetlensége

Egyazon véges valószínűségi algebrához tartozó $A_1, \ldots, A_n$ események **teljes** *(összességükben való)* **függetlenségét** így **definiáljuk:** *$A_1, \ldots, A_n$ teljesen függetlenek, ha bárhogyan választva ki közülük a k számú $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ eseményt* $(k = 2, \ldots, n)$ $\mathbf{P}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_k})$ (ez $n = \infty$-re is szól, véges k-val).

Az egyes események páronként való függetlensége általában még nem jelenti az összes események teljes függetlenségét. Erre példa: Tekintsük a következő kísérletet. Bürker-féle vérsejtszámláló kamrában fehérvérsejteket figyelünk meg. Tekintsük a kamrában az a, b, c, d rekeszeket, amelyek egy négyzet negyedeit képezik. Legyen A: (egy fehérvérsejt c vagy d-ben van), B: (ugyanaz b vagy d-ben van), C: (ugyanez a vagy d-ben van) és legyen $^1/_4$ a vsz.-e, hogy a vérsejt a (illetve b, c, d)-ben van. Nyilván $\mathbf{P}(AB) = {}^1/_4$ és $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = {}^1/_2$, s így $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$, vagyis A, B függetlenek; hasonlóan látható be ugyanez B, C és A, C-re is. Ha azonban A és B egyszerre bekövetkezik, a vérsejt d-ben van, ezzel azonban C is bekövetkezett, tehát AB és C, vagyis A, B és C már nem függetlenek; definíciónknak megfelelően is, $\mathbf{P}(ABC) \neq \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C)$.

l) Kísérletek összekapcsolása

Sokszor foglalkozunk olyan eseményekkel, amelyek több, egymást nem befolyásoló kísérlet egyszerre való vizsgálatából adódnak (pl. két pénzdarabot dobunk fel egyszerre, s azt vizsgáljuk, mit mutat a *kettő*). Szorítkozzunk két kísérletre: több esetére a mondandók gépiesen kiterjeszthetők. *Tekintsük tehát a vizsgált két, egymást nem befolyásoló*

* *Thomas Bayes* (?—1761) angol matematikus.

kísérletet, $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$-t *egynek* ($\mathcal{K}$). Ha $\mathcal{K}_1$ kimenetelei A_i, $\mathcal{K}_2$-é B_j $(i, j = 1, 2, \ldots)$, $\mathcal{K}$ kimeneteleinek természetszerűleg az összes $A_iB_j = C_{ij}$ eseménykombinációkat tekintjük. Kimutatható, hogy ha az A_i és B_j-k külön-külön vsz. algebrát képeztek, és $\mathbf{P}(A_i) = p_i$, $\mathbf{P}(B_j) = q_j$, a C_{ij}-k is vsz. algebrát képeznek, ha $\mathbf{P}(C_{ij})$-t $\mathbf{P}(C_{ij}) = p_i\, q_j$-nak *definiáljuk.* Ezzel tehát $\mathcal{K}$-hoz egyetlen vsz. algebrát rendeltünk; összes kimenetelei (= a két kísérlet együttes eredményei) ennek az elemei, s erre a vsz. algebrára már minden eddigi tételünket alkalmazhatjuk, az ekkor szereplő vsz.-eket pedig a fentiek alapján a $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ elemeinek vsz.-eiből mindig kiszámíthatjuk; az is kimutatható, hogy ezen új vsz. algebrában $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ eseményei függetlenek; az egymást nem befolyásolást a $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ eseményei függetlenségével tettük ekvivalenssé. ($\mathcal{K}_1$ ($\mathcal{K}_2$) elemeinek vsz.-eire különben a régi értékeket kapjuk új vsz. algebránkban is.)

Ha $\mathcal{K}_1$ $\mathcal{K}_2$ megismétlése, a befolyásolatlanság folytán úgy képzelhetjük, hogy az egymásutániság helyett egyidejűleg (csak különböző „berendezésekkel") $\mathcal{K}_1$-et kétszer végezzük el (érmedobás kétszer egymás után = két egyforma érme egyidejű feldobása). $\mathcal{K}$ ekkor $\mathcal{K}_1$ és a (másik „berendezéssel" elvégzett) $\mathcal{K}_1$ együttese. Ezzel azonban a korábban letárgyalt esetre jutottunk. $\mathcal{K}$ említett megszerkesztése *mindig elvégezhető* (jó, ha néhány konkrét esetben ezt megtesszük!)

A jövőben mindig feltesszük, hogy a vizsgált eseményekhez már megkerestük a vsz. algebrát: Minden vizsgált esemény egyazon vsz. algebra eleme, s így tételeink mind alkalmazhatók. Vsz. algebránk egyes eseményei helyett sokszor a részletkísérletek azon eseményeit fogjuk összefoglalni, amelyek amazt szolgáltatják, s a keresett vsz.-et a részletkísérletek eredményei vsz.-eiből szorozzuk össze. *Mindezt persze nem mondjuk el feladatról feladatra.*

Jelen fejezet alapján a vsz. számítás feladatát bizonyos értelemben így állapíthatjuk meg:

A vsz. számítás feladata elemi események (kísérletileg megállapított vagy posztulált) vsz.-einek ismeretében, a vsz.-ekre vonatkozó tételek segítségével kiszámítani összetett események vsz.-eit.

Példák és feladatok

1. Állapítsunk meg vsz.-et fiúszületésre az alábbi budapesti adatokból:

Év	Újszülött összesen	Ebből fiú	Fiúszületések %-ban
1923	17 159	8 848	51,5
1924	16 284	8 299	51,0
1925	17 730	8 964	51,7
1926	16 767	8 615	51,4
1927	15 809	8 111	51,3
1928	17 137	8 818	51,3
1929	16 436	8 435	51,3
Összesen	116 922	60 090	51,4

2. Álljon a $\mathcal{H}$ eseménytér pénzdobálás E_1 („fej") és E_2 („írás") eredményeiből, melyek egyúttal elemi események is. Teljesülnek-e itt a KOLMOGOROV-féle axiómák? Mit mondhatunk a tapasztalat alapján $\mathbf{P}(E_1)$-ről?

Megoldás. Az I. axiómát kifejezi a feladat; $\mathcal{H}$ elemei E_1, E_2. II.: $\mathcal{C}$ elemei (( ) halmazt jelent) (E_1), (E_2), $(E_1, E_2) = \mathcal{H}$. Ezek bármely összege, szorzata stb. szintén eleme $\mathcal{C}$-nek, pl. $(E_1) + (E_2) = (E_1, E_2)$ eleme $\mathcal{C}$-nek, $(E_1)(E_2) = O$, $(E_1)(\overline{E_2}) = (E_1)(E_1) = (E_1)$

szintén. III. benne foglaltatik az előzőben. IV-nek itt nincs értelme, mert csak két elemből áll. Az V.-beli hozzárendelést pl. úgy végezhetjük el, hogy (E_1)-hez azt a $\mathrm{P}[(E_1)]$ értéket rendeljük, amely körül E_1 relatív gyakorisága *tapasztalat szerint* ingadozik, pl. $(\frac{1}{2})$-et. VI. a relatív gyakorisága hozzárendelése alapján automatikusan teljesül ($\mathcal{H} = (E_1, E_2)$ biztosan teljesül). VII. hátterét, mint tudjuk, a relatív gyakoriságok összefüggése adja meg.

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A eseményre $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\bar{A}) = 1$.

Megoldás. A $\gamma)$ axióma alapján $\mathrm{P}(A + \bar{A}) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\bar{A})$, mert $A\bar{A} = O$. $A + \bar{A}$ azonban $= I$, $\mathrm{P}(I)$ pedig a $\beta)$ axióma alapján $= 1$, ezekből már következik az állítás.

Általános elv, hogy ha egy A esemény ellentettjének $\mathrm{P}(\bar{A})$ vsz.-e könnyebben számítható ki, mint A vsz.-e, $\mathrm{P}(A)$, először $\mathrm{P}(\bar{A})$-t számítjuk ki, és azután a fenti összefüggés alapján $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A})$-t. (Például: Ha n „egymást nem befolyásoló" kockát egyszerre dobálnak, és bármely szám egyenlő vsz.-gel jöhet ki, mi a vsz.-e, hogy legalább egy kocka hatost mutat? Ezt direkt úton bonyolult megoldani; ha azonban az ellentett esemény (egyetlen kocka sem mutat hatost) vsz.-ét kérdezzük, arra könnyű válaszolni, mert P (valamely kocka nem mutat hatost) $= {}^5/_6$, és P (egyetlen kocka sem mutat hatost) $=$ P (az 1. kocka nem mutat hatost, ...) az n. kocka nem mutat hatost), ez pedig az itt fennálló függetlenség folytán $= ({}^5/_6)^n$. Így tehát a keresett vsz. $1 - (5/6)^n$).

4. Bizonyítsuk be: ha az $A_1, \ldots, A_n$ egyazon valószínűségi algebrába tartozó események kizárják egymást, vagyis $A_i A_k = O$ $(i \neq k)$, akkor $\mathrm{P}(A_1 + \ldots + A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_n)$.

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Két eseményre a $\gamma)$ axióma alapján fennáll; legyen igaz $(n-1)$ eseményre, vagyis legyen $\mathrm{P}(A_1 + \ldots + A_{n-1}) = \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_{n-1})$. Legyen $A_1 + \ldots + A_{n-1} = B$, és vizsgáljuk $\mathrm{P}(A_1 + \ldots + A_{n-1} + A_n) = \mathrm{P}(B + A_n)$-t. Mivel $BA_n = A_1 A_n + \ldots + A_{n-1} A_n = O$, alkalmazható a $\gamma)$ axióma, és $\mathrm{P}(B + A_n) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A_n)$, amiből a tétel már következik. Szóban: Véges számú, egymást kizáró esemény összegének vsz.-e egyenlő az egyes események vsz.-einek összegével. *Ezt a tételt axiómatikusan megszámlálhatóan végtelen sok eseményre is kiterjesztjük.*

Megjegyezzük, hogy a függetlenséget és kizárást kezdők sokszor azonosítják, amiből pedig súlyos hibák származhatnak. (Frappáns példa: Tetszőleges A eseménynél A és $\bar{A}$ kizárják egymást, de eleve nem függetlenek!)

5. Bizonyítsuk be: ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egy vsz.-i algebra elemei, és teljes eseményrendszert alkotnak, $\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) = 1$.

6. 1100 alkalommal megfigyelték, hány hívás fut be egy telefonközpontba 10^h és $10^h 5^m$ között. Azt tapasztalták, hogy 50 esetben egyetlen hívás sem érkezett, 190 esetben pedig egyetlen egy. Az ezekből az adatokból számított relatív gyakoriságok alapján az egyes eseményekhez a következő vsz.-eket rendelték: $\mathrm{P}(0 \text{ hívás}) = 0{,}04$; $\mathrm{P}(1 \text{ hívás}) = 0{,}17$; $\mathrm{P}(> 1 \text{ hívás}) = 0{,}78$. Elfogadható-e ez?

7. Feltesszük, hogy valamely személy elhalálozása bekövetkezhet *a)* korától független okból, vagy *b)* olyan okból kifolyólag, amelynek hatása a személy korától exponenciálisan függ. A két ok egymást kizárja. Ha a $(t, t + \Delta t)$ időtartam alatti, bármely okból történő elhalálozás vsz.-e $a(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$, ahol $a(t)$ általában t függvénye, mi annak a vsz.-e, hogy egy személy a $(t, t + \Delta t)$ időintervallumban fog meghalni.

8. Bebizonyítandó a repetitóriumrészben szereplő következő tétel: ha A és B egyazon vsz. algebra elemei, és $B \subseteq A$, akkor $\mathrm{P}(B) \leqq \mathrm{P}(A)$.

Megoldás. Ha $B \subseteq A$, A nyilván felírható $B + A\bar{B}$ alakban, mert $B \cdot A\bar{B} = O$ folytán utóbbi azt az eseményt jelenti: (vagy B, vagy $A\bar{B}$), s ebben mindkét lehetőség egyúttal A-t is jelenti. Alkalmazzuk a $\gamma)$ axiómát: $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B + A\bar{B}) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A\bar{B})$, amiből $0 \leqq \mathrm{P}(A\bar{B})$ segítségével (β) axióma) állításunk már következik.

9. Legyen A: (egy házaspár esetében a férj 40 évnél idősebb), B: (ugyanezen esetben a férj idősebb a feleségénél) és C: (ugyanezen esetben a feleség 40-nél idősebb). Igazoljuk: annak a vsz.-e, hogy a férj 40 évesnél idősebb, a feleség pedig 40-nél fiatalabb vagy 40, kisebb (egyenlő), mint annak a vsz.-e, hogy a férj idősebb a feleségénél.

10. Bizonyítsuk be azt a már említett tételt, hogy valamely vsz. algebra bármely két (tehát nem szükségképpen egymást kizáró) A és B eseményére $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$.

Megoldás. Láttuk (1. § 6. és 7. fel.), hogy $A + B = A + \bar{A}B$, illetve $B = AB + \bar{A}B$. Mivel $A \cdot \bar{A}B = O$ és $AB \cdot \bar{A}B = O$, alkalmazható a $\gamma)$ axióma, és így $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A + \bar{A}B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\bar{A}B)$, $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(AB) + \bar{A}B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\bar{A}B)$. $\mathrm{P}(\bar{A}B)$ kiküszöbölésével kapjuk a tételt.

11. Valamely alkatrészt két munkagép is készít. A kész alkatrészek hossza általában nagyobb (+) vagy kisebb (−), mint az előírt érték. Az 1. gép készítményei közt a számú (−) és k számú (+) van, a 2. gép készítményei közt l számú (+) és b számú (−) ($a + k + b + l = n$). Legyen A: (az n-ből találomra kivett alkatrész (+) osztályozású), B: (a kivett alkatrész az 1. gépen készült). Számítsuk ki $\mathrm{P}(A + B)$-t, feltéve, hogy bármelyik darabot egyenlő vsz.-gel vehetünk ki.

12. Bizonyítsuk be: ugyanazon vsz. algebra bármely két A és B elemére $\mathrm{P}(\bar{A}B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$. Hogy alakul ez, ha $A \subseteq B$?

13. Tekintsük a $(0, t_1)$ és $(0, t_2)$ $(t_2 > t_1)$ időintervallumokat. Legyen egy telefonhívás időpontja valahol a $(0, t_2)$-ben. Ha ismerjük annak vsz.-ét, hogy a hívás $(0, t_1)$, illetve $(0, t_2)$ alatt fut be, mi a vsz.-e, hogy a hívás időpontja (t_1, t_2)-be esik?

14. A 2. § 13. fel. feltételei mellett írjuk fel az összefüggést a következő események vsz.-ei közt: ($(0, t_1)$-ben $\leqq 2$ hívás jön és $(0, t_2)$-ben k); ($(0, t_1)$-ben > 0 és $\leqq N$ számú hívás jön, és $(0, t_2)$-ben k); ($(0, t_1)$-ben > 2 és $\leqq N$ jön, és $(0, t_2)$-ben k).

15. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ egy vsz. algebra összes elemi eseményei, és legyen $\mathrm{P}(A_i) = p$ (konst; $i = 1, \ldots, n$). Bizonyítandó: ha B k elemei esemény összege, $\mathrm{P}(B) = k/n$.

Megoldás. Tudjuk, hogy egy véges eseményalgebra összes elemi eseményei teljes eseményrendszert alkotnak, vagyis $\sum_{k=1}^{n} A_k = I$ $(A_k A_j = O, k \neq j)$, ekkor azonban a 2. § 5. fel. alapján $\mathrm{P}(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) = \mathrm{P}(I) = 1$, másrészt $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) = n\,p$, s így $p = 1/n$. Ha pedig B pl. az $A_{j1}, \ldots, A_{jk}$ elemi események összege ($j_1, \ldots, j_k$ az 1, 2,

..., n elemek egy k-ad osztályú kombinációja) $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_{j_i}) =$ $k\,p$ (két elemi esemény szorzata O !), s ezekből a tétel már következik.

16. Egy gép alkatrészei közt egy rudacska is szerepel, amely egy fémkocka furatába illeszkedik bele. A rudacska vastagságának és a furat átmérőjének elméletileg egyező értéke van. A gép nem megfelelő, ha az említett két alkatrész közül *a)* az egyik mérete az előírt, a másiké az előírtnál kisebb vagy nagyobb; *b)* az egyik mérete az előírtnál nagyobb, a másiké az előírtnál kisebb. Megvizsgálnak 10 rudacskát és 20 furatos kockát. 7 rúd előírt vastagságú, 2 annál vastagabb, 1 vékonyabb; 16 kocka megfelelő méretű furattal van ellátva, 1-nek nagyobb, 3-nak kisebb a furatátmérője, mint az előírt. Mi a vsz.-e, hogy találomra kivett rudacskával és kockával nem építhető megfelelő gép, ha bármelyik rudacska és kocka-pár kiválasztása egyenlően vsz.?

17. Telefonközpontok berendezésének szerves része az ún. vonalválasztó. Több, szerkezetileg hasonló típusú van: egy 100-as vonalválasztó pl. egy hengerfelületen tíz sorban egymás alatt elhelyezett 10—10 kontaktusból áll; mindegyik egy előfizető vezetékéhez van kapcsolva. A vonalválasztóban mozgó kefe keresi meg a tárcsázott szám utolsó két jegyének megfelelő kontaktust; ekkor kapcsolat létesül a hívó és hívott állomás között. Ha p_{ik} annak a vsz.-e, hogy egy hívó fél az (1 2 3 4 i k) számot tárcsázza, mi a vsz.-e, hogy a hívott szám kontaktusa a vonalválasztó 3. sorában lesz?

18. Egy 100-as vonalválasztó-típus működése a következő: az utolsó előtti szám, i tárcsázása érintkezőlemezt bocsát a kontaktusmező i-edik sora elé, míg az utolsó szám, j tárcsázásakor ez az érintkezőlemez az i-edik sor j-edik kontaktusára csúszik. Tegyük fel, hogy $i = 0$ kapcsolása 0,25 sec-ba kerül, $i \neq 0$-é $0{,}25 + i \cdot 0{,}10$ másodpercbe, emellett i bármely értékénél $j = 0$ kapcsolása 0,15 sec alatt zajlik le, $j \neq 0$-é pedig $0{,}15 + j \cdot 0{,}10$ másodperc alatt. Ha egy hívásnál akármilyen utolsó két i, j számjegy tárcsázását egyenlően vsz.-nek tesszük fel, mi a vsz.-e, hogy a vonalválasztó működési (mozgási) ideje, T, *a)* $< 0{,}66$ sec, *b)* 0,66 és 1,50 sec között lesz?

19. Egy kártyajáték a következőképpen folyik le: A játékvezetőnél négy vörös és négy fehér kártya van összekeverve. Ő a csomagból mindig kihúz egyet, megállapítja a színét és sorbarakja. A partner úgy ül, hogy nem látja a játékvezetőt, annak húzásairól nem is értesül; meg kell próbálnia kitalálni, milyen sorrendben rakta le amaz a kártyáit (el kell mondania a színsorozatot). Négyszer szabad vöröset és négyszer feketét mondania. Mi a vsz.-e, hogy 6 kártya színét jól találja el? (Tegyük fel, hogy a partner bármely színsorrendet ugyanazon vsz.-gel mondhat be.)

20. A statisztikus mechanikában a BOLTZMANN-statisztika kiindulópontja a következő feladat: n *megkülönböztethető* részecskét jellemző pontokat a „fázistér" N cellája közt kell megosztani (egy cellában akárhány pont lehet). Ha a pontok bármely megoszlása egyenlően vsz., mi a vsz.-e egy olyan megoszlásnak, amelynél az i-edik cellában épp n_i pont lesz $(i = 1, 2, \ldots, N;\ \sum_{i=1}^{N} n_i = n)$?

Megoldás. A következő modellt használjuk: Képviseljék az egyes cellákat urnák, és azt, hogy egy pont pl. az i-edik cellában van, egy (a pontnak megfelelő, a megkülönböztetés miatt sorszámozott) golyónak az i-edik urnába való belejutása. Ekkor annak a vsz.-ét kell megállapítanunk, hogy az i-edik urnában épp n_i golyó lesz (a golyók bármely

megoszlása egyenlően vsz.). A kedvező eseteket így kapjuk meg: Vesszük a sorba rakott n golyó minden permutációját (ilyen van $n!$), és mindegyikből az első urnába az első n_1 golyót tesszük be, aztán a másodikba az n_1-re következő n_2 darabot é. i. t. Az így kapott megoszlások közül azok ekvivalensek, amelyeknél az n_1, n_2,... darab golyó, amely az első, második, ... urnában van ugyanaz, csak más sorrendben. Ekvivalens esetek tehát $n_1!\, n_2! \ldots$-szor lépnek fel; különböző megoszlás tehát csak $n!/n_1! \ldots n_N!$ esetben lesz. Az összes lehetséges megoszlások úgy állnak elő, hogy az 1. golyót elhelyezzük bárhová (N lehetőség), a 2. golyót ismét bárhová (N lehetőség, mert oda is kerülhet, ahol már van) — é. i. t., összesen N^n lehetőség lesz az összes golyók elhelyezésére. A keresett vsz. tehát $(n!/n_1! \ldots n_N!) \cdot (1/N^n)$. — Ha $1/N$-t úgy fogjuk fel, mint annak a p_i vsz.-ét, hogy egy golyó az N-edik urnába jut (bár ez itt i-től független), eredményünk $(n!/n_1! \ldots n_N!)\, p_1^{n_1} \ldots p_N^{n_N}$ alakot ölt. Ez adja meg az egyes cellákba megadott golyószám jutásának vsz.-ét. Az összes különböző megoszlások ilyen típusú vsz.-einek összessége az ún. *polinomiális eloszlást* adja meg. Ezzel még találkozunk a 4. §-ban. — Az itt kapott kombinatorikus kifejezés *analitikus kifejezésekkel való közelítését* alkalmazzuk aztán a BOLTZMANN-statisztika alapképletének levezetésében.

21. A statisztikus mechanikában a FERMI—DIRAC-statisztika kiindulópontja a következő feladat: N *megkülönböztethetetlen* részecskét jellemző pontok a „fázistér" G ($G > N$) különböző cellája közt oszlanak meg úgy, hogy bármelyik cellában 0 vagy 1 részecske lehet csak. Ha mindegyik megoszlás egyenlően vsz., mi a vsz.-e egy meghatározott megoszlásnak? A BOSE—EINSTEIN-statisztikánál ugyanez a feladat szerepel, azzal a különbséggel, hogy tetszőleges számú pont lehet bármelyik cellában. Mi lesz ekkor a fent kérdezett vsz.? [Vegyük észre, hogy *a részecskék* (illetve pontok) *megkülönböztetéséről nincs szó.*]

22. Meteorrajok vizsgálatánál merül fel az a probléma, amelyet a következő „urnamodellel" szemléltethetünk. n urnába találomra szétosztunk N megkülönböztethetetlen golyót. Bármilyen golyóeloszlás egyenlően vsz. Mi a vsz.-e, hogy épp k olyan urna lesz, amelyik n golyót tartalmaz?

Megoldás. Valamely golyóeloszlás vsz.-ét itt ugyanúgy számíthatjuk ki, mint a golyók valamely eloszlásának vsz.-ét a BOSE—EINSTEIN-statisztika urnamodelljénél (2. § 22. fel.). Ennek alapján a keresett vsz. $1 \Big/ \binom{N+n-1}{N}$. Ezek után legyen A_i: (az i-edik urnába m golyó jutott) ($i = 1, 2, \ldots, n$). Nyilván $\mathbf{P}(\Sigma A_{i1} \ldots A_{ik} \overline{A}_{ik+1} \ldots \overline{A}_{in})$-t keressük (a Σ $1, \ldots, n$ összes k-adrendű $i_1, \ldots, i_k$ kombinációra szól). JORDAN KÁROLY tételét használjuk fel az ekvivalens eseményekre szóló formájában, mivel feltételeink szerint $\mathbf{P}(A_{i1} \ldots A_{ij}) = \mathbf{P}(A_1 \ldots A_j) = Q_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Csak Q_j-t kell tehát kiszámítanunk. Ez annak a vsz.-e, hogy az $1, \ldots, j$-edik urnában egyformán m golyó lesz (a maradék urnában pedig valahogy eloszolva összesen $N - mj$). Nyilván $Q_j = 0$, ha $mj > N$. Ellenkező esetben így okoskodunk: Legyen N_r az r-edik urnában levő golyók száma ($r = 1, 2, \ldots, n$; $\sum_{r=1}^{n} N_r = N$), akkor $Q_j =$

$$= \sum_{\substack{i_{j+1}, \ldots, i_n = 0, \ldots, N-mj \\ i_{j+1} + \ldots + i_n = N - mj}} \mathbf{P}(N_1 = m, \ldots, N_j = m,\ N_{j+1} = i_{j+1}, \ldots, N_n = i_n)$$

az összeg egyes tagjai azonban egy-egy golyóeloszlás vsz.-ei; ezek feltevés szerint egyenlők, és értékük egyformán $1 \Big/ \binom{N+n-1}{N}$. Az összegnek annyi tagja van, ahányféleképp pl. $(N-mj)$ golyót $n-j$ urnába eloszthatunk: ismét a BOSE—EINSTEIN statisztika modelljének meggondolásaival élve, ez a számosság $\binom{(N-mj)+(n-j)-1}{N-mj}$. Végül is tehát $Q_j = \binom{N+n-j(m+1)-1}{N-jm} \Big/ \binom{N+n-1}{N}$ $(mj \leqq N)$. A további számolás gépies behelyettesítés. JORDAN KÁROLY formulája nélkül a megoldás — bonyolultsága folytán — reménytelen lett volna.

23. Legyen annak a vsz.-e, hogy bizonyos A esemény ez év folyamán bekövetkezik, $\mathbf{P}(A) = p$; a bekövetkezés egyenlő vsz.-gel eshet bármely hónapra. Tegyük fel, hogy A az év első 11 hónapjában nem következett be. Mi a vsz.-e, hogy decemberben bekövetkezik?

24. Egy meteorológiai állomás adataiból: 35 évi megfigyelésből azt kapták, hogy júniusban átlagban 6 napon van zivatar és 3 napon jégeső. Annak a vsz.-e, hogy zivatarkor jégeső is esik, 0,4. Mi annak a vsz.-e, hogy bizonyos (júniusi) napon van jégeső és nincs zivatar?

25. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ugyanazon vsz. algebrába tartozó, tetszőleges események. Hogyan fejezhető ki $\mathbf{P}(A_1 \cdots A_n)$ az egyes események feltételes vsz.-eivel?

Megoldás. A feltételes vsz. definíciója szerint

$$\mathbf{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathbf{P}(A_n \cdot A_1 \cdots A_{n-1}) = \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1}) \cdot \mathbf{P}(A_1 \cdots A_{n-1})$$

s ezekre a szétbontást újból alkalmazva, ez $=$

$$\mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1})\, \mathbf{P}(A_{n-1} \mid A_1 \cdots A_{n-2})\, \mathbf{P}(A_1 \cdots A_{n-2}) = \ldots =$$

$$\mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1})\, \mathbf{P}(A_{n-1} \mid A_1 \cdots A_{n-2}) \cdots \mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbf{P}(A_1)$$

vagyis

$$\mathbf{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\, \mathbf{P}(A_2 \mid A_1)\, \mathbf{P}(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1})$$

Vegyük észre, hogy az A_i-k akármilyen permutációjával is dolgozhattunk volna. Ha az A_i-k függetlenek, a feltételek elmaradnak; $\mathbf{P}(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

26. Valamely távvezeték elektromos viszonyain pl. úgy javítanak, hogy a vezetéket egyenlő szakaszokra osztják be, azután találomra választott szakasz(ok)ba bizonyos kapcsolási elem-komplexumot kötnek be, és megnézik, csökkent-e a fogyasztónál a fáziseltolás (ezt minden kísérletnél más kísérletektől függetlenül meg lehet állapítani). Az a tapasztalat, hogy mindegyik vezetéknél van egy bizonyos „optimális" szakasz: Ha ebbe kapcsolják bele a komplexumot, maximális a fáziseltolás-csökkenés. Ennek a beálltát is mindentől függetlenül megállapíthatjuk; persze, nem tudni, melyik ez a szakasz. Állapítsuk meg, hogy egyetlen komplexum alkalmazása mellett mi a vsz.-e, hogy a k-adik kísérletre találjuk csak el az optimális szakaszt. (Az egyszer alkalmatlannak bizonyult szakasznál már nem kísérletezünk. Tegyük fel, hogy a szóbajövő szakaszok közt bármikor egyenlő vsz.-gel választjuk akármelyiket.)

27. Tíz új rádiókészülék közt 4 hibás van. Találomra sorjában megvizsgáljuk őket, amíg nem találunk hibátlant. Mi a vsz.-e, hogy ehhez k rádiót kell sorban megvizsgálni, ha bármelyiket egyenlő vsz.-gel vehetjük elő akárhány közül (k nyilván $1, 2, \ldots, 5$ lehet csak).

28. Nagyszámú készletet vizsgálunk meg bizonyos gyártmányból. Mindegyik N darabból áll; a vizsgálat úgy történik, hogy minden készletből $n < N$ darabot ellenőrzünk ($= n$ elemű *mintát* veszünk). Mi annak a vsz.-e, hogy az n elemű mintában k db. selejtes lesz, ha az N között M darab selejtes van? Engedjük meg, hogy bármelyik darabot egyenlő vsz.-gel vehetünk ki egy készletből (függetlenül a még meglevő készlet darabszámától; $k = 0, 1 \ldots, n$).

Megoldás. Kombinatorikai meggondoláshoz folyamodunk. (Az ilyen meggondolások „művészetéből" állott a klasszikus vsz. számítás jó része.) Mindenekelőtt feltételeinkből következik, hogy egyenlő vsz.-gel vehetünk ki egyes ν elemű mintákat is. Képzeljük ti. megszámozva a darabokat, és számítsuk ki, mi annak a vsz.-e pl., hogy először a j_1, másodszorra a j_2 é. í. t. sorszámú darabot emeljük ki. Legyen A_i: (az i-edik alkalommal a j_i számút emeltük ki; $i = 1, \ldots, \nu$). Akkor a keresett vsz.

$$\mathbf{P}(A_1 \cdots A_\nu) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \cdots \mathbf{P}(A_\nu \mid A_1 \cdots A_{\nu-1}) =$$
$$= [1/N][1/(N-1)] \cdots [1/(N-\nu+1)].$$

Ez a vsz. független a j_i-számok sorrendjétől. Minket csak a $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ elemekből álló minta kihúzásának vsz.-e érdekel, a j_i-k sorrendje közömbös. Mivel az egyes sorrendek kizárják egymást, *valamelyik* megvalósulásának vsz. (= a keresett vsz.) az összeadási axióma kiterjesztése szerint a különböző sorrendek vsz.-einek összege. Fix sorrend vsz.-ét már ismerjük; összesen $\nu!$ különböző sorrend van, így tehát a keresett vsz. $\nu!/N(N-1)\cdots(N-\nu+1) = 1\Big/\binom{N}{\nu}$. Ez tehát egy meghatározott $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ ν-elemű minta kiemelésének vsz.-e, és ez független a j_i-ktől. Ezzel igazoltuk, hogy ez a vsz. bármilyen ν elemű mintára ugyanaz. Ezek után n elemű mintánál (az egyenlően vsz.) lehetséges esetek száma $\binom{N}{n}$ (ennyiféleképpen vehető ki az n elemű minta N-ből). A kedvező esetek száma (ahányféleképpen lehet a kivett n közt selejtes) $= \binom{N-M}{n-k}\binom{M}{k}$, ti. ennyiféleképpen lehet kivenni a jó $N-M$-ből $n-k$ jót, emellett a maradék M selejtesből k selejtest, a keresett vsz. tehát $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}\Big/\binom{N}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. — Azt mondjuk, hogy ezek a vsz.-ek *hipergeometrikus eloszlás* tagjai. Erről még lesz szó a 4. §.-ban. — Vegyük észre, hogy a bizonyítás utóbbi részében csak az összeadási tételt használtuk fel. Ha abból indultunk volna ki, hogy bármelyik n elemű minta kiemelése egyenlően vsz., az események szorzata vsz.-ére sem lett volna szükségünk.

29. A 2. § 28. feladat feltételei mellett tegyük fel, hogy ha az n darabból álló *minta* hibátlan, a készletet átveszik, ellenkező esetben nem. Mi a vsz.-e az átvételnek?

30. Moszkítók ellen bizonyos rovarirtószert alkalmaztak fix adagokban. Azt tapasztalták, hogy az első adagnál 80%-uk elpusztult, az életben maradtaknál azonban ellenállóképesség fejlődött ki, és csak 40%-uk pusztult el a rovarirtószer második

adagja alkalmazására. Harmadik rovarirtószer-adag az első két alkalmazás után fennmaradtak 20%-át ölte csak meg; é. i. t. minden újabb esetben a megöltek százaléka fele volt a megelőző kísérletben elpusztultak százalékának. Mi a vsz.-e, hogy *a)* egy moszkító k irtószer-alkalmazást túlél, *b)* k alkalmazást túlél, feltéve, hogy az $l\,(<k)$ elsőt már túlélte?

31. Bizonyítsuk be: ha A_1, A_2, B egyazon vsz. algebrába tartoznak, és $A_1A_2B = O$, $\mathrm{P}(A_1 + A_2 \mid B) = \mathrm{P}(A_1 \mid B) + \mathrm{P}(A_2 \mid B)$.

Megoldás. $\mathrm{P}(A_1 + A_2 \mid B) = \mathrm{P}([A_1 + A_2]\,B)/\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1B + A_2B)/\mathrm{P}(B) = [\mathrm{P}(A_1B) + \mathrm{P}(A_2B)]/\mathrm{P}(B)$, minthogy feltevés szerint $A_1B \cdot A_2B = A_1A_2B = O$. Az utóbbi kifejezés pedig egyenlőségünk jobb oldala. Vegyük észre, hogy $A_1A_2B = O$ kevesebb, mint $A_1A_2 = O$, azaz nem is szükséges, hogy A_1 és A_2 kizárják egymást. Itt kevesebb a megkötés, mint a nem feltételes vsz.-ek „összeadási" tételénél. (Általában igaz, hogy *események vsz.ére vonatkozó axiómák, tételek igazak maradnak, ha minden vsz.-jelnél ugyanazt a feltételt hozzuk be* (és ha már egyébként is van feltétel, akkor azt szorozzuk az új feltétellel). Pl. $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(B)$-ből következik, hogy $\mathrm{P}(AB \mid C) = \mathrm{P}(A \mid BC)\,\mathrm{P}(B \mid C)$ és hasonlóan több tényező esetén is.)

32. Legyen $p(x, T)$ annak a vsz.-e, hogy egy személy, aki elérte az x életkort, $x + T$ időpontban is még életben lesz. Igazoljuk, hogy *a)* $p(x, t + u) = p(x, t) \cdot p(x + t, u)$; *b)* Ha n egész szám, $p(x, n) = p(x, 1)\,p(x + 1, 1) \cdots p(x + n - 1, 1)$. Legyen $l(0) > 0$ konst, és definiáljuk az $l(T)$ és $d(T)$ függvényeket $T > 0$-ra a következőképpen: $l(T) = l(0) \cdot p(0, T)$, $d(T) = l(T) - l(T + 1)$. Igazoljuk, hogy $p(z, u) = l(z, u)/l(z)$, $q(z, 1) \equiv 1 - p(z, 1) = d(z)/l(z)$.

33. Bizonyítsuk be a teljes valószínűség tételét.

Megoldás. Ha $B_1, \ldots, B_n, A$ egyazon vsz. algebra elemei, és a B_i-k teljes eseményrendszert alkotnak, $P(A) = \mathrm{P}(AI) = \mathrm{P}(A\,[B_1 + B_2 + \ldots + B_n]) = \mathrm{P}(AB_1 + \ldots + AB_n) = \mathrm{P}(AB_1) + \ldots + \mathrm{P}(AB_n)$, minthogy $AB_i \cdot AB_k = O$ $(i, k = 1, \ldots, n;\ i \neq k)$. Felhasználva, hogy $\mathrm{P}(AB_i) = \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$ végül is ezt kapjuk: $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B_1) \cdot \mathrm{P}(B_1) + \ldots + \mathrm{P}(A \mid B_n)\,\mathrm{P}(B_n)$ ($n = \infty$-re is igaz!).

34. Egy munkagép átlagban munkaidejének $^1/_3$-ában az I., $^2/_3$-ában a II. munkadarabot dolgozza meg. I. kidolgozása közben az erre fordított idő 10%-ában áll a gép, II. kidolgozása közben pedig a kidolgozás idejének 25%-ában. Mi a vsz.-e, hogy találomra választott időpontban épp állni fog a munkagép?

35. 10 gép ugyanazt az alkatrészt gyártja. 2 gépnél (I. csoport) a selejt 3%, 5-nél (II. csoport) 1,5%, 3-nál (III. csoport) 1%. A kész alkatrészeket egyhelyütt gyűjtik össze. Ha bármelyik darabot egyenlő vsz.-gel vehetjük ki a kész alkatrészek közül, mi a vsz.-e, hogy egy kivett darab selejtes lesz?

36. Tegyük fel, hogy statisztikai adatok alapján kimondható a következő: annak a vsz.-e, hogy egy férfihallgató átmegy az államvizsgán, 0,6; azé, hogy egy nőhallgató átmegy, 0,4. Valaki így okoskodik: Annak a vsz.-e, hogy egy egyetemi hallgató (férfi vagy nő) átmegy az államvizsgán, az előbbiek szerint $0,6 + 0,4 = 1$. Hol a hiba?

37. Az USA statisztikai adatai szerint annak a vsz.-e, hogy egy családban n gyermek van, $\alpha\,p^n$ ($\alpha, p < 1$ az adatokból megállapított konstansok). Ha feltesszük, hogy fiú születésének vsz.-e $^1/_2$, és a születések független események, mi a vsz.-e, hogy

találomra választott családban k fiú van? n és k értékeire — könnyebb számolás kedvéért — engedjük meg a 0, 1, . . .-et, bár ez nagyobb n, k-nál nyilván nem egyezik a valósággal (az adatok szerint $\alpha\, p^n$ elég jól megközelíti a nagyobb n-nél természetszerűleg fellépő 0-t !).

38. Bizonyítsuk be BAYES tételét.

Megoldás. A 2. § 33. pl. feltételeiből kiindulva így okoskodunk: A feltételes vsz. definíciója szerint $\mathrm{P}(B_k \mid A) = \mathrm{P}(B_k A)/\mathrm{P}(A)$, másrészt $\mathrm{P}(AB_k) = \mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)$; ezt az előbbibe behelyettesítve: $\mathrm{P}(B_k \mid A) = \mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)/\mathrm{P}(A)$. A teljes vsz. tétele szerint $\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)$, s ezekből a tétel már következik ($n = \infty$-re is igaz !).

39. Egy gyárban két gép, I. és II. ugyanolyan csavart gyárt. I. naponta n_1 doboz csavart gyárt (mindegyikben ugyanannyi csavar van), amelyből átlagban $p_1\%$ selejtes, II. pedig n_2 doboz csavart, amelyekből átlagban $p_2\%$ selejtes. I. és II. összes egynapi termeléséből találomra kiválasztunk egy dobozt, és abból kiveszünk egy csavart. A vizsgálat ezt a csavart selejtesnek mutatja. Mi a vsz.-e, hogy olyan dobozból vettük ki, amelyet I. gyártott? (A dobozokat nem lehet megkülönböztetni, és egyenlő vsz.-gel vehetjük ki bármelyiket.)

40. 1000 villanykörte közt egyenlő vsz.-gel lehet 0, 1, . . ., 5 db selejtes (több selejtes nem lehet !). Ha már 100 körtét megvizsgáltunk az 1000-ből, és jónak találtuk őket, mi a vsz.-e, hogy mind az 1000 jó?

41. A. S. EDDINGTON angol csillagász következő feladatát: A, B, C és D közül mindegyik (a többitől függetlenül) három esetből egyszer mond igazat; ha A megerősíti, hogy B tagadja, hogy C azt mondja, hogy D hazudik, mi a vsz.-e, hogy D igazat mondott — öntsük a következő szabatosabb alakba: Történjék egy X esemény. D erről vagy változtatás nélkül számol be C-nek, vagy az ellenkezőjét közli ($= \bar{X} =$ hazugság), C a kapott értesülésről ismét vagy változtatás nélkül számol be B-nek, vagy az ellenkezőjét közli; hasonlóan számol be a kapott értesülésről B A-nak és A annak, aki őt hallgatja. Annak a vsz.-e, hogy $D(C, B, A)$ változtatás nélkül számol be valamiről ($=$ igazat mond), a többi személy viselkedésétől függetlenül legyen $^1/_3$ (ekkor azé, hogy az ellenkezőjét közli ($=$ hazudik), nyilván $^2/_3$). Ha most A azt állítja, hogy azt adja tovább, amit B mondott; B saját, A-nak adott közlése szerint az ellenkezőjét adta tovább annak, amit C mondott, s C (saját — B-nek adott — közlése szerint) az ellenkezőjét adta tovább annak, amit D mondott (az egyes szereplők esetleges hazudozását figyelembe véve), mi a vsz.-e, hogy D változtatás nélkül közölte X-et ($= F$ esemény).

42. Bizonyítsuk be: ha az egyazon vsz. algebrába tartozó A és B függetlenek, $\bar{A}$ és B, A és $\bar{B}$, $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is függetlenek.

Megoldás. Ki kell mutatnunk pl., hogy ha $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$, akkor $\mathrm{P}(\bar{A}B) = \mathrm{P}(\bar{A})\,\mathrm{P}(B)$ é. i. t. A 2. § 10. és 2. § 3. példák szerint $\mathrm{P}(\bar{A}B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B)\,[1 - \mathrm{P}(A)] = \mathrm{P}(\bar{A})\,\mathrm{P}(B)$. $\mathrm{P}(A\bar{B})$-nál csak A és B szerepét kell megcserélnünk az előzőkben. Végül $\mathrm{P}(\bar{A}\bar{B})$ esetén $\mathrm{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathrm{P}(\bar{B}) - \mathrm{P}(\bar{A}B)$,

ami az előbbiek alapján $= P(B)\,[1 - P(A)] = P(\bar{A})\,P(\bar{B})$. (A tétel tetszőleges sok tényezőre is kiterjeszthető; feladatok mélyebb vizsgálatánál tűnik ki, mennyire kihasználjuk ezt.)

43. I. gép bizonyos csavart gyárt, II. gép a hozzávaló anyát, I. és II. működése független. Annak a vsz.-e, hogy egy gyártott darab selejtes lesz, I.-nél p_1, II.-nél p_2 (a vsz.-eket a selejt hosszabb kísérletsorozatban mutatkozó relatív gyakoriságából állapítják meg). Találomra kiveszünk egy csavart és egy anyát a készítményekből. Mi a vsz.-e, hogy 1. csavar és anya jó, 2. mindkettő selejtes, 3. a csavar jó és az anya selejtes, 4. a csavar selejtes és az anya jó?

44. A 2. § 17. fel. feltételei mellett mi annak a valószínűsége, hogy ha a vonalválasztó 0,66 sec-on belül nem állt meg, a rákövetkező 0,33 sec alatt megáll?

45. A 2. § 17. fel. feltételei mellett mi a vsz.-e, hogy 10 egymásra következő hívásnál a kapcsolás ideje minden esetben $< 0{,}66$ sec lesz, feltéve, hogy a hívások függetlenek?

46. A 2. § 17. fel. feltételei mellett állapítsuk meg, mi a vsz.-e, hogy pontosan 2 hívásnál lesz a kapcsolási idő $\leqq 0{,}66$ sec?

Megoldás. Legyen A_i: (az i-edik hívásnál a kapcsolási idő $< 0{,}66$ sec). Mint láttuk (2. § 18. fel.) $P(A_i) = 0{,}06$. A feladatban említett B esemény többféleképpen valósulhat meg: $A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \cdots \bar{A}_{10}$ (vagyis, hogy az első és második hívásnál a kapcsolási idő $\leqq 0{,}66$ sec, de a többinél $< 0{,}66$ sec), $A_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 \cdots \bar{A}_{10}$, ... é. i. t., mind a kívánt eseményt fejezik ki. Mindegyik szorzatban egy $A_i A_k$ $(i < k)$ pár szerepel, a többi A_j-nek pedig az ellentettje. B esemény tehát: $B = \sum_i \sum_k A_i A_k \bar{A}_j \bar{A}_l \cdots \bar{A}_n$ $(i < k)$, ahol $i, k, j, l, \ldots, n$ 1-től 10-ig terjedő számok egy permutációja. Az A_i-k függetlenek, így $P(A_i A_k \bar{A}_j \cdots \bar{A}_n) = P(A_i)\,P(A_k) \cdots P(\bar{A}_n) = (0{,}06)^2\,(1 - 0{,}06)^8$ (v.ö. 2 § 25. pl.). Ez a vsz. i és k-tól független, vagyis B minden tagjára ugyanaz. B-ben összesen $\binom{10}{2}$ tag van (ennyi különböző $A_i A_k$ pár van); minthogy a szumma tagjai kizárják egymást, $P(B)$ az egyes tagok vsz.-einek összege lesz;

$$P(B) = \binom{10}{2} (0{,}06)^2\,(1 - 0{,}06)^8.$$

— Ha 2 helyett általánosságban m-et veszünk, a $\binom{10}{m} (0{,}06)^m (1 - 0{,}06)^{10-m}$ értéket kapjuk $(m = 0, 1, \ldots, 10)$. Ekkor azt mondjuk, hogy az egyes vsz.-ek *binomiális eloszlás* tagjai. Ezzel a formulával még sokszor találkozunk az itteninél sokkal mélyebb vizsgálatok kapcsán.

47. A valószínűségszámítás elemeit legkönnyebben a kocka-, pénzdobás-, kártya-, elhelyezési és urna-problémákon gyakorolhatjuk; ezért kezdik a kézikönyvek ilyen típusú példákkal. Ám a gyakorláson túlmenőleg is hasznosak ezek a példák; pl. sok probléma visszavezethető a klasszikus „urna" vagy „elhelyezési" problémára. Ilyen interpretációval oldható meg a következő feladat: Tekintsünk egy klinikán lefolyó szüléseket. Bármely szülésnél legyen egyszerűség kedvéért $^1/_2$ a vsz. a fiú, illetőleg leány születésének.

Ha egy N szülés adatait regisztráló adatsorozatban n fiú és $m = N - n$ leányszületés szerepelt, mi a vsz.-e, hogy két vagy több fiúszületés egyszer sem következik egymás után? (Az egyes szülések függetleneknek tekintendők.)

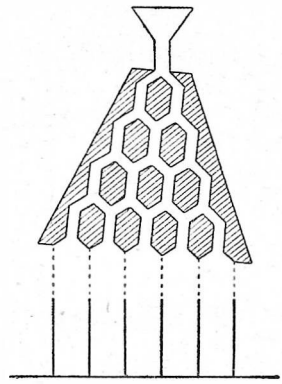
Megoldás. Mindenekelőtt világos, hogy $m \geqq n - 1$ esetén van csak $\neq 0$ megoldás. A 2. § 46. fel.-beliek analógiájára az n „fiú" (F) és $m = N - n$ „leány" (L) tetszőleges — meghatározott — sorrendben való bekövetkezésének vsz.-e $(1/2)^n (1/2)^{N-n} = (1/2)^N$, vagyis független az F és L-ek sorrendjétől, minden n számú F és $m = N - n$ számú L-ből álló eset egyenlően vsz.-ű. Beszélhetünk tehát „lehetséges" esetekről (az n F és $N - n$ L összes sorrendjei) és „kedvezőkről" (F és L-ek kívánt sorrendjei). A „lehetséges" esetek száma n db. F és $N - n$ db. L összes ismétléses permutációinak száma $= \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \left(= \binom{N}{n} \right)$. A kedvező esetek számát így határozzuk meg: jelentsenek $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ „cellákat", és helyezzük el ezeket és az n db F-et $A_1 F A_2 F A_3 \ldots A_n F A_{n+1}$ sorrendben (egy F — egy „cella" — é. i. t.). Az L-eknek ezekben a „cellákban" kell helyet foglalniok, éspedig mindegyikben *legalább* egynek, az első és utolsó kivételével, hogy feltételünk teljesüljön. A megmaradó $m - (n-1)$-db. L-t tehát tetszés szerint helyezhetjük el az $(n+1)$ „cellában"; a lehetséges elhelyezések száma egyszersmind a kedvező esetek számát is megadja. Ez $\binom{n+1}{m-(n-1)}$, és így a keresett vsz. $\binom{n+1}{N-2n+1} \Big/ \binom{N}{n}$. (Itt már bonyolultabb kombinatorikai meggondolás kellett.)

48. Véletlen események kísérletileg előállíthatók az ún. GALTON-féle deszka segítségével (11. ábra). Ezen egymás alatt (az ábrán látható módon) ékek vannak elhelyezve. A legfelső ékre egymás után golyókat ejtünk. A golyók véletlenszerűen hol jobbra, hol balra térnek el az éken; ha a deszka kicsit oldalt dől, várható, hogy sok kísérletnél többször tér el a golyó arrafelé, amerre a deszka dől. Általánosságban azt mondhatjuk tehát, hogy egy golyó minden éken q vsz.-gel tér el balra, és $p = 1 - q$-val jobbra. Az első ékről legurult golyó az ékek közti csatornában újabb ékre fut, s ott a leírt játék megismétlődik, é. i. t. Legyen $W(n, k)$ $(n \geqq 0)$ annak a vsz.-e, hogy a legfelül levő, „0-adik" $(n = 0 - \text{s})$ sor egyetlen ékére bocsátott golyó az n-edik sor k-adik ékéhez érkezik $(k = 0, \ldots, n$; a bal szélen levő éket 0-val jelöljük). Határozzuk meg $W(n, k)$-t.

Megoldás. Rekurzíve fogjuk meghatározni a $W(n, k)$-kat. Nyilván $W(0, 0) = 1$ és $W(n, k) = 0$, ha $k > n$. Legyen C: (a golyó az n-edik sor k-adik ékéhez érkezett). A_i: [a golyó az $(n-1)$-edik sor i-edik ékéhez érkezett]. Az A_i-k teljes eseményrendszert alkotnak, mert összegük a biztos esemény, és az A_i-k kizárják egymást. C elvileg az A_i-k bármelyikével együtt bekövetkezhet (illetve nem következhet be). $\mathbf{P}(C)$-re alkalmazható a teljes vsz. tétele, azaz $\mathbf{P}(C) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(C \mid A_i)\ \mathbf{P}(A_i)$. Az itt szereplő feltételes vsz.-ek közül $\mathbf{P}(C \mid A_{k-1})$ annak a vsz.-e, hogy A_{k-1} fennállott (vagyis a golyó az $n-1$-edik sor $k-1$-edik ékéhez érkezett) — és így következett be C, ez azonban annak a vsz.-vel egyenlő, hogy a golyó az $n-1$-edik sor $k-1$-edik ékéről jobbra gurult le; ez pedig p. Hasonlóan $\mathbf{P}(C \mid A_k) = q$. A többi $\mathbf{P}(C \mid A_l)$ $(i \neq k-1, k)$

azonban 0, mert máshonnan nem juthat a szóban forgó ékre a golyó. Így tehát $P(C) = P(C \mid A_{k-1})\, P(A_{k-1}) + P(C \mid A_k)\, P(A_k)$. Mivel definíció szerint $P(A_{k-1}) = W(n-1, k-1)$; $P(A_k) = W(n-1, k)$; $P(C) = W(n, k)$; $W(n, k) = p\, W(n-1, k-1) + q\, W(n-1, k)$. Ez a keresett rekurzív összefüggés. Ennek a megoldása a triviális $W(0, 0) = 1$-ből kiindulva $W(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, vagyis a már látott *binomiális eloszlás*. — Eredményünk azt jelenti, hogy sok golyót egymás után gurítva le a GALTON-féle deszkán, ezek közel binomiális eloszlás képe szerint töltik ki az utolsó sor alatt elhelyezett tartályokat. — Vsz.-ek rekurzív formula segítségével történő meghatározása igen gyakori a vsz. számításban.

49. Egy bombázó akkor teljesíti feladatát, ha *a)* a navigátor megtalálja a kijelölt célt és *b)* a bombakioldó eltalálja a már fellelt célpontot. *A* navigátor 0,9, *B* navigátor 0,8 vsz.-gel talál meg egy célt. *C* bombakioldó 0,7, *D* bombakioldó 0,6 vsz.-gel találja el a célt, ha a navigátor már megtalálta. Ha két repülőgép száll fel, a navigátorok és bombakioldók milyen kombinációjánál lesz maximális annak a vsz.-e, hogy vagy egyik vagy másik gép bombája célbatalál, feltéve, hogy az egyes gépek egymástól függetlenül végzik feladatukat?



11. ábra

50. Tüdőrákban szenvedők köpetvizsgálatánál alkalmazható a következő modell: Legyen annak a vsz.-e, hogy egy rákosbeteg köpetében lesz ráksejt, p_1, azé, hogy ráksejtet tartalmazó köpetből ráksejt kerül a mikroszkopikus készítménybe, p_2, azé, hogy a készítményben levő ráksejtet tényleg annak diagnosztizálnak, p_3. *a)* Egy beteg több alkalommal gyűjtött köpetből r mintát visz vizsgálatra. Mindegyik mintából s mikroszkopikus készítményt csinálnak, s mindegyiket kétszer vizsgálják át. Ha a páciens tényleg rákbeteg, mi a vsz.-e, hogy a $2rs$ mikroszkopikus vizsgálat közül legalább egy pozitív lesz? *b)* Milyen r és s értékeket válasszunk ahhoz, hogy ugyanannyi vizsgálatszám mellett maximális legyen a vsz.-e a tüdőrák felfedezésének, feltéve, hogy a beteg tényleg rákos? (Bármely vizsgálat független a többitől; tegyünk olyan egyöntetűségi feltevéseket, hogy összes feltételeinket felhasználhassuk.)

51. Az I. és II. pénzdarabokkal fej vagy írást játszunk. Először az I.-et, majd a II.-t dobjuk fel. A pénzdarabok „sorsa" egymást nem befolyásolja. Legyen A_1 : (I. fejet mutat), A_2 : (I. írást mutat), B_1 : (II. fejet mutat), B_2 : (II. írást mutat), és legyen $P(A_1) = {}^1/_2$, $P(B_1) = {}^1/_2$. Adjunk meg egy olyan vsz. algebrát, amelynek ezek az események is elemei, és benne az A_i-k függetlenek a B_j-ktől $(i, j = 1, 2)$. Mi lesz ebben $P(A_1)$?

Megoldás. Ha külön tekintjük az I. és II. dobását mint egyes kísérleteket és ezek eredményeit, két eseményalgebrát kapnánk. Tekintsük azonban *egyetlen* kísérletnek I. és II. (egyszerre való) feldobását; ennek a kimenetelei $C_1 = A_1 B_1$ (I.: fej, II.: fej), $C_2 = A_1 B_2$ (I.: fej, II.: írás), $C_3 = A_2 B_1$ (I.: írás, II.: fej), $C_4 = A_2 B_2$ (I.: írás, II.: írás). Ezek a C_l-ek $(l = 1, \ldots, 4)$ eseményalgebrát alkotnak, mert a C_l-k összes összegei, szorzatai, ellentettjei, O és I egyaránt új „kísérletünk" eredményei lehetnek.

Definiáljuk most $\mathbf{P}(C_l) = \mathbf{P}(A_i B_j)$-t $^1/_4$-nek $(i, j = 1, 2)$. Könnyen látható, hogy ekkor vsz. algebrát kapunk eseményalgebránkból. Mivel pedig $A_1 = C_1 + C_2$, $B_1 = C_1 + C_3, \ldots$ é. i. t. az A_i, B_j események elemei lesznek az új vsz. algebrának, ahogy kívántuk. Továbbá $\mathbf{P}(A_i B_j)$ egyenlő lesz $\mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(B_j)$-vel, vagyis új vsz. algebránkban A_i és B_j — kívánság szerint — függetlenek lesznek. A keresett $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(C_1 + C_2) = \mathbf{P}(C_1) + \mathbf{P}(C_2) = {}^1/_2$ ugyanaz, mint amennyi a kezdeti, A_1-et tartalmazó vsz. algebrában volt. Vegyük észre azt is, hogy a II. érme dobása helyett az I. *újból való* feldobását is tekinthettük volna; a tárgyaláson ez mit sem változtat. Ezzel azonban *megismételt* kísérletekhez rendeltünk esemény- (vsz.) algebrát. Meggondolásaink persze 2-nél több kísérlet kombinálására, illetve *egy* kísérlet 2-nél többszöri megismétlésére gépiesen kiterjeszthetők; így aztán több kísérlet „kombinációját", illetve *egy* kísérlet megismétléséből eredő újabb kísérletet is esemény- (vsz.) algebrával fejezhetünk ki, illetőleg tárgyalhatunk az erre vonatkozó tételek segítségével.

3. §. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK, ELOSZLÁS- ÉS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYEK

a) **Valószínűségi változó**

A valószínűségszámítás egyik legfontosabb fogalmát a következő kísérlet kapcsán vezetjük be: vizsgáljuk napról napra egy telefonközpontba 13^h és 14^h közt beérkező hívások ξ számát. ξ nem lesz állandó, sőt, függvénykapcsolattal sem fejezhető ki, hogyan változik a napok dátuma függvényében; ξ a *véletlentől függ*, véletlen ingadozásokat mutat.

Megadható azonban annak a vsz.-e, hogy értéke 0, 1, 2, ... legyen. Ebből és számtalan más megfigyelésből alakították ki a következő gyakorlati jellegű definíciót:

Jellemezze valamilyen kísérlet véletlentől függő eredményét a ξ valós mennyiség (az eredményeket tartalmazó eseményalgebra elemi eseményeihez különböző ξ értékeket rendelünk); ξ értékei a számegyenes bizonyos pontjai (esetleg az egész számegyenes). ξ-t (valós) **valószínűségi változónak** nevezzük (értékét minden egyes kísérletben a véletlen szabja meg), ha értékéről — föltéve, hogy az eseményalgebra vsz. algebra is — meghatározható, milyen vsz.-gel esik megadott határok közé (vagy pontokba) a számegyenesen.

Ha ξ értékkészlete kizárólag diszkrét, $x_1, x_2, \ldots$ pontokból áll, ξ-t **diszkrét valószínűségi változónak** nevezzük. Egyelőre csak arról fogunk beszélni, milyen vsz.-gel veszi fel ξ az $x_1, x_2, \ldots$ értéket. Ha ξ értékei egy H intervallumot töltenek ki, egyelőre csak azt vizsgáljuk, mi a vsz.-e, hogy ξ értéke a H-ban foglalt, kijelölt I intervallumba esik. Ebben az esetben ξ-t **folytonos valószínűségi változónak** nevezzük. Természetesen vegyes eset is előadódhat.

A jövőben **valószínűségi változó** *helyett a „vsz. v." rövidítést használjuk.*

Példa: Legyen a kísérlet pénzdobálás. Jellemezzük a kísérlet eredményét a ξ vsz. v.-val, éspedig legyen $\xi = 0$, ha fej jött ki, és $\xi = 1$, ha írás. (Csak az a lényeges, hogy a két eredményt jellemző számok különbözők legyenek. Vehettünk volna akár 1000-t és 1001-et is.) ξ nyilván diszkrét vsz. v.; minthogy vsz. algebra létezéséből indultunk ki, az is adott, milyen vsz.-gel veszi fel ξ a 0, illetve 1 értékeket.

Ha pedig a vsz. algebra elemi eseményei pl. a 13^h és 14^h közti időintervallum egyes időpontjaiban befutó telefonhívások, amelyeket egyszerűen magukkal az időpontokkal jellemezhetünk, ξ pedig egy *véletlenszerűen* befutó telefonhívás időpontját jellemzi, ξ nyilván folytonos vsz. v. Itt azonban pl. csak arról beszélhetünk, mi a vsz.-e annak, hogy ξ értéke (= a véletlen hívás időpontja) $13^h\,40^m$ és 14^h *közé* fog esni (annak a vsz.-e tudniillik, hogy ξ értéke kijelölt intervallumpont lesz, 0).

Egy vsz. v. bármely folytonos valós függvénye szintén vsz. v. (ezt itt nem részletezzük).

b) **Eloszlásfüggvény**

A gyakorlatban jóformán többször szerepelnek folytonos, mint diszkrét vsz. v.-k. Egy folytonos vsz. v. értékkészlete különböző eloszlásainak vsz.-ét legkényelmesebben az ún. *valószínűség*-**eloszlásfüggvénnyel** (rövidítve „e. f.") adhatjuk meg. *Valamely* ξ *vsz. v.* $F(x)$ *e. f.-ének* **definíciója** *a következő:*

$$F(x) = \mathrm{P}(\xi < x),$$

ahol a jobb oldalt így értelmezzük: $\mathrm{P}\ (\xi < x) \equiv \mathrm{P}$ (azon elemi eredményekből álló esemény, amelyekhez rendelt ξ-k kisebbek x-nél).

Az e. f. központi szerepére rávilágít a következő példa: Antropológiai adatok alapján vizsgáljuk bizonyos korcsoportbeli férfiak testmagasságát. Ez esetről esetre véletlenszerűen ingadozik. Nincs értelme azt kérdezni, mi a vsz., hogy egy vizsgált egyén magassága *pontosan* 172 cm, ilyen eset talán egy sem lesz, s így relatív gyakoriságot is nehéz volna megadni. Sokkal több értelme van azt kérdezni, mi a vsz., hogy egy vizsgált egyén magassága *kisebb* 172 cm-nél ($\approx$ e. f.). Erre már bőven lesz adat, relatív gyakoriság s így (közelítőleg) vsz. is meghatározható. Általában is folytonos vsz. v.-nál az e. f. az egyetlen jellemző, amelyet a gyakorlattal kapcsolatba tudunk hozni. Ezért kell további vizsgálatainkban az e. f.-re támaszkodnunk.

c) **Valószínűségi változó absztrakt fogalma**

A Kolmogorov-féle axiómák alapján felépített vsz. számításban a vsz. v. definíciója a következő: Legyen adva egy vsz. algebra. Valamely, ebbeli eseménytér a elemeire értelmezett $\xi = \xi(a)$ függvényt vsz. v.-nak nevezünk, hogyha mindazok az a-k, amelyekre adott x-nél $\xi(a) < x$ beletartoznak eseményterünkbe. $\xi(a)$ minden a-hoz meghatározott számértéket rendel; ezek a számértékek általában bármilyenek lehetnek. ξ e. f.-ének itt is az $F(x) = \mathrm{P}(\xi(a) < x)$ függvényt nevezzük. Részletezésre nem térhetünk ki. Kolmogorov-féle megfogalmazásban a fenti példa így kezdődnék: Eseményterünkben két elem van: E_1: („fej"), és E_2: („írás"). Értelmezzük a $\xi(a)$ függvényt ($a = E_1; E_2$), így: $\xi(E_1) = 0$, $\xi(E_2) = 1$. Ezt a $\xi(a)$-t diszkrét vsz. v.-nak nevezzük. — Második példánkhoz is könnyen megadható a Kolmogorov-féle megfogalmazás.

d) **Eloszlásfüggvények tulajdonságai**

Egy $F(x)$ e. f. legfontosabb tulajdonságai a következők:

1. $F(x)$ monoton nem csökkenő függvény, vagyis $F(x_1) \leqq F(x_2)$, ha $x_1 \leqq x$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ (= az e. f. balról folytonos).*

Megjegyezzük, hogy az e. f. *nem határozza meg egyértelműen* a vsz. v.-t.

Az e. f.-ek grafikonját majd még tanulmányozzuk. Addig is megjegyezzük, hogy egy e.f. nem szükségképpen folytonos; diszkrét vsz. v. e. f.-e pl. ún. lépcsős függvény.

* Megjegyezzük, hogy egy ξ vsz. v. e. f.-ét sokszor $F(x) = \mathrm{P}(\xi \leq x)$-szel is definiálják. Az ittenihez képest ez a definíció csak annyi eltérést von maga után, hogy $F(x)$ *jobbról* lesz folytonos; az e. f. összes többi tulajdonságai változatlanul megmaradnak.

e) **Valószínűség-eloszlás**

Diszkrét vsz. v.-t e. f.-én kívül másképp is jellemezhetünk: Ha a ξ vsz. v. összes lehetséges értékei $x_1, \ldots, x_n$, a $p_k = \mathbf{P}(\xi = x_k)$ értékekkel szintén megadható az egyes eredmények fellépésének vsz.-e; (itt $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$). *Ezek összességét a ξ-hez tartozó* **valószínűség-eloszlásnak** *(rövidítve* vsz. e.*) nevezzük,* vagy — kissé pontatlanul — ξ (vsz.) eloszlásának (rövidítve: e); ezt a vsz. e.-t így is jelölik: $(p_1, \ldots, p_n)$.

Ezek a p_i-k a ξ-hez tartozó lépcsős e. f. ugrásainak értékei. Diszkrét vsz. v.-t a gyakorlatban általában vsz. e.-ával jellemezünk. Azt, hogy $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, minden vsz. e.-nál szem előtt kell tartanunk. A definíciót értelemszerűen kiterjesztjük végtelen sok $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ és p_k esetére is.

f) **Valószínűség-sűrűségfüggvény**

Ha egy $F(x)$ e. f. legfeljebb végesszámú pont kivételével differenciálható, és deriváltja szakaszonként folytonos (= $F(x)$ szakaszonkénti *sima*), az $f(x) = \frac{dF}{dx}$ *függvényt az* $F(x)$ *e. f.-hez tartozó (valószínűség)* **sűrűségfüggvénynek** *(rövidítése:* s. f.*) nevezzük.* $F(x)$ valamilyen ξ vsz. v.-hoz tartozott; szokták azt is mondani, hogy $f(x)$ ξ s. f.-e. (Azt is mondják — helytelenül —, hogy ξ $F(x)$ eloszlású, ξ eloszlása $F(x)$, de ez — tekintettel a fenti vsz. e.-ra — félreértésre adhat alkalmat.)

Világos, hogy $f(x)$ sohasem negatív és nem is okvetlenül korlátos.

Egy ξ vsz. v. $F(x)$ e. f.-e segítségével könnyen kifejezhető az $A : (a \leqq \xi < b)$ esemény vsz.-e is:

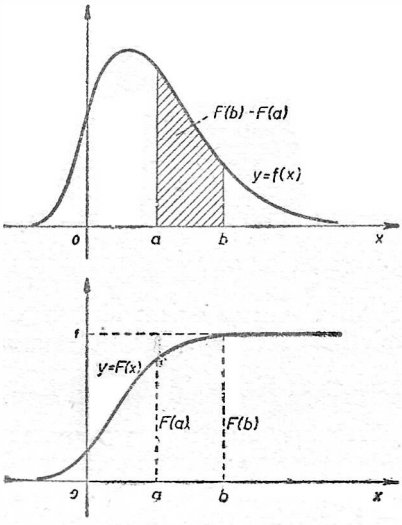
$$\mathbf{P}(a \leqq \xi < b) = F(b) - F(a)$$

amit a Stieltjes-integrál segítségével $\int_a^b dF(x)$ alakban is írhatunk (speciálisan: $\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$). Látható, hogy ha x folytonossági pontja $F(x)$-nek, $\mathbf{P}(\xi = x) = 0$.

Sűrűségfüggvény létezésekor egy függvény és deriváltja összefüggése alapján $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$. Speciálisan: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$. Ebből is következik, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ $(= F(\infty) - F(-\infty))$.

Ha $b - a = \Delta a$ és $F'(x) = f(x)$ az a helyen *folytonos*, a középértéktétel szerint $F(b) - F(a) = F(a + \Delta a) - F(a) = F'(a)\,\Delta a + o(\Delta a) = f(a)\,\Delta a + o(\Delta a)$. Közelítőleg tehát (ha Δa kicsi) $\mathbf{P}(a \leqq \xi < a + \Delta a) \approx f(a)\,\Delta a$ (pontosan pedig: $\lim_{\Delta a \to 0} \frac{\mathbf{P}(a \leqq \xi < a + \Delta a)}{\Delta a} = f(a)$). Ezt az összefüggést mind a klasszikus, mind a mai valószínűségszámítási gyakorlat gyakran használja, pl. egy vsz. v. s. f.-e meghatározásánál (s. f. exisztenciájának megállapítására is felhasználható).

Ez egyszersmind új értelmezést ad a s. f.-re: $f(a)\,\Delta a$ kis Δa-nál kb. annak a vsz., hogy ξ értéke a és $a + \Delta a$ közé essék (feltéve, hogy $f(x)$ az a helyen folytonos), s $\Delta a \to 0$. Vsz. v.-k bevezetésekor általában igyekszünk e. f.-üket, illetve s. f.-üket meghatározni. Analitikus kezelés szempontjából a s. f.-nek sok előnye van, ezért elsősorban ezt igyekszünk mindig megállapítani. — S. f.-t és hozzá tartozó e. f.-t mutat be a 12. ábra.



12. ábra

Egy ξ vsz. v. e. f.-ét (s. f.-ét) a gyakorlatban így állapítjuk meg: Megvalósítjuk azt a kísérletet, amelynek kimenetelét ξ jellemzi. Sok kísérletet végezve, ezek eredményeit regisztráljuk (= valamit „mérünk"). (Ezek a ξ egyes értékei.) Tekintjük ezen értékek relatív gyakoriságát az összes kísérletszámon belül. Az e. f.-t úgy rajzoljuk fel, hogy egyre növekvő x-ekre felrakjuk, mennyi volt a relatív gyakorisága azon mérési adatoknak, amelyek $< x$. Nyilván egy lépcsős függvényt kapunk, amelyet általában jól közelíthetünk egy folytonos görbével. Utóbbi volna közelítőleg ξ e. f.-ének görbéje is, s ennek deriváltgörbéje közelítőleg ξ s. f.-e. A s. f.-t közelítőleg így is megkaphatjuk, hogy az adatok teljes változási tartományát egyenlő szakaszokra osztjuk — (x_k, x_{k+1}) —, és ezen intervallum közepében felrakjuk azon adatok r relatív gyakoriságát, amelyek épp (x_k, x_{k+1})-be estek. Így nyilván ξ s. f.-e közelítését kapjuk, pontokból. (x_k, x_{k+1}), és r alappal és magassággal téglalapokat is rajzolhatunk pontok helyett, így kapjuk az ún. *hisztogrammot*. Általában jobb az e. f.-t közelítő lépcsős függvényt felrajzolni. Ha vsz. e.-ról van szó, összeadjuk, hogy a különféle mérési adatok mily relatív gyakorisággal lépnek fel, s ezt rajzoljuk fel, minden adatértékhez külön-külön (E. f.-t itt is a fenti módon készíthetünk.) — Példa: Azonosnak készített csapágygolyók átmérője a valóságban vsz. v.; ennek e. f.-ét így vesszük fel közelítőleg: lemérjük pl. 1000 db átmérőjét, mozogjon az 5 mm körül. Sorjában megszámoljuk, hány van $< 4{,}8$; $< 4{,}9$; < 5; $< 5{,}1$; $< 5{,}2$ é. i. t. mm átmérővel. Ezek számát az 1000-hez viszonyítva, a kapott relatívgyakoriság-értékeket felrakjuk egy koordinátarendszer $4{,}8\,, \ldots$ pontjaiban. Ezekkel a pontokkal megszerkesztjük az említett lépcsős függvényt, azt folytonos görbével közelítjük, stb., stb., ahogy fentebb leírtuk. Diszkrét vsz. v. esetén ugyanez az eljárás.

g) Valószínűségi vektor. Többdimenziós eloszlásfüggvények

Ha egy n dimenziós $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vektor komponensei egyazon vsz. algebrán értelmezett vsz. v.-k, $\vec{\xi}$-t n-dimenziós **vsz. vektornak** *nevezzük, és* **eloszlásfüggvényén** *az $F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n)$ függvényt értjük.** Utóbbi s. f.-ének az $f(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\partial^n F}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ függvényt nevezzük, amennyiben ez létezik, és ha bizonyos feltételek teljesülnek — pl. elégséges, ha a parciális derivált szakaszonként folytonos. Annak a vsz.-e, hogy $\xi_1 x_1$

* Eseményszorzat szerepel! Ezt itt csak vesszővel tudjuk jelölni!

és $x_1 + \Delta x_1$ közé, ..., ξ_n x_n és $x_n + \Delta x_n$ közé esik, vagyis $\mathbf{P}(x_1 \leqq \xi_1 < x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n \leqq \xi_n < x_n + \Delta x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)\,\Delta x_1 \cdots \Delta x_n + o(\Delta x_1 \cdots \Delta x_n)$, ha a függvény az $(x_1, \ldots, x_n)$ pontban folytonos, vagyis

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0} \frac{\mathbf{P}(x_1 \leqq \xi_1 < x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n \leqq \xi_n < x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_1 \cdots \Delta x_n} = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Ezt az értelmezést is sokszor használjuk a s. f. meghatározásánál is. $\mathbf{P}(x_1 \leqq \xi_1 < x_1 + \Delta x_1, \ldots)$, tehát igen kis Δx_i-knél $\approx f(x_1, \ldots, x_n)\,\Delta x_1 \cdots \Delta x_n$. Közepes Δx_i-k esetére itt nem térhetünk ki.

Többdimenziós vsz. eloszlásról is beszélhetünk; kétdimenziósnál pl. adva vannak bizonyos, egyazon vsz. algebrán értelmezett ξ és η vsz. v.-k, amelyek az $x_1, x_2, \ldots$, illetve $y_1, y_2, \ldots$ értékeket vehetik fel, és $\mathbf{P}(\xi = x_i,\ \eta = y_k) = p_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$. Úgy is felfoghatjuk a dolgot, hogy a (ξ, η) vsz. vektor csak az (x_i, y_k) pontokba mutathat. *A p_{ik}-k összessége* **kétdimenziós vsz. eloszlást** *képvisel*, amely jellemzi ξ és η $(= (\xi, \eta))$ változásait (*(ξ, η) vsz. eloszlása* — szoktuk mondani). (Hasonló a definíció több vsz. v.-nál.)

Valamely kísérlet kimenetelét jellemző n különböző, véletlen adat mindig felfogható egy $\vec{\xi}$ (vsz.) vektor n komponenseként. Ha a $\vec{\xi}$-nak nincs külön értelme, $F(x_1, \ldots, x_n)$-t a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k *együttes* e. f.-ének is nevezhetjük. Mondhatjuk azt is, hogy $F(x_1, \ldots, x_n)$ ***n*-dimenziós e. f.**

Többdimenziós e. f.-nek fontosabb tulajdonságai:

1. $F(x_1, \ldots, x_n)$ minden változójában monoton nem csökkenő függvény.
2. $F(x_1, \ldots, x_n)$ minden változójában balról folytonos.
3. $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, ha legalább egy $x_i = -\infty$ $(i = 1, \ldots, n)$.
4. $F(x_1, \ldots, x_n) = 1$, ha $x_i = +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
5. Ha az $f(x_1, \ldots, x_n)$ s. f. létezik és folytonos,

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n.$$

Speciálisan $x_i = \infty$ esetén ebből következik $(i = 1, \ldots, n)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n = 1.$$

Ha T az n-dimenziós tér egy tartománya.

$$\mathbf{P}(\vec{\xi} \in T) = \int \cdots \int f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n = 1,$$

ahol az integrál a T tartományra terjesztendő ki. T-t sokszor a koordináták közti valamilyen összefüggés (pl. $y_1^2 + \ldots + y_n^2 = \text{konst}$; $y_1 + \ldots + y_n < x$ stb.) definiálja, ekkor a $\mathbf{P}(\vec{\xi} \in T)$-t szolgáltató integrál a $(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = \text{konst})$, illetve $(\xi_1 + \ldots + \xi_n < x)$ (a ξ_i-kre felírt) összefüggés vsz.-ét jelenti; T ilyen definiálása persze az integrál kiszámítása módjára is kikötést jelent.

h) **Feltételes eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény**

Legyen ξ vsz. v. és A valamilyen esemény abból a vsz. algebrából, amelyen ξ-t értelmeztük ($\mathbf{P}(A) \neq 0$). *ξ-nek az A-ra vonatkozó* **feltételes e. f.-e definíciószerűen** a $\mathbf{P}(\xi < x \mid A)$ *függvény, amelyet* $F(x \mid A)$*-nak is írunk.*

Ha $F(x \mid A)$ differenciálható, értelemszerűen beszélhetünk az $f(x \mid A)$ **feltételes sűrűségfüggvényről.**

(A következőkben a limesek stb. létezését hallgatólagosan mindig feltesszük.) Folytonos ξ vsz. v. esetén $\mathbf{P}(A \mid \xi = x)$-et a

$$\mathbf{P}(A \mid \xi = x) = \lim_{h \to 0} \mathbf{P}(A \mid x \leqq \xi < x + h)$$

limesszel definiáljuk, ha utóbbi létezik. Ha létezik az $f(x \mid A)$ feltételes s. f. és $f(x) \neq 0$,

$$\mathbf{P}(A \mid \xi = x) = \mathbf{P}(A)\, f(x \mid A)/f(x)$$

amiből

$$\mathbf{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(A \mid \xi = x) f(x)\, dx$$

(ez analóg a teljes vsz. tételével).

Legyen ξ, illetve η egyazon vsz. algebrán értelmezett folytonos vsz. v., $F(x)$, illetőleg $G(x)$ e. f.-nyel, (s. f.-eik $f(x)$, illetve $g(x)$). Legyen ξ és η együttes e. f.-e $H(x, y)$, $h(x, y)$ s. f.-nyel. Feltesszük, hogy $h(x, y)$ folytonos. $F(x \mid y)$-t, ξ **feltételes e. f.-ét** $\eta = y$ **feltétel mellett** az

$$F(x \mid y) = \mathbf{P}(\xi < x \mid \eta = y)$$

összefüggéssel **definiáljuk.** ξ feltételes s. f.-én ugyanezen feltétel mellett $\frac{d}{dx} F(x \mid y) \equiv$ $\equiv f(x \mid y)$-t értjük.

Ezen függvények között a következő összefüggések állnak fenn (vö. a feltételes valószínűségre megállapítottakkal!):

1.
$$f(x \mid y) = h(x, y)/g(y)$$

2. (ξ és η szerepét felcserélve a jelölések értelemszerű alkalmazásával)

$$g(y \mid x) = h(x, y)/f(x)$$

3.
$$f(x \mid y) = g(y \mid x)\, f(x)/g(y)$$

4. $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y \mid x) f(x)\, dx$, illetőleg $g(y)$ e. f.-ére:

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y \mid x) f(x)\, dx$$

(vö. teljes vsz. tétele).

5.

$$f(x|\,y) = g(y\,|\,x)\,f(x) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} g(y\,|\,x) f(x)\,dx$$

(vö. BAYES-tétel). — E.f. (s.f.)-ek tulajdonságai a feltételes e.f. (s.f.)-ekre is igazak!

Megjegyezzük, hogy adott esetben itt is bevezethetünk Stieltjes-integrálokat, és hogy mindezek könnyen kiterjeszthetők több változó esetére is.

i) **Valószínűségi változók függetlensége**

Események függetlenségének definíciójából könnyen értelmezhetjük vsz. v.-k függetlenségét. Legyen a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k együttes e. f.-e $F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n)$, az egyes vsz. v.-ké pedig $F_i(x_i) = \mathbf{P}(\xi_i < x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. $\xi_1, \ldots, \xi_n$*-et* $(n \geqq 2)$ *(teljesen, összességükben)* **függetlennek** *nevezzük, ha* $x_1, \ldots, x_n$ *minden valós értékére*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n).$$

Végtelen sok vsz. v.-t akkor nevezünk függetlennek, ha bármiképp választva ki közülük k-t $(k = 1, 2, \ldots)$, ez utóbbiak függetlenek. Mindegyik esetben értelemszerűen definiáljuk vsz. v.-k *páronként* való függetlenségét.

j) **Tételek valószínűségi változók függetlenségéről**

Vsz. v.-k függetlenségével kapcsolatban a következő tételek mondhatók ki:

1. Ha a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k függetlenek, és $h_1(x), \ldots, h_n(x)$ tetszőleges monoton függvények, akkor az $\eta_1 = h_1(\xi_1), \ldots, \eta_n = h_n(\xi_n)$ vsz. v.-k is függetlenek.

2. Ha a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k *függetlenek*, és mindegyiknek létezik s. f.-e, akkor a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ együttes s. f.-e, $f(x_1, \ldots, x_n)$ is létezik, és

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$$

ahol $f_i(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ ξ_i s. f.-ét jelenti. Megfordítva, az összefüggés fennállásából a vsz. v.-k függetlensége már következik. *Ha tehát az egyes s. f.-ek léteznek, ez az összefüggés is felhasználható vsz. v.-k függetlensége definíciójául.*

3. Legyenek a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k függetlenek, és legyen $h(x_1, \ldots, x_k)$ tetszőleges függvény $(k < n)$. A $h(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k szintén függetlenek lesznek, ha fennáll valamelyik alábbi eset:

$\alpha)$ a ξ_k-k diszkrét vsz. v.-k.

$\beta)$ ξ_k-nak $(k = 1, \ldots, n)$ létezik az $f_k(x_k)$ s. f.-e, továbbá $h(x_1, \ldots, x_k)$ folytonos.

A vsz. e. f. és s. f.-ek, valamint e.-ok gyakorlati értéke világos: minden velük kapcsolatos kijelentés egyúttal bizonyos események vsz.-ét is jelenti. Események vsz.-ének pedig már ismerjük a gyakorlati értékét, így tehát csak ezt kell az adott esetre „lefordítanunk".

Megjegyezzük a következőket: Éppúgy, mint a 2. §-ban az eseményeknél, itt is mindig kikötöttük, hogy a szereplő vsz. v.-k egyazon vsz. algebrán vannak értelmezve.

Ha a vsz. v.-k több egymást nem befolyásoló kísérletből eredő eseményekhez vannak eredetileg rendelve, itt is egyesítenünk kell a kísérleteket új kísérletté, hogy egyetlen vsz. algebra szerepeljen. Lényegileg ugyanaz a helyzet, mint a 2. § hasonló megállapításainál: A szükséges vsz. algebra mindig megalkotható, s így mindig elérhető, hogy a szereplő vsz. v.-k egyazon vsz. algebrán legyenek értelmezve. Az új vsz. algebra megalkotásakor a részletkísérletek eredményeihez rendelt vsz. v.-k függetlenek lesznek. Mivel pedig a komponensek függetlensége esetén egy vsz. vektor e. f.-e kifejezhető az egyes komponensek e. f.-eivel, a részkísérletekhez tartozó vsz. v.-k e. f.-eivel kifejezhetjük a teljes kísérlet eredményeit jellemző (a részkísérleteknél szereplő vsz. v.-kal megalkotott) vsz. vektor e. f.-ét is. Mindezeket persze nem vizsgáljuk meg minden egyes feladatunk megoldásánál, bár ez mindig elvégezhető. Igen tanúságos, ha pár esetben az olvasó megteszi ezt.

k) **Komplex valószínűségi változó**

Ha ξ és η valós vsz. v.-k, a $\zeta = \xi + i\eta$ mennyiséget **komplex** *értékű* **vsz. v.**-*nak nevezzük.* Értékkészlete különböző eloszlásainak vsz.-ét a (ξ, η) vsz. vektor e. f.-évei jellemezzük. Két komplex vsz. v. független, ha a megfelelő vsz. vektorok függetlenek (= az egyik komponensei függetlenek a másikéitól). (Hasonlóan többre is.) Valós vsz. v.-k komplex értékű függvényei (mint komplex vsz. v.-k) függetlenségére ugyanolyan tételek igazak, mint valós függvényei függetlenségére.

Példák és feladatok

1. $t = 0$ időponttól kezdve figyeljük egy rádioaktíva nyag atomjainak elbomlását, különösen az első bomlás felléptét. Jellemezzük ez utóbbi (véletlen) eseményt vsz. v.-val.

Megoldás. Legyen az első elbomlás időpontja ξ; feltevésünk szerint ez vsz. v. ($\xi \geqq 0$). Ha $\mathbf{P}(\xi < t) \equiv F(t)$ $(t > 0)$-t ismerjük, jellemeztük a szereplő véletlen eseményt. $F(t)$ ξ e. f.-e is lesz, ha még hozzávesszük a triviális $F(t) \equiv 0$ $(t \leqq 0)$ kiegészítő feltételt.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy e. f.-nek a 3. § *d)* 1., 2. és 3. alatt felsorolt tulajdonságai vannak.

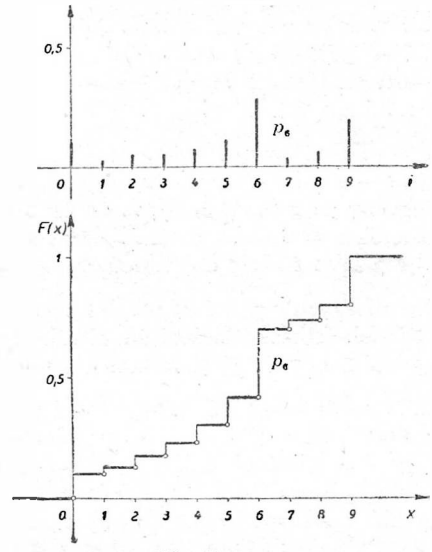
Megoldás. 2. és 3. $F(x)$ definíciójának egyszerű folyománya. 1. bizonyítása: Ha $F(x)$ valamely ξ vsz. v. e. f.-e, definíció szerint $F(x_1) = \mathbf{P}(\xi < x_1)$ és $F(x_2) = \mathbf{P}(\xi < x_2)$. Legyen $A : (\xi < x_1)$, $B : (\xi < x_2)$. Nyilván $A \subset B$, és így a 2. § 8. pl. szerint $\mathbf{P}(A) \leqq \mathbf{P}(B)$, és ebből már következik állításunk.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha ξ e. f.-e $F(x)$ $\mathbf{P}(a \leqq \xi < b) = F(b) - F(a)$.

Megoldás. Legyen $A : (a \leqq \xi < b)$, $B : (\xi < b)$, $C : (\xi < a)$. Nyilván $A + C = B$, $AC = 0$, és így $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(B)$, amiből állításunk már következik.

4. A 2. § 17. fel. feltételeit egyszerűsítsük le: A hívó fél az $(1, 2, 3, 4, 3, k)$ $(k = 0, \ldots, 9)$ számok egyikét tárcsázza; annak a vsz., hogy épp $(1, 2, 3, 4, 3, i)$-t tárcsáz, legyen p_i, $(\sum_{i=0}^{9} p_i = 1)$. Vezessünk be a szóban forgó véletlen esemény jellemzésére egy vsz. v.-t, és állapítsuk meg ennek vsz. e.-át, illetve az e. f.-ét.

Megoldás. Jellemezze a tárcsázott szám utolsó jegyét a ξ vsz. v., és legyen $\xi = i$, ha az utolsó jegy i volt, ha tehát a tárcsázott szám $(1\,2\,3\,4\,3\,i)$, $(i = 0, \ldots, 9)$. (Vehettünk volna természetesen pl. $\xi = i^n$-t is, ekkor is egy szám jellemez minden véletlen eseményt.) A feladat feltételeiből $\mathbf{P}(\xi = i) = p_i$. Legegyszerűbb ábrázolni ξ vsz. e.-át (13. ábra); ugyanezen látható ξ e. f.-e, $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{i<x} p_i$-nek a grafikonja is. Ez tiszta lépcsős függvény; látható, hogy balról folytonos, monoton, nem csökkenő és $F(\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$. *Az itteni vsz. e., illetve e. f. diszkrét vsz. v.-k szempontjából tipikus.*



13. ábra

5. Hogyan fejezhetjük ki vsz. v. segítségével legegyszerűbben azt, hogy egy A esemény bekövetkezik, illetve nem következik be? Mi lesz az így bevezetett vsz. v. vsz. e.-a?

Megoldás. Definiáljuk a ξ vsz. v.-t a következőképpen: Legyen $\xi = 1$, ha A bekövetkezik, és $\xi = 0$, ha nem. Ezzel a jelöléssel $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\xi = 1)$, $\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\xi = 0)$; a vsz. e. képe a $(0, \mathbf{P}(\bar{A}))$ és $(1, \mathbf{P}(A))$ pontokból áll. Így tehát minden véletlen eseményhez hozzárendelhetünk egy vsz. v.-t, amelyet az A eseményhez tartozó *karakterisztikus változónak* nevezünk. A 2. §-ban mondottak karakterisztikus változókra is megfogalmazhatók; a tárgyalás azonban az ott közölt módon az egyszerűbb. A jövőben mindig a legkényelmesebb tárgyalásmódot fogjuk választani.

6. Egy villanyóra, amelynek percenként ugrik a mutatója, $3^h\,30^m$-et mutat. Találomra ránézünk az órára; az a η *időtartam*, amelyen át várnunk kell a következő mutatóugrásig (más időközlés híján), vsz. v. lesz. Mi lesz η e. f.-e, ha feltesszük, hogy a ránézés *időpontja*, ξ egyenlő vsz.-gel eshet a $(3^h\,30^m, 3^h\,31^m)$ időintervallum bármely elemi $\Delta t = 1/n$ szakaszába (n egész).

Megoldás. Nyilván $3^h\,30^m \leqq \xi < 3^h\,31^m$. Feltevéseinkből következik, hogy ha $3^h\,30^m \leqq k \cdot \Delta t < (k+1)\,\Delta t \leqq 3^h\,31^m$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ $\mathbf{P}(k\,\Delta t \leqq \xi < (k+1)\,\Delta t) = 1/n$ (a klasszikus kiszámítási mód alapján). Ez azonban $= \Delta t$. Osszuk mindkét oldalt Δt-vel. Ha most $\Delta t \to 0$ és $k, n \to \infty$, úgy, hogy $k\,\Delta t = t$ (fix), és $n\,\Delta t = 1$, a bal oldal ξ s. f.-éhez, $f(t)$-hez tart; a jobb oldal azonban 1, vagyis $f(x) = 1$, ha $3^h\,30^m < x \leqq 3^h\,31^m$; egyébként $= 0$. Így tehát ξ s. f.-e az előbbi intervallumon konst $(= 1)$, egyébként 0. E helyett a meggondolás helyett röviden azt is mondják: annak a vsz., hogy ξ valamely $(t, t + \Delta t)$-be essék, $=$ konst $\cdot\, \Delta t$ (t-től függetlenül). Ez ekvivalens az itteni megfogalmazással. Az itteni ξ-ról azt mondjuk, hogy (bizonyos intervallumon) *egyenletes eloszlású* vsz. v. Erről még lesz szó. — A következő mutatóugrásig $1 - \xi = \eta$ ideig kell várni. Mivel ξ Δt vsz.-gel eshetett a szóbanforgó 1^m-en belül bármely Δt időintervallumba, η is Δt vsz.-gel eshet a $(0, 1^m)$ intervallumon belül bármely Δt időintervallumba, vagyis η s. f.-e $f(y) = 1$ $(0 < y \leqq 1)$, egyébként 0.

Ebből η e. f.-e, $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(v)\,dv = 0$, ha $y \leqq 0$; y, ha $0 < y \leqq 1$; 1, ha $y > 1$. Vegyük észre, hogy az egész levezetés sarkalatos pontja, hogy ξ *egyenlő vsz.-gel* eshet bármely Δt-be!

7. Annak az illusztrálására, hogy bukkannak fel elméleti vizsgálatokban e. f.-ek (s. f.-ek), bemutatjuk a következő problémát: Egy pont ω szögsebességgel r sugarú körpályán mozog. Találomra megvilágítjuk pályasíkjával párhuzamos fénynyalábbal: vetületének helye vsz. v. lesz. Állapítsuk meg ennek a s. f.-ét, ha annak a vsz., hogy a vetület $(x, x + \Delta x)$ intervallumba essék, igen kis Δx-ekre ($o(\Delta x)$ tagokat elhanyagolva) fordítva arányos a vetület sebességével ezen intervallumban, és egyenesen arányos a z intervallum hosszával.

8. Tegyük fel, hogy 1. annak a vsz., hogy egy személy (feltéve, hogy t-kor élt) a $(t, t + \Delta t)$ időtartam alatt meghal, $a(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$, ahol $a(t)$ folytonos nem negatív függvény ($t \geqq 0$, $\Delta t > 0$); 2. annak a vsz., hogy a halál a születés pillanatában beáll, érthetőleg $= 0$. Számítsuk ki annak a $q(t)$ vsz.-ét, hogy egy személy eléri a t életkort (= legalább t ideig elél), illetőleg a személy életkorának e. f.-ét.

9. Legyen egy x évet megért egyén halálának időpontja $x + \eta$, ahol η vsz. v. A 2. § 32. fel. felhasználásával állapítsuk meg η e. f.-ét és s. f.-ét. (Egyszerűség kedvéért engedjük meg, hogy η tetszőleges nagy értéket is felvehessen.)

10. A hullámmechanikában kimutatják, hogy az $U = 0$, ha $(0 < x < l)$; $U = \infty$, ha $x = 0$, $x = l$; $U = 0$, (egyébként) — potenciálgödörben levő korpuszkula Schrödinger-egyenletének sajátfüggvényei (az energiájára jellemző kvantumszámtól függően): $\psi_n(x) = C \cdot \sin(n\pi x/l)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (C konst). Mi lesz annak a vsz.-e, hogy egy mérés a korpuszkulát a $(0, x)$ $(0 < x < l)$ intervallumban találja, ha annak a vsz.-e, hogy $(x, x + \Delta x)$-ben lesz, $(0 < x < l)$, $|\psi_n(x)|^2\,\Delta x + o(\Delta x)$?

11. Valamely ξ vsz. v. s. f.-e $f(x) = a/(e^x + e^{-x})$. Határozzuk meg 1. az a konst értékét és 2. annak a vsz.-ét, hogy a ξ-re két független megfigyelést végezve, mindegyik esetben $\xi < 1$ lesz.

12. Ha a $\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k együttes e. f.-e $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, és együttes s. f.-ük is létezik, mi lesz ξ_i e. f.-e (s. f.-e)? $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Megoldás. Csak a $\mathbf{P}(\xi_i < x_i) = F_i(x_i)$ érdekel bennünket, a többi vsz. v.-ra nincs megkötés, csak a triviális $\xi_k < \infty$ $(k \neq i)$, így $F_i(x_i) = F(\infty, \ldots, x_i, \ldots \infty)$.

Ha létezik $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s. f., $F_i(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{x_i} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_n$,

és az ehhez tartozó $f_i(x_i)$ s. f. $= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_{i-1}\,dx_{i+1} \cdots dx_n$.

Ezek a többdimenziós e. f. (s. f.) egydimenziós *vetületei*, amelyek maguk is e. f.-ek (s. f.-ek). Az előbbiek alapján kapjuk meg több vsz. v. együttes e. f.-ből (s. f.-ből) *valamelyik* e. f.-ét (s. f.-ét). Mindez több (de n-nél kevesebb) vsz. v.-ra is értelemszerűen kiterjeszthető. Az előbbiek elvének alkalmazásával állapítható meg n *diszkrét* vsz. v. többdimenziós vsz. eloszlása alapján ezek közül egy (több) vsz. v. eloszlása is (vö. 3. § 14. fel.).

13. Két érmét dobálunk; legyen a fej vsz.-e mindegyiknél 0,5. Az első érme „fej"-ét jelölje a ξ vsz. v. 1 értéke, „írás"-át 0 értéke. Hasonlóan a másik érme kétféle eredményét fejezze ki az η vsz. v. 1, illetve 0 értéke. Állapítsuk meg ξ és η együttes vsz. eloszlását, ha a két érmedobálás független.

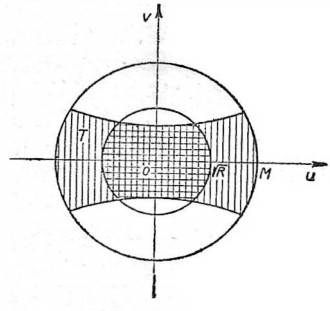
Megoldás. Mivel ξ és η függetlenek, pl. $\mathbf{P}(\xi = 0, \eta = 0) = \mathbf{P}(\xi = 0)\ \mathbf{P}(\eta = 0) = 0{,}5^2 = 0{,}25$. Hasonlóan $\mathbf{P}(\xi = 0, \eta = 1) = \mathbf{P}(\xi = 1, \eta = 0) = \mathbf{P}(\xi = 1, \eta = 1) = 0{,}25$. Felrajzolva ez a vsz. eloszlás a (ξ, η) sík megfelelő pontjai felett 0,25 magasságban elhelyezkedő diszkrét pontokból állana. E. f.-e kétdimenziós lépcsős függvény lenne.

14. Bizonyos fajta csövek ellenőrzésénél a falvastagság értékének az előírttól való eltérése az x_1 vagy x_2 vagy x_3, a körkeresztmetszettől való eltérés pedig y_1 vagy y_2 vagy y_3-mal jellemezhető (a műszer csak bizonyos — bár igen kis — lépésekben méri a vastagságot, vagyis diszkrét értékeket ad meg, s így a hiba is diszkrét értékeket vehet csak fel). Nagymennyiségű cső adatainak ellenőrzése után az egyes eltérések relatív gyakoriságaiból a következő vsz.-eket adják meg a falvastagság ξ hibájára és a körkeresztmetszettől való eltérés η jellemzőjére:

$\mathbf{P}(\xi = x_1, \eta = y_1) = 0{,}02$	$\mathbf{P}(\xi = x_2, \eta = y_1) = 0{,}04$	$\mathbf{P}(\xi = x_3, \eta = y_1) = 0{,}05$
$\mathbf{P}(\xi = x_1, \eta = y_2) = 0{,}04$	$\mathbf{P}(\xi = x_2, \eta = y_2) = 0{,}10$	$\mathbf{P}(\xi = x_3)\ \eta = y_2) = 0{,}16$
$\mathbf{P}(\xi = x_1, \eta = y_3) = 0{,}04$	$\mathbf{P}(\xi = x_2, \eta = y_3) = 0{,}26$	$\mathbf{P}(\xi = x_3, \eta = y_3) = 0{,}29$

a) Ellenőrizzük, lehetnek-e valóban vsz. e.-k tagjai a közölt számok. Milyen lesz a szereplő kétdimenziós vsz. e., illetve (ξ, η) e. f.-ének képe? *b)* Számítsuk ki $\mathbf{P}(\xi = x_2)$ és $\mathbf{P}(\eta = y_3)$-at. *c)* Számítsuk ki $\mathbf{P}(\xi = x_2 \mid \eta = y_3)$-at.

15. Az égi mechanikában kimutatják a következőket: Legyen a naptól r távolságban egy üstökössokaság. Legyenek egy ebbe tartozó üstökös sebességkoordinátái ξ, η, ζ; ezek üstökösről üstökösre mások; feltehető, hogy vsz. v.-k $f(u, v, w)$ együttes s. f.-nyel. Kimutatható, hogy *látható* üstökös (ξ, η, ζ) „sebességpontja" a *sebességtérben* elhelyezkedő $-R^2u^2 + (1 - R^2)v^2 + (1 - R^2)w^2 = R^2(1 - R)$ $(R = 2/r)$ egyköpenyű forgási hiperboloid belsejében van. Egy ellipszis-pályán mozgó látható üstökös sebességpontja e mellett még benne van az origó körül $\sqrt{R}$ sugárral írt gömbben is. (Metszetben (14. ábra): a látható üstökösök $\equiv$, ezek közül az ellipszis-pályán mozgók pedig a $\#$ térrészben vannak.) Ha feltesszük, hogy $f(u, v, w) = f(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}) = f(\omega)$ és $\omega \leqq M$, mi annak a p_l vsz.-e, hogy találomra kiválasztott üstökös látható lesz?



14. ábra

Megoldás. Annak a vsz.-ét kell kiszámítanunk, hogy egy üstökös sebességpontja benne lesz a hiperboloid belsejéből egy M sugarú gömbbel kivágott T térrészben. Annak a vsz., hogy a sebességkoordináták (melyek vsz. v.-k) értékei $(u, u + \Delta u)$, $(v, v + \Delta v)$, $(w, w + \Delta w)$ közt lesznek, definíció szerint $\approx f(u, v, w)\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w$ (ha $\Delta u, \ldots$ igen kicsi) és így $p_l = \iiint_T f(u, v, w)\,du\,dv\,dw = \iiint_T f(u, v, w)\,d\Omega$ ($d\Omega$ a

térfogatelem az u, v, w koordinátarendszerben). További feladatunk már csak ennek az integrálnak a kiszámítása. Bevezetve az ω, Θ, φ térbeli polárkoordinátákat (Θ-t az u tengelytől számítjuk, φ a (v, w) síkban fekszik !), $p_l = \iiint_T f(\omega)\, \omega^2 \sin\Theta\, d\omega\, d\Theta\, d\varphi$. ω M-ig növekedhet. Tegyük fel, hogy az M sugarú gömb elmetszi a hiperboloidfelületet. Ekkor p_l két integrál összege, $p_l = p_1 + p_2$. p_1-et arra az $R/\sqrt{1+R} = B$ sugarú gömbre terjesztjük ki, amely belülről érinti a hiperboloidot, a másikat a fennmaradó térfogatra. Nyilván $p_1 = \int_0^B \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\omega)\, \omega^2 \sin\Theta\, d\omega\, d\Theta\, d\varphi = 4\pi \int_0^B f(\omega)\, \omega^2\, d\omega$. — p_2-nél tekintsük azt a térfogatelemet, amelyet egy ω és egy $\omega + \Delta\omega$ ($\Delta\omega$ kicsi) sugarú gömb metsz ki a hiperboloid belsejéből, $B < \omega < M$, $B < \omega + \Delta\omega < M$. Legyen ennek a nyílásszöge $\Theta = \beta$; akkor $p_2 = 2 \int_B^M \int_0^\beta \int_0^{2\pi} f(\omega)\, \omega^2 \sin\Theta\, d\omega\, d\Theta\, d\varphi$. β azonban függ ω-tól; $\cos\beta = u/\omega$. A hiperboloid egyenletéből azonban $u^2/\omega^2 = (1 - R^2)\,[1 - B^2/\omega^2]$, s így végül is $p_2 = 4\pi \int_B^M f(\omega)\, \omega^2 \left[1 - \sqrt{1 - R^2}\,\sqrt{1 - B^2/\omega^2}\right] d\omega$ lesz. Ha $M \leqq B$, p_2 nyilván elmarad.

16. A 3. § 15. pl. feltételei mellett mi a vsz., hogy találomra kiszemelt üstökös látható, és pályája ellipszis, illetve hiperbola lesz?

17. A 3. § 15. és 16. pl.-ban, illetve fel.-ban szereplő $f(\omega)$ s. f.-re Laplace különböző feltevéseket tett, majd ezek alapján kiszámította annak a vsz.-ét, hogy egy látható üstökös pályája ellipszis, illetve hiperbola. Az eredményt egybevetette azzal a tapasztalattal, hogy az akkor ismert, látható üstökösök túlnyomó része ellipszispályán mozgott. Mindebből azután az $f(\omega)$ s. f.-re következtetett. Ehhez az egybevetéshez az is szükséges volt, hogy az üstökösöket naprendszerünkkel együtt haladó testeknek tekinthesse (amint ezt az eddigiekben hallgatólagosan fel is tettük); ezt más vizsgálatok igazolták. Mindebből aztán az $f(\omega)$-ra következtetett Laplace. Induljunk ki Laplace egyik feltevéséből: $f(\omega) = K/\omega^2$ (K konst; $\omega \leqq M$ volt !) Tegyük még fel, hogy $\omega \geqq M_0$ (konst; amely M-hez képest igen kicsi), és ennek alapján határozzuk meg K-t, valamint annak a vsz.-ét, hogy egy észlelt üstökös ellipszispályán mozog.

18. Egy villamos a $(0, L)$ pályán mozoghat. Legyen (idealizált feltevés) $F(a, b)$ annak a vsz., hogy egy utas az a pont előtt száll fel, és a b pont előtt leszáll ($0 < a < b \leqq L$). Mi annak a vsz., hogy *a)* az utas valamely z pont elérése előtt száll fel ($0 < z < L$); *b)* z eléréséig biztosan leszáll; *c)* az utas áthalad a z ponton, vagy abban leszáll?

Megoldás. Legyen ξ és η a fel-, illetve leszállás helye, vsz. v. ($0 \leqq \xi < \eta < L$). Ekkor $F(a, b) = \mathrm{P}(\xi < a, \eta < b)$. Nyilván $a > b$-re ez 0. A keresett vsz.-ek: *a)* ekkor ξ-nek $< z$ kell lennie; η tetszőleges; a keresett vsz. tehát $\mathrm{P}(\xi < z, \eta < L) = F(z, L)$ (ez tulajdonképp ξ e. f.-e.) *b)* Ekkor η-nak $< z$-nek kell lennie, ξ-nek pedig $< z$-nek. A keresett vsz. $\mathrm{P}(\xi < z,\ \eta < z) = F(z, z)$. *c)* Nyilván $\mathrm{P}(\xi < z, z \leqq \eta < L)$-t keressük. Mivel $\mathrm{P}(\xi < z, \eta < L) = \mathrm{P}(\xi < z, \eta < z) + \mathrm{P}(\xi < z, z \leqq \eta < L)$ (a jobb oldal eseményei kizárják egymást), *a)* és *b)* alapján a keresett vsz. $F(z, L) - F(z, z)$.—Ezekre az utóbbi példákra az jellemző, hogy bennük bizonyos „kísérleti feltételek" alapján olyan összefüggéseket állítunk fel, amelyekből

azután le tudjuk vezetni az e. f.-t. Ez elég általános eljárás, persze az eredményt a valóságban ellenőrizni is kell.

19. Ha a 3. § 18. pl. szereplő függvények mind folytonosak és deriválhatók, mi a kapcsolat közöttük és annak a $p(x, y)\,\Delta y + o(\Delta y)$ vsz.-e között, hogy egy utas az $(y, y + \Delta y)$ helyen száll ki, feltéve, hogy az $(x, x + \Delta x)$ szakaszon szállt fel? $(x \leqq y < L$!)

20. Legyen ξ vsz. v. egy szövőgép hibátlan működésének időtartama és ξ s. f.-e, $f(x, \lambda) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ $(x \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$; $\lambda > 0)$. Tegyük fel, hogy λ-t véletlenkörülmények befolyásolják, vagyis maga is vsz. v., amely a és b közt változhat s s. f.-e $g(\lambda) = c/\lambda$ (c konst), ha $(a < \lambda \leqq b)$, egyébként 0. Mi lesz ezek után annak a vsz.-e, hogy a hibátlan működés időtartama $< x$.

Megoldás. $f(x, \lambda)$ feltételes s. f.; a „feltétel" s. f.-e pedig $g(\lambda)$. A teljes vsz. tételének megfelelő tétel szerint ekkor ξ s. f.-e $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda$, és a keresett vsz. ξ e. f.-e $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\, dy$. Mivel $\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, d\lambda = \int_{a}^{b} (c/\lambda) d\lambda = 1$-nek kell fennállnia, $c = 1/\log(b/a)$, és $\varphi(x) = \int_{a}^{b} \frac{e^{-x\lambda}\, d\lambda}{\log(b/a)} = (e^{-ax} - e^{-bx})/x \log(b/a)$. $\Phi(x)$ kiszámításánál 0-tól x-ig kell csak integrálnunk, az eredmény végtelen sorral fejezhető csak ki. — $\varphi(x)$ tulajdonképp ún. *keverék s. f.* is; ezekkel a 6. §-ban még találkozunk.

21. A 0 pontban elhelyezett lövegből lövéseket tesznek az abszcisszatengelyen levő l hosszúságú célra. A cél középpontjának ξ helye az abszcisszatengelyen vsz. v. (pl. hajóról van szó), $\varphi(x)$ s. f.-nyel. A lövedék becsapódása η helyének (szintén vsz. v.) s. f.-e, azon feltétel mellett, hogy a t koordinátájú pontba céloztak, $\Psi(y, t)$. Mi a vsz., hogy a lövedék a t pontba célzáskor eltalálja a célt, ha ξ és η függetlenek?

Megoldás. Annak a vsz., hogy amidőn t-be céloztak, a lövedék y és $y + \Delta y$ közt csap le, és ugyanakkor eltalálja a célt is (a cél középpontja legfeljebb $l/2$ távol van a becsapódás helyétől jobbra vagy balra) $= \mathbf{P}(y \leqq \eta < y + \Delta y)\, \mathbf{P}(y - l/2 \leqq \xi < y + l/2)$. De ez $[\Psi(y, t)\, \Delta y + o(\Delta y)] \int_{y-l/2}^{y+l/2} \varphi(x)\, dx$. Mi annak a vsz.-ét keressük, hogy t-be célzáskor *bárhol* (= tetszőleges y-nál) való becsapódásnál talál a lövedék; ez nyilván $\int_{0}^{\infty} (\Psi(y, t) \int_{y-l/2}^{y+l/2} \varphi(x)\, dx)\, dy$.

22. A 3. § 14. fel. feltételei mellett igazoljuk, hogy ξ és η *nem függetlenek.*

23. Legyen a ξ és η vsz. v.-k együttes s. f.-e $f(x, y) = D \exp\,[-(A\, x^2 + 2B\, xy + C\, y^2)]$, ahol A, B, C olyan konstansok, hogy az exponens pozitív definit kvadratikus forma. Milyen feltételeknek kell fennállniok A, B és C-re, hogy ξ és η függetlenek legyenek?

Megoldás. A függetlenség szükséges és elégséges feltétele, hogy $f(x, y)$ előállítható legyen $f_1(x)\, f_2(y)$ alakban, ahol f_1, f_2 is s. f. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az exponensnek

$\Psi(x^1) + \Psi_2(y)$ alakúnak kell lennie; ez csak a $B = 0$ esetben állhat fenn, továbbá A és C-nek pozitívnek kell lennie, különben nem lehetne $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$. Ez utóbbi a pozitív definitségből már következik. Másrészt kell, hogy $D \exp(-A x^2) \cdot \exp(-C y^2)$ két s. f. szorzata legyen, ez pedig teljesül, mert fenn kell állania, hogy $D \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(A x^2 + C y^2)]\,dx\,dy = D \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A x^2)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-C y^2)\,dy = D\sqrt{\pi/A}\sqrt{\pi/C} = 1$, amiből $D = \sqrt{AC}/\pi$, és ha ezt a faktort úgy bontjuk szét, hogy $f(x, y)\ \sqrt{A/\pi}\exp(-A x^2) \cdot \sqrt{C/\pi}\exp(-C y^2)$ alakot öltsön, az így nyert két függvényfaktor könnyen igazolhatóan maga is s. f.

4. §. A LEGGYAKORIBB VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSOK

a) **Binomiális eloszlás**

Legyen (itt és a következőkben) ξ diszkrét vsz. v., ξ-t jellemezze vsz. eloszlása. A diszkrét vsz. v.-k eloszlásai közül egyik leggyakoribb az ún. *binomiális eloszlás*. Ezt a következőképp vezetjük be:

Tekintsünk egy kísérletet, amelynek két kimenetele lehet, A és $\bar{A}$ (ún. „egyszerű alternatíva") és $P(A) = p$ és $P(\bar{A}) = 1 - p \equiv q$. Ismételjük meg ezt n-szer. Tegyük fel, hogy az egyes kísérletek kimenetelei függetlenek. Jelölje ξ A fellépéseinek számát n kísérletben. Mivel A fellépte egy kísérletben a véletlentől függ, ξ nyilván diszkrét vsz. v., amely felveheti a $0, 1, \ldots, n$ értékeket. *Ezen feltételek mellett* ξ *vsz. e.-a, vagyis*

$$P(\xi = k) \equiv w(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (q = 1 - p)$$

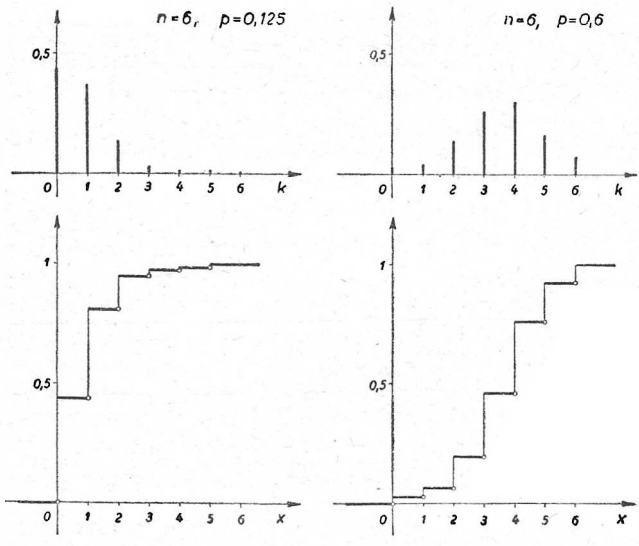
($(p + q)^n$ *binóm* kifejtésének k-adik tagja !). *Ezt a vsz. e.-t* **binomiális eloszlásnak** *nevezzük.* Azt is mondjuk, hogy ξ *binomiális eloszlású* (vsz. v.).

A gyakorlatban nagyon gyakran előfordul. Mi is már találkoztunk vele pár példában (l. 2. § 46; 48. pl.). Először J. BERNOULLI* foglalkozott ezzel az eloszlással, ezért nevezik Bernoulli-eloszlásnak is.

ξ *e. f.-ét könnyű megállapítani. Nyilván*

$$P(\xi < x) \equiv F(x) = \sum_{k<x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

mert $\xi < x$ akkor valósul meg, ha $\xi = 0, 1, \ldots,$ é. i. t. egészen az x-nél kisebb, legnagyobb egész számig, és $P(\xi < x)$ ezen



15. ábra

*Jakob Bernoulli (1654—1705) svájci matematikus.

egymást kizáró események vsz.-einek összege. $F(x)$ tiszta lépcsős függvény. $w(k)$ és $F(x)$ grafikonját bizonyos paraméterértékekre a 15. ábra mutatja.

Megjegyezzük, hogy a binomiális eloszlás képlete JORDAN KÁROLY tételéből is levezethető, ha az ottani A_i-ket függetlineknek és $\mathbf{P}(A_i) = p$-t veszünk fel; ekkor ti. $B_j = \binom{n}{j} p^j$, s ebből állításunk már egyszerűen levezethető.

b) Binomiális eloszlás közelítése

Nagy n és k esetén a binomiális eloszlás tagjait hosszadalmas pontosan kiszámítani. A binomiálisokat közelítőleg kiszámíthatnánk ugyan a

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\, e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\, e^{1/12n}$$

egyenlőtlenség* az $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\, e^{\vartheta_n/12n}$ $(0 < \vartheta_n < 1,\ \vartheta_n\ n$ függvénye) vagy az $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\, e^{(1/12n - \gamma_n/360n^3)}$ $(0 < \gamma_n < 1,\ \gamma_n\ n$ függvénye) egyenlőség, vagy az $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840n^3} + \dots\right)$ aszimptotikus sorfejtés felhasználásával, de ez a mód nem célszerű, ezért szükségessé vált olyan *függvényt* keresni, amelynek a $0, 1, \dots, n$ helyen felvett értékeivel tetszőleges pontossággal megközelíthetjük a binomiális eloszlás $w(0), w(1), \dots, w(n)$ értékeit.

A közelítést $npq \geqq 25$ esetén az alábbi összefüggés fejezi ki:

$$w(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi npq}} \left[1 + \frac{(q-p)(t^3 - 3t)}{6\sqrt{npq}}\right] + \Delta$$

ahol $t = (k - np)/\sqrt{npq}$,

$$|\Delta| < \frac{0{,}15 + 0{,}25\,|p-q|}{(npq)^{3/2}} + e^{-(3/2)\sqrt{npq}} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Az npq-ra tett korlátozás a gyakorlatban legtöbbször elég.

Használjuk a következő sorfejtéseket is:

$$w(k) \equiv \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi npq}} \left[1 + \frac{1}{\sigma}(2p-1)\left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{6}\right) - \right.$$

$$- \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1 - p + p^2}{12} - \frac{3 - 8p + 8p^2}{8} t^2 + \frac{2 - 7p + 7p^2}{12} t^4 - \frac{(2p-1)^2}{72} t^6\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sigma^3}(2p-1)\left(\frac{-3 + p - p^2}{24} t + \frac{47 - 74p + 74p^2}{144} t^3 - \frac{37 - 94p + 94p^2}{240} t^5 + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3 - 10p + 10p^2}{144} t^7 - \frac{(2p-1)^2}{1296} t^9\right) - \dots\right]$$

$$(\sigma = \sqrt{npq},\quad t = (k - np)/\sqrt{npq}\ )$$

* *H. Robbins:* A remark on Stirling's formula. Amer. Math. Monthly 62 (1955) No. 1. 26. o.

vagy, w-t t függvényeként fogva fel:

$$w(t) = \Phi + \frac{2p-1}{6\sigma}\Phi^{(3)} + \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{6p^2-6p+1}{24}\Phi^{(4)} + \frac{4p^2-4p+1}{72}\Phi^{(6)}\right) +$$

$$+ \frac{2p-1}{\sigma^3}\left(\frac{12p^2-12p+1}{120}\Phi^{(5)} + \frac{6p^2-6p+1}{144}\Phi^{(7)} + \frac{4p^2-4p+1}{1296}\Phi^{(9)}\right) + \ldots$$

ahol $\Phi(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ és $\Phi^{(i)} = (-1)^i \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} H_i(t)$, $H_i(t)$ az i-edik, $e^{-t^2/2}$-vel generált Hermite-polinom, a többi jelölés pedig a fenti. ($\Phi^{(i)}$-re táblázatok vannak.)

Ezekben az esetekben a közelítést létesítő függvény domináns részében szereplő $e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ az ún. **Gauss-féle függvény**, amellyel más vonatkozásban még sokszor fogunk találkozni. (Ott inkább **normális sűrűségfüggvény** néven fog szerepelni.)

Legelső formulánkban a közelítés hibája $p = q = 1/2$-nél minimális. A gyakorlatban általában csak az $e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ faktort tartják meg ebből a becslésből; a fentiekből következik, hogy ez nagyjából annál nagyobb hibát jelent, minél távolabb van p $^1/_2$-től*, de az elkövetett hiba formulánk alapján megbecsülhető.

A Gauss-függvényre számos, könnyen hozzáférhető táblázat van. A könyv végén mi is közlünk ilyet, az 5. §-ban pedig sor- stb. előállítást.

Egy binomiális eloszlású ξ vsz. v. e. f.-e, $F(x) \equiv \mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{k<x} w(k)$, *ami visszavezethető az amúgy is sokszor szereplő* $\sum_{k=0}^{m} w(k) = 1 - n\binom{n-1}{m}\int_0^p t^m (1-t)^{n-m-1}\,dt$ *kifejezésre.* Az itt szereplő integrál ún. **nem teljes** *B(eta)* **függvény**; erre táblázatok vannak. (Sok táblázat $\sum_{k=r}^{n} w(k)$-t közli; nyilván ez is elegendő.)

A gyakorlatban legtöbbször a binomiális eloszlás e. f.-ének két helyen felvett értékei különbségére van szükség, más szóval annak a vsz.-ére, hogy egy binomiális eloszlású vsz. v. értéke megadott határok közt lesz — v. ö. 3. § — (tehát nem annak a vsz.-ére, hogy megadott szám lesz).

A számításokat rendkívül megkönnyíti a következő összefüggés, melyet egyszerűbb formájában MOIVRE-nak és LAPLACE-nak tulajdonítanak,** és amely az előbbi közelítő kifejezéssel szerves kapcsolatban van.

Ha t_1, t_2 valós számok, és a ξ vsz. v. binomiális eloszlású, vagyis $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$\mathbf{P}(np + t_1\sqrt{npq} \leqq \xi < np + t_2\sqrt{npq}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du +$$

$$+ \frac{(1/2 - \Theta_1)\,e^{-t_1^2/2} + (1/2 - \Theta_2)\,e^{-t_2^2/2}}{\sqrt{2\pi\,npq}} +$$

$$+ \frac{q-p}{6\sqrt{2\pi\,npq}}\left[(1-t_2^2)\,e^{-t_2^2/2} - (1-t_1^2)\,e^{-t_1^2/2}\right] + \Omega$$

* Pontosabban: Akkor célszerű a Gauss-függvénnyel közelíteni, ha $0{,}637/\sqrt[3]{n} < p < 1 - 0{,}637/\sqrt[3]{n}$. Ezt *Ju. V. Prohorov* mutatta ki.)

** *Abraham de Moivre* (1667—1754), *Pierre Simon de Laplace* (1749—1827) francia matematikusok.

ahol $npq \geqq 25$, Θ_1, illetve Θ_2 $np - t_1\sqrt{npq}$, illetve $np - t_2\sqrt{npq}$ tört része, $np + t_i\sqrt{npq} \geqq 0$ $(i = 1, 2)$, és $|\Omega| < \dfrac{0{,}20 + 0{,}25\,|p - q|}{npq} + e^{-(3/2)\sqrt{npq}}$.

Legtöbbször $t_2 = -t_1 = t$, *ekkor*

$$\mathbf{P}(np - t\sqrt{npq} \leqq \xi < np + t\sqrt{npq}) = 2\int_0^t \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du + \frac{1 - \Theta_1 - \Theta_2}{\sqrt{2\pi\,npq}}\,e^{-t^2/2} + \Omega.$$

Az itt szereplő integrálok mind visszavezethetők a $\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du$ függvényre, amely táblázott függvény (l. a könyv végén; sorfejtéseit az 5. §-ban). Ezzel még sokszor fogunk találkozni, mert többek közt az ún. *normális* e. f.-nek is speciális esete. *A gyakorlatban általában csak az integrálos tagot használják közelítésként. Ez bizonyos hibát von maga után*, amely $p = q = 1/2$-nél minimális. Alkalmazásokban nem szabad erről megfeledkeznünk, hiszen képleteink alapján megbecsülhetjük a hibát.

Vegyük észre, hogy $\mathbf{P}(np + t_1\sqrt{npq} \leqq \xi < np + t_2\sqrt{npq}) =$

$\mathbf{P}(t_1 \leqq (\xi - np)/\sqrt{npq} < t_2) \to \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du$ (ha $n \to \infty$), vagyis a $(\xi - np)/\sqrt{npq}$ vsz. v. e. f.-e nagy kísérletszám esetén jó közelítéssel egyenlő egy normális e. f. t_2 és t_1 helyen felvett értékei különbségével. Ezt a fontos tényt más megvilágításban látjuk majd a 10. §-ban.

c) Poisson-eloszlás mint közelítés

A $w(k)$ binomiális eloszlás egy másik közelítő előállítása *n-hez viszonyítva kis* $np = \lambda$ *és* k *értékek esetére szól.* Bebizonyítható ugyanis, hogy *általában is*

$$w(k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\,Q$$

ahol

$$Q = \exp\,[k\lambda/n - (n-k)\lambda^2/2n^2 - k\,(k-1)/2n\,] \cdot$$
$$\cdot\,[1 - \Theta\,\{(n-k)\lambda^3/3\,(n-\lambda)^3 + k^3/2n\,(n-k)\}] \qquad (0 < \Theta < 1)$$

A mondott feltételek mellett $Q \approx 1$; az így kapott $w(k) = e^{-\lambda}(\lambda^k/k!)$-t használják a gyakorlatban általában, ami természetesen csak a λ és k-ra tett feltételek mellett engedhető meg. $e^{-\lambda}$ $(\lambda^k/k!)$-ra szintén vannak táblázatok (l. a könyv végén).

Az eddigiek alapján *kínálkozik bevezetni egy új vsz. e.-t.*

Tegyük fel, hogy *egy* ξ *vsz. v. csak a* $0, 1, \ldots$ *értékeket veheti fel és vsz. e.-a*

$$\mathbf{P}(\xi = k) \equiv p(k, \lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Ezt a vsz. e.-t λ **paraméterű** POISSON**-eloszlásnak** *nevezzük.** $\left(\text{A } \sum_{k=0}^{\infty} p(k, \lambda) = 1\right.$ megszorítás igazolható.$\left.\right)$

Vegyük még figyelembe a következőt:

Annak a vsz.-ét, hogy egy ξ *binomiális eloszlású vsz. v. értéke* $< x$, a már említett nem teljes B függvényes előállításon kívül *így is megadhatjuk:*

$$\mathbf{P}(\xi < x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{k!} + \Delta \equiv Q_m + \Delta$$

ahol m *a legnagyobb,* x*-nél kisebb egész szám,* $\lambda = np$,

$$|\Delta| \begin{cases} < (e^{\chi} - 1)\, Q_m & \text{ha } Q_m \geqq 1/2 \\ < (e^{\chi} - 1)\,(1 - Q_m) & \text{ha } Q_m < 1/2 \end{cases}$$

$$\chi = (\lambda + 1/4 + \lambda^3/n)/2\,(n - \lambda).$$

Az np és k-ra közölt előbbi feltételek mellett Δ elég kicsi. Ez teszi viszont némileg jogosulttá azt az általános eljárást, hogy ekkor $\mathbf{P}(\xi < x)$ kifejezéséből Δ-t elhagyják, és helyette csak $e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{k!}$-t vesznek. Erre a Σ-ra vagy a helyette éppúgy használható $e^{-\lambda} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$-ra táblázatok is vannak (l. a könyv végén).

d) **A Poisson-eloszlás mint önálló eloszlás**

A fentiekben a POISSON-eloszlás csak *mint a binomiális eloszlás közelítése* lépett fel. A POISSON-eloszlás azonban *exakte* is fellép a következő típusú kísérleteknél:

Tegyük fel, hogy egy kísérlet eredményét úgy jellemezhetjük: az (egy vagy több dimenziós) térbe „beledobott" pontok (végtelen sok) megoszlanak a tér egyes tartományai közt. Essék egy v mértékű T tartományba ξ számú pont. Legyen ξ vsz. v., és álljanak fenn a következő kikötések:

1. $\mathbf{P}(\xi = k) = q_k$ csakis v-től függ (T koordinátáitól *nem* !), azaz $q_k = q_k(v)$;

2. A közös pont nélküli T_1 és T_2 tartományokba eső pontok ξ_1 és ξ_2 számai független vsz. v.-k.

3. Kis Δv térfogatú tartományra $q_1(\Delta v) = a\,\Delta v + o(\Delta v)$ $(a > 0$ konstans).

4. $q_k(\Delta v) = o(\Delta v)$, ha $(k > 1)$.

Bebizonyítható, hogy *ezen feltételek mellett (pontosan !)*

$$q_k(v) = e^{-av} \frac{(av)^k}{k!} \equiv p(k, av)$$

(vagyis $\lambda = av$ *paraméterű* POISSON*-eloszlással van dolgunk).*

Ezek a feltételek igen sok vizsgálatnál jó közelítéssel (valóságban nincs végtelen sok pont, viszont $q_k(v)$ nagy k-ra ≈ 0) teljesülnek, illetőleg a számítások és kísérletek egyezése utólagosan igazolja közelítő fennállásukat.**

* *Siméon Denis Poisson* (1781—1840) francia matematikus.

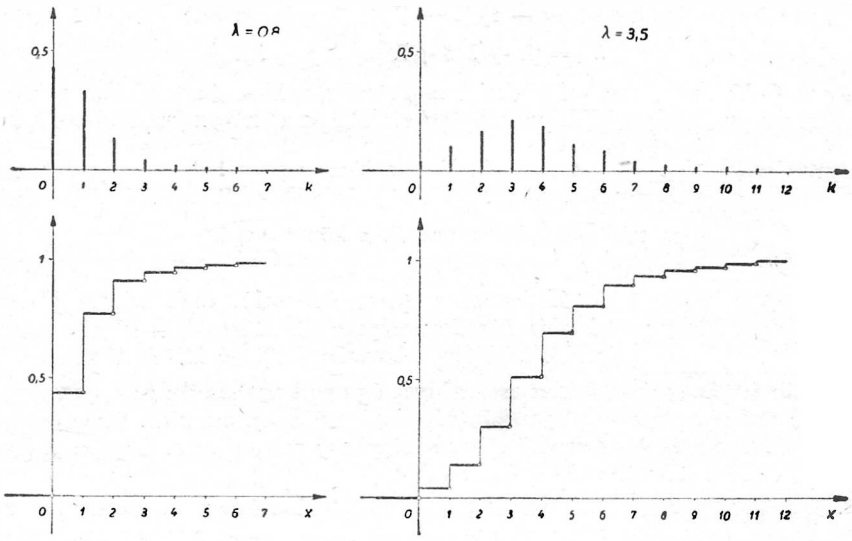
** Vegyük észre, hogy az itt szereplő ξ vsz. v. v-től is függ. Ennek következtében problémánk tulajdonképp már új területre, a *B)* részben tárgyalandó „sztohasztikus folyamatok" körébe tartozik. Épp ezért itt nem foglalkozunk vele részletesebben.

A $p(k, \lambda)$ POISSON-*eloszlás e. f.-e a vsz. e. segítségével könnyen megállapítható:*

$$F(x) \equiv \mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{k<x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{t^m e^{-t}}{m!}\, dt = 1 - \frac{1}{m!} \int_{0}^{\lambda} t^m e^{-t}\, dt$$

ahol m a legnagyobb, x-nél kisebb egész szám. Az itt szereplő $\int_0^{\lambda}$ az ún. **nem teljes** Γ **függvény,** (λ és $m + 1$ argumentumoknál), amelyre táblázatok vannak. Ez az összefüggés már *elhanyagolás nélkül* érvényes! (V. ö. az előző ponttal!)

$p(k, \lambda)$ és $F(x)$ grafikonját egyes paraméterértékekre a 16. ábra mutatja; a táblázatokról már az előző pontnál szóltunk. $F(x)$ szintén tiszta lépcsős függvény.



16. ábra

Ha valamilyen vizsgálatban POISSON-eloszlással találkozunk, és értékét a formula alapján hosszadalmas kiszámítani, felhasználhatjuk az alábbi közelítést, amelyben csak a jól tabellázott Gauss-függvény szerepel. A közelítés nem $p(k, \lambda)$-ra, hanem $p(y, \lambda)$-ra szól, ahol $y = (k - \lambda)/\sqrt{\lambda}$

$$p(y, \lambda) = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6}\right) - \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{12} - \frac{3y^2}{8} + \frac{y^4}{6} - \frac{y^6}{72}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\sigma^3}\left(\frac{y}{8} - \frac{47y^3}{144} + \frac{37y^5}{240} - \frac{y^7}{48} + \frac{y^9}{1296}\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{1}{288} - \frac{5y^2}{32} + \frac{347y^4}{1152} - \frac{617y^6}{4320} + \frac{23y^8}{960} - \frac{y^{10}}{648} + \frac{y^{12}}{31\,104}\right) + \ldots\right]$$

ahol $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

Itt is ismeretes egy olyan sorfejtés, amely a Gauss-függvényt és deriváltjait tartalmazza. Az előbbi y-nal és σ-val

$$p(y,\lambda)=\Phi-\frac{1}{\sigma}\frac{\Phi^{(3)}}{6}+\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\Phi^{(4)}}{24}+\frac{\Phi^{(6)}}{72}\right)-\frac{1}{\sigma^3}\left(\frac{\Phi^{(5)}}{120}+\frac{\Phi^{(7)}}{144}+\frac{\Phi^{(9)}}{1296}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\Phi^{(6)}}{720}+\frac{13\Phi^{(8)}}{5760}+\frac{\Phi^{(10)}}{1728}+\frac{\Phi^{(12)}}{31\,104}\right)+\cdots$$

ahol $\Phi(y)=\dfrac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

(Vö. mindezeket binomiális eloszlásnál szereplő sorfejtésekkel!)

Annak a vsz.-e is megadható közelítőleg, hogy egy POISSON*-eloszlású* ξ *vsz. v. értéke bizonyos határok közé esik:*

$$\mathbf{P}(\lambda-t\sqrt{\lambda}\leqq\xi<\lambda+t\sqrt{\lambda})=\sum_{\lambda-t\sqrt{\lambda}\leq k<\lambda+t\sqrt{\lambda}}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{-t\leq(k-\lambda)/\sqrt{\lambda}<}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\approx$$

$$\approx 2\int_0^{}\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}du \qquad (\lambda-t\sqrt{\lambda}\geqq 0)$$

$\lambda\to\infty$ esetén a jobb oldal a bal oldal limesze. A hiba kifejezését mellőzzük.

e) Egyéb egydimenziós valószínűség-eloszlások

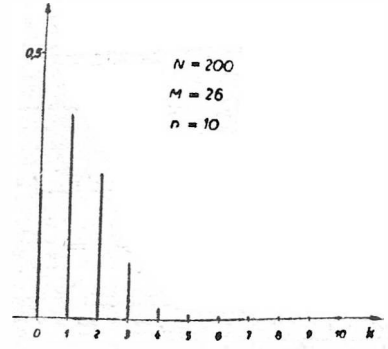
Egyéb, gyakrabban előforduló vsz. e.-ok közül a következőket említjük meg (az elnevezések — éppúgy, mint a binomiális eloszlásnál — bizonyos kifejezésekre, sor-együtthatókra stb. utalnak).

1. **Hipergeometrikus eloszlás.** *Ha egy* ξ *vsz. v. a* $0, 1, \ldots, n$ *értékeket veheti fel, és vsz. e.-a*

$$\mathbf{P}(\xi=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k=0,1,\ldots,n)$$

ξ-t hipergeometrikus eloszlású vsz. v.-nak nevezzük. ($M>n$, $N>n$, n *konstans paraméterek.*)

Ezzel a vsz. e.-sal találkoztunk a 2. § 28 pl.-ban. Hipergeometrikus eloszlás grafikonját mutatja a 17. ábra.



17. ábra

2. **Negatív binomiális eloszlás.** *A* ξ *vsz. v.-t* r*-edrendű negatív binomiális eloszlásúnak nevezzük, ha a* $k=0,1,\ldots$ *értékeket*

$$\mathbf{P}(\xi=k)=\binom{r-1+k}{r-1}p^r\,q^k$$

vsz.-gel veszi fel ($r\geqq 1$, *egész*, $0<p<1$, $p+q=1$ *paraméterek*).

(Az elnevezés onnan származik, hogy $\mathbf{P}(\xi = k)$ a $p^r (1 - q)^{-r}$ negatív kitevőjű binomiális kifejezés q szerinti sorfejtésének k-adik tagja.)

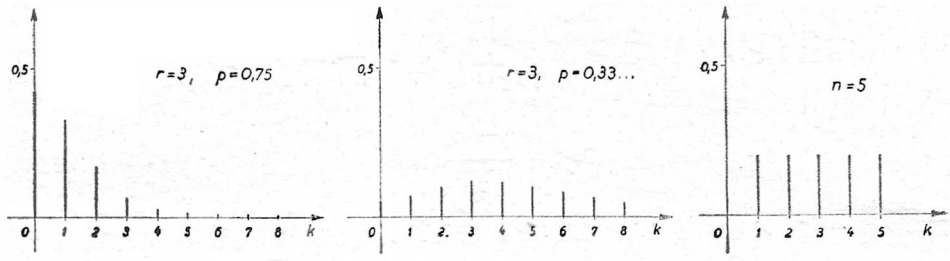
$r = 1$ *esetén az eloszlást* **geometriai vagy Pascal-féle eloszlásnak** *nevezzük.*

A kozmikus sugárzás elméletében szerepel például. — Negatív binomiális eloszlások grafikonjait mutatja a 18. ábra.

3. **A klasszikus valószínűségeloszlás.** Erről akkor beszélünk, ha *egy* ξ *vsz. v. véges számú értéket, pl.* $k = 1, \ldots, n$*-et vehet fel, és*

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p = 1/n.$$

Ez az eset nyilván azonos a klasszikus vsz. számítás „egyenlően vsz. események" szkémájával. Klasszikus valószínűségeloszlás grafikonját mutatja a 19. ábra.



18. ábra 19. ábra

Megemlítjük még, hogy valamilyen biztos eseményt is jellemezhetünk vsz. v.-val: Legyen a ξ vsz. v. $= a$ az esemény bekövetkezésekor és b ellenkező esetben. Nyilván $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$, $\mathbf{P}(\xi = b) = 0$. Az ezzel formálisan jellemzett eloszlást *elfajultnak* hívjuk.

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy elvileg egy vsz. algebra eseményei helyett is mindig írhatnánk azt, hogy egy ξ vsz. v. valamilyen értéket vesz fel; csak az a fontos, hogy különböző eseményekhez ξ különböző értékeit rendeljük. Ha pl. egy kísérletnek csak két eredménye lehet, A és $\bar{A}$, ezeket jellemezheti egy ξ vsz. v. két különböző értéke, pl. $\xi = 1$ és $\xi = 0$. Ez a kifejezésmód nem mindig jelent könnyebbséget, s ezért nem használjuk egyetemlegesen. Alkalmazásával még találkozunk.

f) **Polinomiális eloszlás**

A többdimenziós eloszlások között legnevezetesebb a *polinomiális eloszlás.* Erre így jutunk:

Tekintsünk egy kísérletet, amelynek egymást kizáró eredményei az $A_1, \ldots, A_r$ véletlen események lehetnek, és

$$\mathbf{P}(A_i) = p_i \quad (i = 1, \ldots, r; \sum_{i=1} p_i = 1)$$

Jelölje a ξ_i vsz. v. a kísérlet n független megismétléséből álló kísérletsorozatban az A_i fellépésének számát. Bármelyik ξ_i felveheti a $0, 1, \ldots, n$ értékeket, de az egyes ξ_i-k által felvett értékek összege mindig n.

Ekkor

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \quad (\sum_{i=1} k_i = n, \sum_{i=1} p_i = 1)$$

Ezt a többdimenziós eloszlást **polinomiális eloszlásnak** *nevezzük* (ez a $(p_1 + \ldots + p_r)^n$ polinom kifejtésének egy tagja). Ezzel találkoztunk a 2. §. 20. pl.-ban.

Az $r = 2$-nél fellépő binomiális eloszlással való analógia szemmel látható; eltérő, hogy itt a többi által már meghatározott ξ_r-t is feltüntetik, bár nem „önálló" vsz. v.

A polinomiális eloszlásnak fontos szerepe van a matematikai statisztikában: ott *helyette nagy n-eknél közelítésként a következő aszimptotikus egyenlőség jobb oldalát használják:*

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \sim \frac{\exp\left[-(1/2n)\left(\sum_{j=1}^{r} (k_j - np_j)^2/p_j\right)\right]}{(\sqrt{2\pi n})^{r-1}\sqrt{p_1 \cdots p_r}}$$

ha $n \to \infty$, *feltéve, hogy* $|k_j - np_j|$ *pl.* $\sqrt{n}$ *nagyságrendű* $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

A közelítés hibájára nem térünk ki. Vegyük észre a hasonlóságot a binomiális e. Gauss-függvénnyel való közelítésével. Az itt szereplő függvény a később még tárgyalandó ún. *többdimenziós normális sűrűségfüggvény.*

Csak megjegyezzük, hogy *ha* $np_i = \lambda_i$ *és* k_i $(i = 1, \ldots, r-1)$ *kicsi n-hez képest, a polinomiális eloszlást jól megközelíthetjük az*

$$e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!} \cdots e^{-\lambda_{r-1}}\frac{\lambda_{r-1}^{k_{r-1}}}{k_{r-1}!}$$

ún. **többdimenziós** POISSON**-eloszlással.**

Azt is csak megemlítjük, hogy a paraméterekre tett bizonyos feltevések mellett az e) alatti eloszlások is konvergálhatnak a binomiális vagy POISSON-eloszláshoz, illetve közelíthetők a normális s. f.-nyel.

Példák és feladatok

1. A születések statisztikai vizsgálata alapján azt kapjuk, hogy fiú születésének vsz.-e 0,51-nek vehető. Ha feltesszük, hogy egy családon belül az újszülött neme független a többi gyermekétől, mi a vsz.-e annak, hogy egy 6 gyermekes családban 4 gyermek fiú?

2. Egy gyártási folyamatban 2% a selejt. Az egyes selejtes darabok létrejötte független egymástól. Mi a vsz.-e, hogy 100 gyártmány közt $0, 1, \ldots, k, \ldots 100$ selejtes lesz?

3. Állapítsuk meg, milyen k-ra lesz maximuma a $w(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ binomiális eloszlásnak.

Megoldás. $w(k)$ k-nak nem differenciálható függvénye, így az analízis ismert szélsőérték-módszereit nem használhatjuk. Ilyen esetekben a következő eljárás vezet célhoz: Vizsgáljuk $w(k)/w(k-1) = (p/q)\,[(n+1)/k - 1] \equiv f(k)$-t. Ha $k < (n+1)p$, $f(k) > 1$, vagyis a $w(k)$-k monoton nőnek, — ha $k > (n+1)\,p$, $f(k) < 1$, és a $w(k)$-k monoton fogynak. Legyen $(n+1)\,p$ két egész szám közt, ekkor az előbbiek azt jelentik, hogy $k = [(n+1)\,p]$-ig a $w(k)$-k nőnek, ettől kezdve pedig fogynak: $k = [(n+1)\,p]$-nél van egyetlen maximumuk. Ha pedig $(n+1)\,p$ egész, a $w(k)$-k $(n+1)\,p - 1$-ig nőnek, $(n+1)$-től kezdve fogynak, és $(n+1)\,p - 1$, $(n+1)\,p$-nél

egyenlők; ez utóbbi két pontban vesz fel (azonos) maximális értéket $w(k)$. A binomiális eloszlás grafikonja 0 és n-nél megszakad. Ha $[(n+1)p] = 0$, a grafikon pontjainak ordinátái k növekedésével monoton csökkennek (vö. a binomiális e.-ok ábrájával!)

4. A 4. § 2. fel. esetében állapítsuk meg, milyen selejtszám lesz a legvalószínűbb egy 100 elemű mintában.

5. Bizonyos állatpszichológiai kísérletben meg akarják állapítani, hogy a kísérleti patkányok agykérgének megsértése egy bizonyos helyen megszünteti-e az állat emlékezőképességét. Patkányokat egyenként egy-egy labirintusba tesznek, amelyben a lehetséges 5 út közül csak egy vezet a táplálékhoz. Egy idő múlva az állatok már mind tudják a helyes utat. Ekkor agykérgüket a szóban forgó helyen megsértik. Gyógyulás után ismét a labirintusokba teszik a patkányokat. Ekkor az állatok csak a kísérletek 20%-ában (mondhatjuk: $\approx 0{,}2$ vsz.-gel) találják meg a helyes utat egymástól függetlenül. Végezzük el ezek után a kísérletet 6 patkánnyal. Legyen ξ azon patkányok száma, amelyek ebben a kísérletben rögtön megtalálják a helyes utat. *a)* Állapítsuk meg ξ vsz. eloszlását, $P(\xi = k)$ — t, *b)* Ha ξ értéke $\geqq 3$, azt úgy tekintjük, hogy az állatoknak még megmaradt emlékezőképessége. Mi ennek a vsz.?

6. Valamilyen készárut vizsgálunk. Egy darab lehet selejtes (vsz. e. q); annak a vsz., hogy a vizsgálat selejtes darabot selejtesnek minősít, legyen p; jót mindig jónak mutat a vizsgálat. Ha ξ az *első* selejtes darab *elkönyvelése* előtt a vizsgáló kezén átment darabok száma, η pedig a ξ közt volt selejtes (de ilyennek fel nem ismert) darabok száma, mi lesz ξ és η együttes eloszlása (ha ξ és η nem független, egy darab minősége és a róla tett megállapítás sem független, az összes többi események azonban függetlenek)?

7. Egyszerű organizmusok életfolyamatát leírhatjuk a következő modellel: Ha az organizmus elér bizonyos T „életkort", kettéhasad. A két újnak minden előzménytől függetlenül ugyanez a sorsa. A T időtartam alatt azonban bármely organizmus q vsz.-gel el is pusztulhat. Tegyük fel, hogy az egyes organizmusok sorsa független egymástól. Keressünk rekurzív formulát annak a vsz.-ére, hogy ha $t = 0$-kor egyetlen organizmus van jelen, a $t = nT$ $(n = 1, 2, \ldots)$ időtartam végén pontosan k élő organizmusunk lesz.

8. 196 esztergapad egymástól függetlenül, azonos feltételek mellett dolgozik. Az egyes munkagépek az összmunkaidő 80%-ában dolgoznak. Mi a vsz., hogy tetszőleges időpontban az épp működő munkagépek száma 139 és 170 között lesz?

Megoldás. A feltételeket így értelmezhetjük: közelítőleg 0,8 a vsz., hogy valamely időpontban egy munkagép éppen dolgozik. Annak a vsz., hogy valamely időpontban éppen k gép dolgozik, olyan binomiális eloszlás k-adik tagjával adható meg, amelynek paraméterei 169 és 0,8. A keresett vsz. tehát $\sum_{k=140}^{169} \binom{169}{k} 0{,}8^k\, 0{,}2^{169-k}$. Normális e. f.-nyel közelítve (a közelítés alkalmazható !) a közelítő formulában szereplő paraméterek értékei $t_1 = -3$; $t_2 = 33/14$; $\sqrt{npq} = 5{,}6$; $np = 156{,}8$; $\Theta_1 = 0{,}6$; $\Theta_2 = 0$, és így a keresett vsz. 0,9941. A hiba abszolút értéke (a közelítés hibakorlát-képletéből) $< 0{,}0112$.

9. Egy elektromos hálózatba n készülék kapcsolható, egymástól függetlenül. Mindegyik készülék a kilowatt fogyasztású. Ha p annak a vsz., hogy bizonyos időpontban egy készülék éppen be van kapcsolva, mi a vsz., hogy az adott pillanatban az össz-fogyasztás 1. $<$ *nap* lesz, 2. $\geqq$ *r nap* lesz; engedjük meg, hogy np nagy szám.

10. Egy életbiztosító társaságnak többek között 10 000 olyan biztosítottja van, akik egyforma korúak és szociális helyzetűek. Annak a vsz., hogy egy ilyen személy

az év folyamán meghal, 0,006 (egy személy halála a többiétől függetlennek tehető fel). Minden biztosított január 1-én 12 forintot fizet be. Halála esetén hozzátartozói 1000 forintot kapnak a társaságtól. Mi a vsz., hogy *a)* a társaságnak nem lesz nyeresége, *b)* a társaságnak legalább 40 000, — 60 000, — 80 000 forintja megmarad a befizetett összegből?

11. Valamely szövőgépnél 0,005 annak a vsz., hogy bizonyos időtartam alatt egy szál elszakad. Ha 800 szál van, hány szakadás a legvalószínűbb a szóban forgó időtartam alatt, ha az egyes szálak szakadása független egymástól? Legfeljebb 10 szakadásnak mi a vsz.-e?

12. Valamilyen késztermék 0,005 vsz.-gel selejtes. Mi (pontosan és közelítőleg) a vsz., hogy 10 000 találomra kiválasztott késztermék között *a)* pont 40, *b)* 70-nél nem több selejtes lesz, ha az egyes darabok minősége független a többiétől?

13. Tekintsük az ég egy tartományát (távol a Tejúttól), amelynek területe (pl. négyzetfokban) R_0. Legyen ennek egy része R_1 területű. Felteszik, hogy ha az R_0 területen N látható csillag van, annak a vsz., hogy R_1-en éppen k van, N és R_1/R_0 paraméterű binomiális eloszlás k-adik tagjával fejezhető ki. *a)* Legyen R_0 $10^0 \times 10^0$, $N = 10\,000$. Mi lesz annak a vsz.-e (közelítőleg és pontosan), hogy egy $10' \times 10'$ területű tartományban k látható csillag lesz? *b)* Az előbbi $10' \times 10'$ területű tartományról fényképet készítünk. Mi a vsz. (pontosan és közelítőleg), hogy legalább három rajta lesz a látható csillagok közül? *c)* Mekkora területet kell lefényképezni, hogy 0,90-nál nagyobb vsz.-gel legyen a fényképen legalább egy csillag? *d)* Ha az egész tartományról készített fényképet $1' \times 1'$ területű részekre osztjuk, mi a vsz., hogy legalább egy ilyen részben több, mint egy látható csillag lesz? (A részekbe jutó csillagok számait függetleneknek tekinthetjük.)

14. Egy lombikban V_0 térfogatú folyadék van, amely baktériumokat tartalmaz. Annak a vsz., hogy egy baktérium éppen a folyadék valamely v térfogatrészében van, legyen v/V_0, függetlenül attól, hogy hány baktérium van már ott. Egy kémcsőbe V_1 térfogatnyit kiöntenek a folyadékból. Ha a lombikban levő baktérium-szám N, mi a vsz., hogy a kémcsőbe $k = 0, 1, \ldots$ baktérium kerül? Mivel közelíthető ez a vsz., ha V_1 igen kicsi V_0-hoz képest, N pedig igen nagy, de N/V_0 (= átlagos baktériumsűrűség) közepes nagyságrendű?

15. Az előző feladatban legyen V_0 és V_1 kb. egyforma nagyságrendű. Legyen ξ a kémcsőbe került baktériumok száma és $\eta = \xi/V_1$ (a baktériumsűrűség a kémcsőben). Mi a vsz., hogy η eltérése a lombikban levő átlagos baktériumsűrűségtől abszolút értékben $< \tau\, N/V_1$, ahol τ adott szám?

16. A 4. § 14. fel. feltételei mellett tegyük fel, hogy a baktériumok ártalmasak a szervezetre; ha t vagy t-nél több jut belőlük egy fehér egér szervezetébe, az elpusztul. Ha 1 cm³-t fecskendezünk be az egérbe, mi annak a vsz., hogy az egér elpusztul? (Használjunk POISSON-eloszlással való közelítést.)

17. Az előző feladat feltételei mellett kérdezzük: ha 10 egérnek adunk 1—1 cm³-t abból az oldatból, melyben $m = N/V_0$ az átlagos baktériumsűrűség, mi a vsz., hogy a 10 egér közül g pusztul el (ha feltesszük, hogy az egerek egymástól függetlenül pusztulhatnak el).

18. Ha nagyszámú (N) egérnek ugyanazon mennyiséget fecskendeznek be bizonyos toxikus baktériumokat tartalmazó folyadékból, 95%-uk elpusztul. Azt tudják, hogy ennek oka csak a következők valamelyike: *a)* a befecskendezett folyadékban kicsi volt a baktériumsűrűség, de nagy volt a baktériumok toxicitása, *b)* a folyadékban nagy

volt a baktériumsűrűség, de a toxicitás alacsony volt. A 4. § 16. fel. eredményét felhasználva hogyan, milyen kísérlettel dönthetnénk el, hogy *a)* vagy *b)* állt-e fenn?

19. A ξ vsz. v. vegye fel a 0, 1, 2, ..., n értékeket, és legyen vsz. eloszlása $\mathbf{P}(\xi = k) = p_k$. Mi lesz ξ vsz. eloszlása, ha kikötjük, hogy ξ értéke csakis a 0, 1, ... számok valamilyen R részhalmazán mozoghat?

Megoldás. Nyilván $\mathbf{P}(\xi = k \mid \xi \in R)$-t keressük; ez $\mathbf{P}(\xi = k, \xi \in R)/\mathbf{P}(\xi \in R) = \mathbf{P}(\xi = k)/\mathbf{P}(\xi \in R) = p_k / \sum_{k \in R}' p_k$ (az összegezés az R-be tartozó számokra terjed ki), ha k az R-be tartozik (egyébként 0). Az ilyen vsz. eloszlást *csonkított eloszlásnak* nevezzük. R legtöbbször egymás után következő egész számokból áll. Beszélhetünk pl. *csonkított* Poisson*-eloszlásról*, amidőn egy egyébként Poisson-eloszlású ξ vsz. v. vsz. eloszlását keressük azon feltétel mellett, hogy ξ csak a 0, 1, ..., n értékeket veheti fel. A keresett vsz. eloszlás nyilván $(e^{-\lambda}\lambda^k/k!) \Big/ \sum_{k=0}^{n} (e^{-\lambda}\lambda^k/k!)$. A gyakorlatban sokszor találkozunk pl. olyan vsz. v.-val, amelynek értékei jól egyeznek bizonyos λ paraméterű csonkított Poisson-eloszlás eg./es értékeivel, ekkor az észlelések leírására az utóbbi jól alkalmazható. Egyéb csonkított vsz. eloszlások (pl. csonkított binomiálise.) is gyakran találnak gyakorlati alkalmazásra. *Megjegyezzük még, hogy pl. a csonkított* Poisson*-eloszlást matematikailag nehezebb kezelni, és ezért jó közelítésként és a kezelhetőség kedvéért sokszor használjuk helyette a (csonkítatlan)* Poisson*-eloszlást, mivel utóbbinak nagyobb értékekre úgyis* ≈ 0 *minden tagja.* (Ilyen eset adódik elő pl. a távbeszélő forgalom egyes kérdéseinél). Persze, az ilyen eljárás kapcsán levont következtetésekben is benne rejlik ez a közelítés. Erről nem szabad elfeledkezni. — (Egyes más eloszlásoknál is adódik ilyen közelítési lehetőség.)

20. Egy 2000 előfizetőt kiszolgáló telefonközpont egyszerre M vonalat tud „adni". Tegyük fel, hogy a nap csúcsforgalmi órájában egy előfizető átlag 2'-en át beszél; ezt úgy értelmezhetjük, hogy annak a vsz., hogy a csúcsforgalmi órában találomra választott pillanatban épp beszél *adott* személy a 2000 közül, feltéve, hogy legfeljebb M beszélhet, 1/30. Mi a vsz., hogy a csúcsforgalmi órában egy hívó azonnal kap vonalat (ha az egyes hívások egymástól függetleneknek tekinthetők)?

Megoldás. Egy hívó akkor kap vonalat, ha legfeljebb $(M - 1)$ beszél a 2000 közül épp akkor, amikor ő hív, feltéve, hogy legfeljebb M beszélhet a 2000 közül (= A esemény). $\mathbf{P}(A)$-t keressük; számítsuk ezt ki $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})$ alapján. $\overline{A}$: (pont M beszél a 2000 közül, feltéve, hogy legfeljebb M beszélhet a 2000 közül). De $\mathbf{P}(\overline{A}) =$ $\mathbf{P}$ (pont M beszél a 2000 közül) / $\mathbf{P}$ (legfeljebb M beszél a 2000 közül). A számlálóban, ill. nevezőben szereplő vsz.-ek feltételeink szerint egy binomiális eloszlás egyes tagjaiként adhatók meg és értékeik

$$\binom{2000}{M}(1/30)^M\,(1-1/30)^{2000-M}, \text{ illetve } \sum_{k=0}^{M}\binom{2000}{k}(1/30)^k\,(1-1/30)^{2000-k},$$

vagyis a végeredmény

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \binom{2000}{M}(1/30)^M\,(1-1/30)^{2000-M} \Big/ \sum_{k=0}^{M}\binom{2000}{k}(1/30)^k\,(1-1/30)^{2000-k}.$$

Ebben egy csonkított binomiális eloszlás M-edik tagja szerepel. Ha 1/30 helyett p-t írunk, és még Poisson-eloszlással is közelítünk, az ekkor kapott tört az ún.

ERLANG-*féle formulát* szolgáltatja. Ilyen típusú problémák általános tárgyalása csak a *B)* rész eszközeivel lehetséges. A gyakorlatban legtöbbször $P(A)$-t adják meg, és meg kell hozzá határozni az M-et, az építendő vonal-számot.

21. Diszkutáljuk a POISSON-eloszlás grafikonja menetét.

22. Igazoljuk a POISSON-eloszlás e. f.-énél szereplő

$$\sum_{k<x} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! = 1 - \frac{1}{m!}\int_0^{\lambda} t^m\,e^{-t}\,dt$$

összefüggést, ahol m a legnagyobb, x-nél kisebb egész szám.

Megoldás. Elég a $\sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$ összeget vizsgálni; ez $1 - e^{-\lambda}R_m(\lambda)$-val egyenlő, ahol $R_m(\lambda)$ e^{λ} Taylor-sorának maradéktagja, ha m tagnál állunk meg. A maradéktag integrálalakja azonban épp $\frac{1}{m!}\int_0^{\lambda} e^{t}\,(\lambda - t)^m\,dt = \frac{e^{\lambda}}{m!}\int_0^{\lambda} e^{-t}\,t^m\,dt$, amiből állításunk már következik. — Mondtuk, hogy függvényünk tabellázott; a táblázatban nem található értékeit, illetve általában $\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$-t pl. így becsülhetjük meg; *Ha* $n + 2 > \lambda$ és $m = n, n+1, \ldots$ *fennáll:* $\sum_{k=n}^{m} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! < \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! = \sum_{k=n}^{m} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! +$, $+ \sum_{k=m+1}^{\infty} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! < \sum_{k=n}^{m} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! + [e^{-\lambda}\,\lambda^{m+1}/(m+1)\,!][1 + \lambda/(m+2) + \lambda^2/(m+2)^2 +$ $+ \ldots] = \sum_{k=n}^{m} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! + [e^{-\lambda}\,\lambda^{-m+1}/(m+1)\,!]\,[(m+2)/(m+2-\lambda)]$. Az utolsó tag legtöbbször már akkor is igen kicsi, ha m 2—3-mal nagyobb csak n-nél; ekkor a $\sum_{k=n}^{m}$ is könnyen kiszámítható, és így alsó-felső korlátot kapunk, melyekből a keresett kifejezés több tizedes pontossággal megállapítható. $(n+2) \leqq \lambda$ esetére is megadhatók hasonló korlátok; ekkor a $\sum_{k=n-m}^{n} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! < \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! = \sum_{k=n-m}^{n} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! +$ $+ \sum_{k=0}^{n=m-1} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$ $(m = 0, \ldots n)$ egyenlőtlenségekből indulunk ki; a legutolsó $\sum$-t geometriai sorral majorálva, végül is a $\sum_{k=n-m}^{n} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! < \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! \leqq \sum_{k=n-m}^{n} e^{-\lambda}\,\lambda^k/k! +$ $+ [e^{-\lambda}\,\lambda^{n-m-1}/(n-m-1\,!)]\,[((n-m-2)/\lambda)^{n-m} - 1]/[(n-m-2)/\lambda - 1]$ egyenlőtlenségeket kapjuk, amelyeket ugyanolyan meggondolások alapján használunk, mint az $n + 2 < \lambda$ esetére kapottakat.

23. A repetitóriumrészben közöltek alapján vezessük le az exakt POISSON-eloszlás formuláját.

Megoldás. Itt csak annak a q_k vsz.-ét keressük, hogy egy v mértékű tartományba k számú pont essék, feltéve, hogy 1. ennek a vsz.-e csak v-től függ: $q_k = q_k(v)$, 2. közös pont nélküli tartományba eső pontok számai független vsz. v.-k, 3. $q_1(\Delta v) =$

$= a\Delta v + o(\Delta v)$, ($\Delta v$ egy elemi tartomány mértéke, a konst), 4. $q_k(\Delta v) = o(\Delta v)$ ($k > 1$). Keressünk $q_k(v)$-re differenciálegyenletet v szerint. Növeljük v-t Δv-vel. Először is $q_0(v + \Delta v) = q_0(v)q_0(\Delta v)$, mert annak a vsz., hogy $v + \Delta v$-be 0 pont esett = P (v-be nem esett pont). P (Δv-be nem esett) (a két esemény 2. alapján független). Azután $q_n(v + \Delta v) = q_n(v)\, q_0(\Delta v) + q_{n-1}(v)\, q_1(\Delta v) + \sum_{k=2}^{n} q_{n-k}(v)\, q_k(\Delta v)$, mert az, hogy $v + \Delta v$-be n pont esik, megvalósulhat úgy, hogy v-be n esik és Δv-be 0, vagy úgy, hogy v-be $n - 1$ és Δv-be 1 é. i. t., s ezek az események egyrészt egymást kizárják, másrészt mindegyik két független esemény szorzata (ismét 2. folytán). Ezekből a rekurzív összefüggésekből differenciálegyenlet-rendszert alkotunk, éspedig úgy, hogy először differenciahányadosokat képezünk, azután ezekből határátmenettel differenciálhányadosokat. Keressük először $\frac{q_0(v + \Delta v) - q_0(v)}{\Delta v}$ határértékét. A fentiek alapján ez a hányados $= -\frac{q_0(v)\,[1 - q_0(\Delta v)]}{\Delta v}$. Mivel nyilvánvalóan $\sum_{k=0}^{\infty} q_k(\Delta v) = 1$, $1 - q_0(\Delta v) = q_1(\Delta v) + q_2(\Delta v) + \ldots$ ami 3. és 4. alapján $= a\Delta v + o(\Delta v)$, és így $\frac{q_0(v + \Delta v) - q_0(v)}{\Delta v} = -a\, q_0(v) - q_0(v)\frac{o(\Delta v)}{\Delta v}$, ami $\Delta v \to 0$ esetén átmegy $\frac{dq_0}{dv} = -a\, q_0(v)$-ba, ti. a jobb oldal limesze létezik, tehát a bal oldalé is, vagyis a derivált is létezik. Hasonlóan

$$\frac{q_n(v + \Delta v) - q_n(v)}{\Delta v} = -\frac{q_n(v)\,[1 - q_0(\Delta v)]}{\Delta v} + \frac{q_{n-1}(v)\, q_1(\Delta v)}{\Delta v} + \\ + \sum_{k=2}^{n} q_{n-k}(v)\frac{o(\Delta v)}{\Delta v},$$

ami az előző esetnél alkalmazott meggondolással $= -aq_n(v) - q_n(v)\frac{o(\Delta v)}{\Delta v} + aq_{n-1}(v) + q_{n-1}(v)\frac{o(\Delta v)}{\Delta v} + \sum_{k=2}^{n} q_{n-k}(v)\frac{o(\Delta v)}{\Delta v}$ és ez $\Delta v \to 0$ esetén átmegy $\frac{dq_n}{dv} = -aq_n + aq_{n-1}$ ($n = 1,2, \ldots$)-be. Most a q_0-ra vonatkozó differenciálegyenletet és az utóbbiakat kell megoldanunk. Tulajdonképpen végtelen rekurzív differenciálegyenletrendszerrel van dolgunk. Könnyen igazolható, hogy a megoldás $q_n(v) = e^{-av}\frac{(av)^n}{n!}$ qu. e. d. A továbbiak triviálisak. — Vsz.-ek ily módon történő meghatározása (vagyis, hogy valamelyik paraméter szerint differenciálegyenletet írunk fel a keresett vsz.-ekre, esetleg még rekurzív formulát is, azután ezeket megoldjuk) igen gyakori a vsz. számításban.

24. Legyen $\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$ annak a vsz., hogy egy telefonközpontba Δt idő alatt hívás érkezik ($\lambda > 0$, konst). Továbbá tegyük fel (feltevéseink a valóságos viszonyokkal jól egyeznek), hogy 1. annak a vsz., hogy t hosszú időintervallum alatt k hívás érkezik, csak az időintervallum hosszától függ: hosszabb idő alatt vsz.-bb, hogy adott k hívásszám lesz, 2. különböző időintervallumokban jelentkező hívások számai egymástól független vsz. v.-k, 3. annak a vsz., hogy Δt alatt > 1 hívás érkezik $o(\Delta t)$. Mi a vsz. ekkor, hogy valamely t időtartam alatt egyetlen hívás sem érkezik be?

Megoldás. Fogjuk fel a t hosszú időintervallumban beérkező hívásokat pontoknak, amelyeket véletlenszerűen rádobunk az intervallumra. Ekkor feltételeink az *exakt* POISSON-eloszlás fellépéséhez szükséges feltételekkel ekvivalensek, és így a t időintervallumba befutó hívások ξ száma POISSON-eloszlású vsz. v. lesz, vagyis $\mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!$ A mi esetünkben $\mathbf{P}(\xi = 0)$-t keressük; ez $e^{-\lambda t}$. — Megjegyezzük, hogy hasonló viszonyok folytán POISSON-eloszlást követnek pl. a következő mennyiségek is: fix időintervallumban bizonyos anyagból kilépő elektronok vagy fotonok száma. Fix időintervallumban egy rádióvevőben jelentkező sztatikus zavarok száma. Bürkerkamrában levő azon vértestek száma, amelyek a mikroszkóp látóterének kijelölt részébe (a kamra egy cellája) esnek. Sajtóhibák száma egy könyvlapon. Tűzesetek száma bizonyos körzetben bizonyos időtartam alatt. Ikerszületések száma adott kórházban fix időtartam alatt. Rögzített időintervallumban adott helyen észlelhető meteorok száma. Napfoltok száma bizonyos időtartam alatt. Bizonyos idő alatt elbomló rádioaktív atomok száma. Fix idő alatt egy számlálócsőre eső kozmikus részecskék száma. Egy áruházban bizonyos idő alatt eladott borotvapengék száma. Egy utcában bizonyos idő alatt behajtó autók száma. Egy hónap alatt a fővárosban történt öngyilkosságok száma. Ezeknek a példáknak egy részénél már egyszerű meggondolás is igazolja, vagy legalábbis nagyon vsz.-vé teszi POISSON-eloszlás fellépte feltételeinek teljesülését, más részénél kísérleti igazolás is szükséges. — Vegyük észre, hogy a fenti vsz. *csak a t időtartamtól függ!*

25. Egy telefonközpontba a 4. § 24. pl.-ban közölt feltételeknek megfelelően érkeznek a hívások. Tegyük fel, hogy a központ mindet fel tudja venni. Ha mindegyik híváskor T ideig beszélnek, mi lesz a vsz., hogy valamely t időpontban pont j beszélgetés van folyamatban?

26. A 4. § 25. fel. feltételei mellett mi annak a p vsz., hogy $> j$ számú beszélgetés lesz folyamatban a t időpontban?

27. A 4. § 24. pl. feltételei mellett annak a vsz., hogy Δt időintervallumban 2 vagy 2-nél több hívás fut be, $o(\Delta t)$. Határozzuk meg ezt részletesebben.

28. A 4. § 24. pl. eltételei mellett mi a vsz., hogy ha $t = 0$-kor kezdjük el regisztrálni a hívásokat, az első hívás t és $t + \Delta t$ között fut be?

Megoldás. A befutó hívások száma POISSON-eloszlású vsz. v. A szóban forgó esemény úgy valósulhat meg, hogy 0-tól t-ig egyetlen hívás sem jön (vsz. e. $e^{-\lambda t}$). t-től $t + \Delta t$-ig pedig $1, 2, \ldots, k, \ldots$ hívás jön. Utóbbi ellentettje az, hogy $(t, t + \Delta t)$-ben 0 hívás fut be. Ennek a vsz.-e $e^{-\lambda \Delta t}$, s így az eredeti eseményé $1 - e^{-\lambda \Delta t}$; a keresett együttes vsz. tehát $e^{-\lambda t}\,[1 - e^{-\lambda \Delta t}] = e^{-\lambda t}\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$. Annak a vsz., hogy az első hívás t és ∞ közt fut be, ily módon $\int_t^\infty e^{-\lambda t}\lambda\,dt = e^{-\lambda t}$, ami annak is a vsz., hogy 0-tól t-ig nem fut be hívás. Ezt már a 4. § 24. pl.-ban is megállapítottuk; ezzel eredményeinket is ellenőríztük. A feltételeken, levezetésen mit sem változtat, ha $t = 0$-nak épp egy hívás időpontját választjuk (az itt fellépő vsz.-ek *csak a szereplői időintervallumok hosszától függnek*, kezdőpontjától nem). Ekkor azonban $\lambda\, e^{-\lambda t}\,\Delta t + o(\Delta t)$ *annak a vsz.-e lesz, hogy két egymásra következő hívás közti időtartam hossza (jelöljük ξ-vel) t és $(t + \Delta t)$ közé esik. Ekkor ξ s. f.-e $\lambda\, e^{-\lambda t}$, e. f.-e pedig* $1 - e^{-\lambda t}$ (nyilván $t \geqq 0$; egyébként s. f. és e. f. $\equiv 0$). Ezt az e. f.-t *exponenciális* e. f.-nek nevezzük; egy exponenciális e. f.-ű folytonos vsz. v.-t (itt ξ-t) pedig *exponenciális eloszlásúnak* mondunk. Ilyen típusú folytonos vsz. v.-val még sokszor találkozunk.

29. A 4. § 24. pl. feltételei mellett mi a vsz. annak, hogy akkor, amidőn egy $(0, \tau)$ időintervallum $(0, t)$ $(t < \tau)$ szakaszában hívás nem futott be, a hátralevő időtartam alatt pont j fog befutni?

30. Egy H vastagságú rétegben véletlenszerűen elosztva $r \ll H$ sugarú gömböcskék vannak. Mi a vsz., hogy tetszőleges, a réteget merőlegesen átfúró egyenes egyetlen gömböt sem metsz (vö. fénysugár áthaladása portartalmú közegen!), ha a gömbök (pontosabban középpontjaik) száma valamely térrészben POISSON-eloszlású vsz. v.?

31. A 4. § 3. pl. módszerével határozzuk meg *a)* a hipergeometrikus és *b)* a negatív binomiális eloszlás maximumhelyét (és általában grafikonja menetét).

32. Bizonyos baktériumokat fertőtlenítőszer hatásának tesznek ki. Egyforma adagokból 1, 2, . . .-t juttatnak rájuk, és vizsgálják az elpusztultak számarányát. Ha annak a vsz., hogy egy adag valamely baktériumra hatással lesz („bevesz" egy adagot) p, és pontosan r adag hatása feltétlenül megöl egy baktériumot, mi a vsz., hogy egy baktérium *pont* az $r + k$-adik adag adagolásakor pusztul el? (Feltehető, hogy az adagok „bevétele" egymástól független.)

Megoldás. Legyen *A:* (a baktérium pontosan az $r + k$-adik adagra pusztul el, vagyis az $r + k$-adiknál „veszi be" r-edszer az adagot), *B:* ($r + k - 1$ adag közül $r - 1$-et „bevett"), *C:* (egy adagot „bevesz"), ekkor $BC = A$. Feltevés szerint B, C függetlenek, és $\mathbf{P}(C) = p \cdot \mathbf{P}(B)$ annak a vsz., hogy az $r + k - 1$ kísérlet közül valamelyik $r - 1$-ben a baktérium „bevette" az adagot, a többiben pedig nem; ez nyilván binomiális eloszlás segítségével adható meg és $= \binom{r+k-1}{r-1} p^{r-1} q^k$ $(q = 1 - p)$. Így tehát $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C) = \binom{r-1+k}{r-1} p^r q^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ — Feladatunktól elvonatkoztatva mindezeket így fogalmazhatjuk meg: Egy kísérlet eredményei legyenek A vagy $\overline{A}$. $\mathbf{P}(A) = p$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = q$, és jelölje a ξ vsz. v. $\xi = k$ értéke azt az eseményt, hogy A r-edszerre épp az $r + k$-adik kísérletben következik be $(k = 0, 1, \ldots)$. Ekkor $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{r-1+k}{r-1} p^r q^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$, vagyis ξ *negatív binomiális eloszlású vsz. v.*; ugyanilyen — mint vsz. v. — az az r-en felüli k adagszám, amelynél a feladatbeli baktérium épp elpusztul. — *Az előbb elmondott modell a negatív binomiális eloszlás keletkezésének szkémája.*

33. Egy rovargyűjtő meg akarja állapítani, milyen gyakorisággá fordul elő bizonyos területen egy lepkefajtának az átlagostól erősen eltérő egyede. Egymás után fogja a lepkéket a kérdéses fajtából, s mindnél megállapítja, a keresett ritka változat-e, vagy sem. Ha $p\%$-ban van a lepkék közt a ritka és az egyes lepkefogások függetleneknek tekinthetők egymástól, mi a vsz., hogy (a ritka fajtából) a B-edik lepkét pontosan a T-edik alkalommal fogja meg $(T = B, B + 1, \ldots)$.

34. A múlt háborúban bizonyos helyen az volt a tapasztalat, hogy egy speciális feladat végrehajtására kiküldött repülőgépek közül 5% nem tért vissza. Ezt a megfigyelést általában úgy értelmezték, hogy egy repülőgép 20-szor elindulhat az említett feladat végrehajtására, de azután már biztos, hogy nem tér vissza. Helyes-e ez az elképzelés? (Legyen p annak a vsz., hogy egy repülőgép egy kiküldetés után nem tér vissza, az egyes kiküldetések lefolyása legyen egymástól független. Számítsuk ki, általában mi a vsz., hogy a repülőgép n egymásutáni kiküldetést „túlél", de az $n + 1$-ediket már nem, és az eredményt alkalmazzuk a feladat esetére.)

35. Valamely alkatrész gyártásánál a kész darabok 6%-a az alkatrész vastagságának alsó toleranciahatára alatt van, 2%-a pedig a felső toleranciahatár felett. 1. Mi a vsz., hogy 100 kész alkatrész között x_1 darab vastagsága az alsó, x_2-é a felső toleranciahatáron túl van? 2. Mi a vsz., hogy 100-ból pont 6 kész darab vastagsága lesz a felső toleranciahatár felett (függetlenül az alsó toleranciahatár alatti darabok számától). 3. Mi a vsz., hogy 100-ból x meg nem felelő (toleranciahatár alatti vagy feletti) darab lesz. 4. Mi a vsz., hogy legfeljebb 5 meg nem felelő darab lesz a 100 között? (Az egyes darabok milyensége független a többiétől.)

36. Nagyszámú 1000 ohmos ellenállás vizsgálatából a következőt kapjuk: annak a vsz., hogy egy ellenállás tényleges értéke az elfogadható értékintervallumon alul van, p_1, azé, hogy felette van, p_2. Mi a vsz., hogy n számú hibás ellenállás lesz N találomra kiemelt között? Függetlenek-e az elfogadhatósági intervallum alatti és feletti értékű ellenállás-példányok számai az N darabon belül? (Az egyes ellenállások milyensége legyen független a többiétől.)

37. N db szemüveglencse közt N_1 fókusztávolsága megfelelő, N_2-é toleranciahatár alatt, N_3-é toleranciahatár felett van. Kiveszünk a kész lencsék közül találomra n-et. Mi a vsz., hogy köztük n_1 fókusztávolsága toleranciahatár alatt, n_2-é pedig toleranciahatár felett lesz? (Megengedjük, hogy bármelyik n darabot ugyanazzal a vsz.-gel vesszük ki.)

Megoldás. Az összes „lehetséges" n elemű minták száma $\binom{N}{n}$. A „kedvezők" azok, amelyekben n_1, illetőleg n_2 toleranciahatár alatti, illetve feletti darab és $(n - n_1 - n_2)$ megfelelő darab lesz. Az n_1 toleranciahatár alatti darabot az összes (N_1) ilyenből $\binom{N_1}{n_1}$-féleképpen vehetjük ki, a másik két fajtát pedig $\binom{N_2}{n_2}$, illetve $\binom{N - N_1 - N_2}{n - n_1 - n_2}$-féleképpen. A „kedvező eseteket" tehát összesen $\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\binom{N - N_1 - N_2}{n - n_1 - n_2}$-féleképpen állíthatjuk elő. A keresett vsz. tehát — a toleranciahatár alatti darabok ξ_1, a toleranciahatár feletti darabok ξ_2 és a toleranciahatárok közti darabok ξ_3 (mintabeli) számának $\mathbf{P}(\xi_1 = n_1,\ \xi_2 = n_2, \xi_3 = n_3)$ együttes vsz. eloszlása — $(n - n_1 - n_2 = n_3$ és $N - N_1 - N_2 = N_3$-at írva)

$$\mathbf{P}(\xi_1 = n_1,\ \xi_2 = n_2,\ \xi_3 = n_3) = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\binom{N_3}{n_3}}{\binom{N}{n}},$$

$$(N_1 + N_2 + N_3 = N;\ n_1 + n_2 + n_3 = n).$$

Hasonlít a hipergeometrikusra, ezért két dimenziós *polihipergeometrikus eloszlásnak* nevezik. n-dimenziós alakja értelemszerűen állítható elő.

5. §. A LEGGYAKORIBB ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK

a) **Normális eloszlásfüggvény**

Legyen ξ folytonos vsz. v., és legyen ξ e. f.-e,

$$F(x) \equiv \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-(t-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dt \qquad (\sigma < 0).$$

$F(x)$-*et* (m, σ) *paraméterű* **normális eloszlásfüggvénynek** *nevezzük.* Úgy is szokták mondani, hogy ξ *normális eloszlású* (m, σ) paraméterrel.

$F(x)$ folytonosan differenciálható, vagyis ξ-nek s. f.-e is van (**„normális sűrűségfüggvény"**):

$$\frac{dF}{dx} \equiv f(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \qquad (\sigma > 0)$$

Azonnal látható, hogy az s. f.-eknél megkövetelt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ s. f.-összefüggés teljesül. Egy e. f. tulajdonságai (pl. monoton nem csökkenő é. í. t.) $F(x)$-re könnyen igazolhatóan teljesülnek.

Ezzel az e. f.-nyel, illetve s. f.-nyel eddig csak a binomiális eloszlás közelítésekor találkoztunk. A 10. §-ban azonban látni fogjuk, hogy *már bizonyos elvi okokból is egyike a leggyakoribb e. f.-eknek* (bár legtöbbször közelítés, hogy egy ilyen e. f.-ű vsz. v. minden $(-\infty, \infty)$ értéket felvehet; értéke általában csak a végesben mozog, s ott ilyen e. f.-ű (s. f.-ű)). A vsz. számításban rendkívül fontos szerepe van. A normális e. f., illetve s. f. az $(x - m)/\sigma = t$ helyettesítéssel mindig visszavezethető az $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$, illetve a $\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ alakra (m különben is eltolással mindig 0-sá tehető).

A $\Phi(x)$ *és* $\varphi(x)$ *jelöléseket speciálisan ezekre a függvényekre használjuk a jövőben.* Nyilván $\varphi(x) = \varphi(-x)$. A normális e. f.-hez, hasonlóan a normális s. f.-re is, táblázatok vannak (l. a könyv végét).

Felsoroljuk a normális eloszlásfüggvényre vonatkozó leggyakoribb analitikus összefüggéseket. Ezekre akkor van főleg szükség, ha közelítőleg számolunk, vagy ha a táblá-

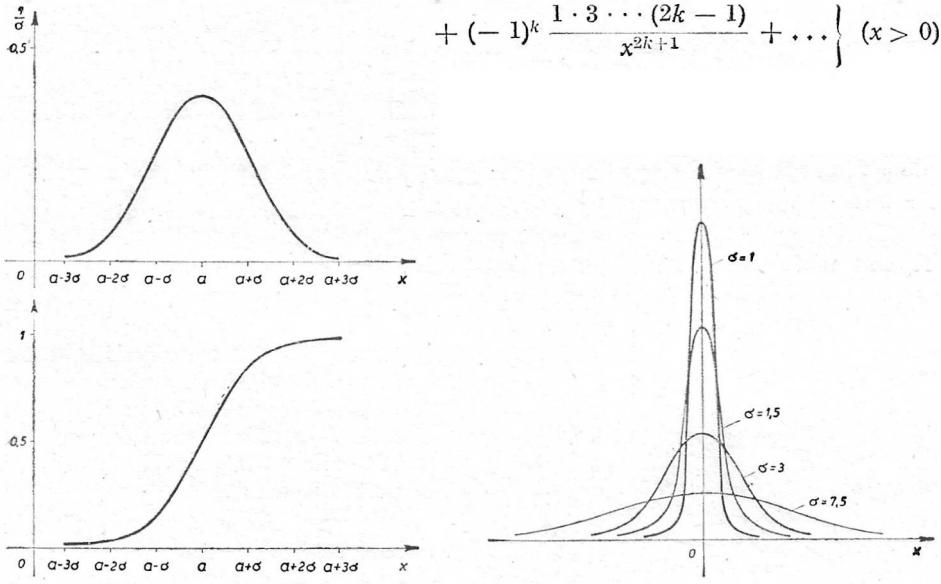
zatok adatai elégtelenek (a normális s. f., $\varphi(x)$ esetében meg Maclaurin-sorához folyamodhatunk).

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$\int_{-x}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\,\Phi(x) - 1$$

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right\} < 1 - \Phi(x) < \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

$$1 - \Phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^7} + \ldots + (-1)^k\,\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{x^{2k+1}} + \ldots\right\} \qquad (x > 0)$$



20. ábra

Ennek a *divergens* sornak a részletösszegei közrefogják $1 - \Phi(x)$ értékeit (a bal és jobb oldal különbsége negatív, ha k páratlan, és pozitív, ha k páros). További összefüggések:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x - \frac{x^3}{1!\,2\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\,4\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\,8\cdot 7} + \ldots + \frac{(-1)^k\,x^{2k+1}}{k!\,2^k\,(2k+1)} + \ldots\right]$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)} + \ldots\right]$$

($\Phi(x)$ visszavezethető a hibaszámításban használt valószínűségi, Gauss-féle vagy

hibaintegrálra, $\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$-re is (amely szintén táblázott függvény). Ugyanis:

$\Theta(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$, $\Phi(x) = (1/2)\,[\Theta(x/\sqrt{2}) + 1]$.

A normális e. f., illetve s. f. képét általában, ill. $m = 0$ és különböző $\sigma > 0$ értékeknél a 20. ábra mutatja.

b) **Többdimenziós normális eloszlásfüggvény**

A normális e. f. vagy s. f. értelmezése több dimenzióra könnyen általánosítható. A gyakorlatban legtöbbször 2 és 3 dimenziós esetével találkozunk. A 2 dimenziós esetben pl. így vezetjük be: Vizsgáljunk két független, normális eloszlású vsz. v.-t, ξ_1 és ξ_2-t, vagyis egy (ξ_1, ξ_2) kétdimenziós vsz. vektort. Ennek s. f.-e — ξ_1 és ξ_2 együttes s. f.-e — s. f.-eik szorzata lesz, vagyis

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\right]$$

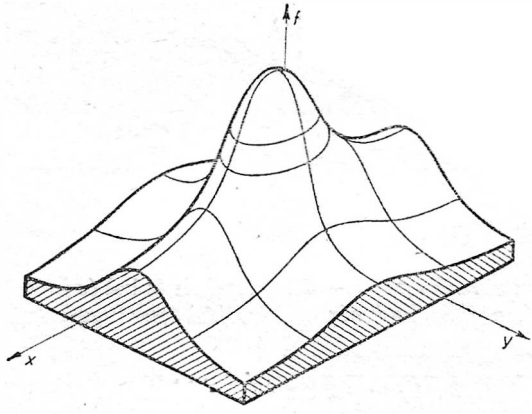
típusú ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, m_1, m_2 paraméterek). Az exponensben szereplő kvadratikus formát legáltalánosabb alakra hozva, az így kapott

$$\bar{f}(x, y) = D \cdot \exp\left[-\left\{(A\,(x - M_1)^2 + 2B\,(x - M_1)\,(y - M_2) + C\,(y - M_2)^2)\right\}\right]$$

s. f.-t nevezzük a legáltalánosabb **kétdimenziós normális sűrűségfüggvénynek.**

Típusát a 21. ábra mutatja. Az $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x, y)\,dx\,dy = 1$ feltételből $D = \sqrt{AC - B^2}/2\pi$.

Megjegyzendő, hogy $f(x, y)$-ra jutunk akkor is, ha $\bar{f}(x, y)$-ból indulunk ki, s aztán ortogonális transzformációt végzünk. Az eljárás megfordítva is elvégezhető: a végeredmény *független* változók együttes s. f.-e lesz (míg a kiindulásnál ez nem állt fenn).



21. ábra

$n > 2$ dimenzióban a fentihez hasonlóan értelmezzük a normális s. f.-t, tulajdonságai is hasonlók. Itt is használjuk azt a beszédmódot, hogy „*egy* $\vec{\xi}$ *vsz. vektor n dimenziós normális eloszlású*". Az e. f.-ek itt definíciójuk alapján könnyen felírhatók. A több dimenziós normális s. f.-ek is igen fontos szerepet töltenek be a vsz. számításban. (Fellépnek a polinomiális eloszlás közelítésekor is).

c) **Egyenletes eloszlásfüggvény**

A legegyszerűbb e. f. az, amelynek $f(x)$ s. f.-e létezik, és bizonyos intervallumon konstans, egyébként $\equiv 0$:

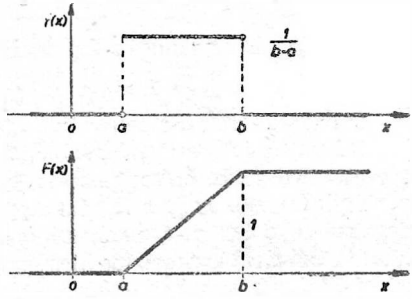
$$f(x) = \begin{cases} \text{konst, ha } a < x \leqq b \\ 0 \quad \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ követelményből egyébként következik, hogy a konstans $= 1/(b-a)$, vagyis az intervallum hosszának reciproka.

Az e. f. az ún. **egyenletes eloszlásfüggvény:**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} (x-a)/(b-a), & \text{ha } a < x \leqq b \\ 0, & \text{ha } x \leqq a \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases}$$

Egy ξ vsz. v.-ról, melynek ez az e. f.-e, illetve s. f.-e, azt mondjuk, hogy *egyenletes eloszlású* $(a, b]$ — n. Ilyen s. f.-t és e. f.-t mutat a 22. ábra. Azt is mondják, hogy $f(x)$ az **egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye**. Ilyennel találkoztunk már a 3. § 6. pl.-ban.



22. ábra

d) **Többdimenziós egyenletes eloszlásfüggvény**

Az egyenletes eloszlásfüggvény több dimenzióban hasonlóan értelmezhető: Jellemezzék egy kísérlet eredményeit a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k. A $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *vsz. vektort egyenletes eloszlásúnak nevezzük egy G tartományban, ha s. f.-e* **(a többdimenziós egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye):**

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1/|G|, & \text{ha az } (x_1, \ldots, x_n) \text{ pont hozzátartozik } G\text{-hez,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$|G|$ a tartomány mértékét jelenti. Az e. f.-re nem térünk ki.

Annak a vsz.-e tehát, hogy $\vec{\xi}$ végpontja a G valamely g részébe essék:

$$\int_g \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{|G|} \int_g \cdots \int dx_1 \cdots dx_n = |g|/|G|$$

$|g|$ a g tartomány mértéke.

Az általános eljárás tehát az ($\vec{\xi}$ egyenletes eloszlásának feltételezése mellett!), hogy megállapítjuk azon g tartomány mértékét, amelybe a feltételek szerint bele kell esnie $\vec{\xi}$ G-ben mozgó végpontjának („kedvező esetek"), és ezt a számot osztjuk G mértékével.

Kimutatható, hogy ha $\vec{\xi}$ $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n$ komponensei az n dimenziós tér valamely P pontjának általánosított (pl. polár-) koordinátái, és G-t úgy definiáltuk, hogy a ξ_k-k egymástól függetlenül bizonyos intervallumokat futhatnak be, továbbá P egyenletes eloszlású G-ben, akkor a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k függetlenek egymástól ($\vec{\xi}$ s. f.-e ekkor szétesik az egyes változóktól függő s. f.-ek szorzatára). A „kedvező esetek" g tartományát ekkor az definiálja, hogy $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bizonyos $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$

intervallumokba esnek; a megfelelő vsz.-ek szorzata adja meg annak vsz.-ét, hogy $\vec{\xi}$ a g-be esik.

e) **Geometriai valószínűségek**

Az utóbbi két tárgykörbe tartoznak a régebbi irodalomban annyit szereplő geometriai valószínűségek, amelyek tárgyalásunkban már semmi olyan különlegességet nem jelentenek, mint régen.

Az idevágó feladatok általános egydimenziós szkémája (a többdimenziós teljesen hasonló): Egy kísérlet eredményét a ξ folytonos vsz. v. jellemzi (s. f.-e $f(x)$; ξ értékei az $(a, b]$ intervallumot töltik ki. Mi a vsz.-e, hogy egy kísérletnél ξ értéke az $(a, b]$-ben foglalt $(\alpha, \beta]$ intervallumba fog esni? A megoldás nyilván $\mathbf{P}(\alpha \leqq \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$, amely $(\beta - \alpha)/(b - a)$, **ha** $f(x)$ $(a, b]$ — n egyenletes eloszlás s. f.-e; utóbbit régebben hallgatólagosan mindig feltették.

Példa: Az ún. Bertrand-probléma egyik változata: Egy körben találomra felveszünk egy húrt. Mi a vsz.-e, hogy hossza $\geqq$ mint a kör sugara (r)?

Nyilvánvaló, hogy a feladat ilyen megfogalmazásban hiányos. A példa nem adja meg sem azt a vsz. v.-t, amely a húr helyzetét jellemzi, sem ennek s. f.-ét. Ez eredményezte a példával kapcsolatos híres paradoxonokat. Ha a húr helyzetét pl. középpontjának távolsága jellemzi a kör középpontjától: ez lesz a ξ vsz. v. Ha még *feltesszük*, hogy ξ *egyenletes eloszlású* $(0, r]$-ben, a feladat már megoldható: Ekkor ti. így fogalmazható meg: Mi a vsz.-e, hogy ξ értéke éppen 0, és $r\sqrt{3}/2$ közé esik, — s erre már tudunk felelni. Ha a húr helyzetét más ξ vsz. v.-val jellemezzük (pl. egyik végpontja és az ebből húzott átmérő által bezárt szöggel), még (bizonyos intervallumon) egyenletes eloszlású ξ esetén is más eredményt kapunk, mint az előbb.

f) **Exponenciális eloszlásfüggvény**

Jellemezze egy kísérlet eredményét az a modell, hogy egy tetszőleges dimenziós tér valamely ν mértékű T tartományába egy R pont beleesik — $(R \in T)$ — vagy nem esik bele — $(R \notin T)$ — és álljon fenn:

1. $\mathbf{P}(R \notin T) = q_0$ csak ν-től függ, $q_0 = q_0(\nu)$, és $q_0(\nu)$ ν-nek differenciálható függvénye.

2. Ha T_1 és T_2 egymást nem metsző tartományok, az $(R \notin T_1)$ és $(R \notin T_2)$ események függetlenek.

Ekkor $q_0(\nu) = e^{-\lambda\nu}$ $(\lambda > 0$ konst., $\nu > 0$; egyébként $\equiv 0)$ Legyen most T a $(0, \infty)$ időtengely egy 0-nál kezdődő intervalluma, ennek mértéke (=hossza) t, és jelentse a τ vsz. v. egy az időtengelyre véletlenszerűen rádobott R pont koordinátáját. Ekkor $\mathbf{P}(R \notin T) \equiv \mathbf{P}(\tau \geqq t) = e^{-\lambda t}$, vagyis annak a vsz.-e, hogy a pont *ráesik* a t hosszúságú időintervallumra:

$$\mathbf{P}(\tau < t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (t > 0)$$

Ekkor azt mondjuk, hogy τ *exponenciális eloszlású* vsz. v., τ e. f.-e,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (t > 0; \quad \text{egyébként} \equiv 0)$$

pedig a λ **paraméterű exponenciális eloszlásfüggvény.** τ s. f.-e, az **ún. exponenciális sűrűségfüggvény** *nyilván*

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} \qquad (t > 0; \text{ egyébként} \equiv 0).$$

(Tágabb értelemben ugyanígy nevezzük a

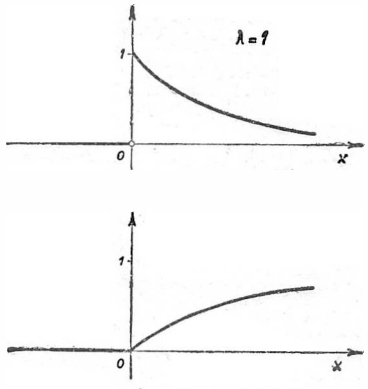
$$P(R \notin T) = 1 - q_0(v) = 1 - e^{-\lambda v}$$

e. f.-t, illetve s. f.-ét is.) Exponenciális s. f., illetve e. f. képét mutatja a 23. ábra.

Ezzel az e. f.-nyel sokszor találkozunk (pl. a radioaktív bomlásnál; l. a 4. § 28. pl.-t is), az utóbbiakban a POISSON-eloszláson keresztül vezettük be.

Vegyük észre a fő eltérést a POISSON-eloszlás feltevéseitől: Itt csak egyetlen pontról van szó, és általában nem független az, ami két egymást nem metsző tartományban történik (ha egyikbe beleesett a pont, a másikba már nem eshet!).

Az exponenciális e. f. és a POISSON-eloszlás közti mélyebb kapcsolatról a *B*) részben 1 sz majd szó.



23. ábra

g) Pearson-féle eloszlásfüggvények

Megemlítjük, hogy K. PEARSON* *a legismertebb, valamint a matematikai statisztikában legfontosabb sűrűségfüggvényeket mind be tudta foglalni a következő differenciálegyenlet megoldásai közé:*

$$\frac{y'}{y} = \frac{x + \alpha}{\beta x^2 + \gamma x + \delta};$$

az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ paraméterek speciális választásával megkapjuk az egyes tipikus s. f.-eket Ez a definiálás igen hasznos a matematikai statisztikában.

Később még számos nevezetes e. f.-nyel, illetve s. f.-nyel fogunk találkozni.

Azokat a vsz. e.-ok alapján bevezetett e. f.-eket, amelyek a gyakorlatban fontosak, a 4. §-ban már tárgyaltuk; a többi vsz. e.-hoz tartozók tárgyalása nem sok érdekeset nyújtana, s ezért mellőztük.

Példák és feladatok

1. Keressünk kapcsolatot a normális s. f. m, σ paraméterei és a görbe alaki tulajdonságai közt.

Megoldás. $f(x) = \exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right]/\sqrt{2\pi}\,\sigma$-ból $f'(x) = -(x-m)\,f(x)/\sigma^2$; $f(x) > 0$ felhasználásával következik, hogy $f(x)$-nek $x = m$-nél egyetlen maximuma van $-f''(x) = [(x-m)^2/\sigma^4 - 1/\sigma^2]\,f(x)$, amely $x = m \pm \sigma$-nál lesz 0, így tehát $m \pm \sigma$-ban van a görbének inflexiós pontja, azaz *a két inflexiós pont abszcisszáinak távolsága,* 2σ. (A görbe különben az $x = m$ pontban emelt merőlegesre szimmetrikus is.)

2. A 3. § 15., 16., 17. pl., illetve fel.-ban leírtakkal kapcsolatban Laplace még a következő feltevést is tette: $f(\omega) = C \exp\left[-\omega^2/2\sigma^2\right]$ (C, σ konst), vagyis a sebességkomponensek együttes s. f.-e normális s. f. Vizsgáljuk meg, mi lesz ezen $f(\omega)$ mellett annak a vsz.-e, hogy egy észlelt üstökös pályája ellipszis, ha — a matematikai kezelés könnyebbsége kedvéért — megengedjük, hogy ω akármilyen nagy értéket is felvehet ($M = \infty$)?

*Karl Pearson (1857—1936) angol matematikus és tudós.

3. Tegyük fel, hogy bizonyos célpontra kilőtt ágyúlövedékek becsapódási pontja, a (ξ, η) vsz. vektor végpontja, normális eloszlású a síkon $(1/2\,\pi\sigma^2)\exp[-(1/2)[(x-a)^2 + (y-b)^2]]$ s. f.-nyel, (a, b) a célpont koordinátái. Mi lesz a becsapódási hely és a célpont közti ϱ távolság mint vsz. v. s. f.-e?

Megoldás. Jelölje ϱ eloszlásfüggvényét $F(r)$; ekkor

$$F(r) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma^2} \iint\limits_{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r.} \exp\,[-(1/2)^2)\,\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}] \cdot dx\,dy$$

Vezessük be az $R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ és $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\,[(y-b)/(x-a)]$ polárkoordinátákat, akkor $F(r) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} R\,e^{-R^2/2\sigma^2}\,dR\,d\varphi = 1 - e^{-r^2/2\sigma^2}$, és így ϱ s. f.-e $(r/\sigma^2)\,e^{-r^2/2\sigma^2}$; ebből következik, hogy annak a vsz., hogy ϱr és $r + \Delta r$ (Δr igen kicsi) közé essék, kb. $r = \sigma$-nál maximális, ha a Δr-ek egyenlők.

4. A ξ vsz. v. értékei feküdjenek az (A, B) intervallumban, és legyen ξ e. f.-e $F(x)$. Mi lesz ξ e. f.-e azon feltevés mellett, hogy ξ értéke csakis az $[a, b)$ $(A \leqq a < b \leqq B)$ intervallumban mozoghat?

Megoldás. A $\mathbf{P}(\xi < x \mid a \leqq \xi < b) = F(x \mid a \leqq \xi < b)$ vsz.-et keressük, ez

$$\mathbf{P}(\xi < x,\, a \leqq \xi < b)/\mathbf{P}(a \leqq \xi < b) = \mathbf{P}(a \leqq \xi < x)/\mathbf{P}(a \leqq \xi < b) =$$

$$= (F(x) - F(a))/(F(b) - F(a)),$$

ha $(a \leqq x < b)$ és értelemszerűen $\leqq 0$, ha $x < a$ és $\leqq 1$, ha $x \geqq b$. Az ilyen e. f.-t *csonkított e. f.*-nek nevezzük; ha van $F(x)$-nek s. f.-e, $f(x)$ (és a feltétel melletti s. f.-e $f(x \mid a \leqq \xi < b)$ is létezik), nyilván $f(x \mid a \leqq \xi < b) = f(x)/\int_a^b f(x)\,dx$ $(a \leqq x < b)$ egyébként $\leqq 0$. Ennek alapján beszélhetünk *pl. csonkított normális e. f.-ről* (s. f.-e $\exp[-(x-m)^2/2\sigma^2]/\int_a^b \exp[-(x-m)^2/2\sigma^2]\,dx$ (a $\sqrt{2\pi}\,\sigma$ kiesett! é. i. t.). —

Fontos megjegyzés: A valóságban sok esetben csupán végtelen intervallumról végesre csonkított e. f.-nyel (s. f.-nyel) van dolgunk. Ha pl. testmagasság — mint vsz. v. — e. f.-éről (s. f.-éről) van szó, ez a vsz. v. nyilván csak véges értékeket vehet fel, *közelítés* tehát itt (arra támaszkodva, hogy a kísérleti adatokat *végesben* igen jól leírja) normális e. f.-nyel (s. f.-nyel) számolni, amely ∞-t is megenged a vsz. v. értékére. Jobb volna csonkított normális e. f.-nyel (s. f.-nyel) dolgozni, mivel azonban ezt matematikailag nehezebb kezelni, s nagy értékekre úgyis ≈ 0, *jó közelítésként és a kezelhetőség kedvéért* használjuk a $(-\infty, \infty)$-en értelmezett normális e. f.-t (s. f.-t). A segítségével levont következtetésekben is benne rejlik ez a közelítés. Erről nem szabad elfeledkezni.

5. Első közelítésben feltehetjük, hogy egy, az (y, z) síkban fekvő fémlap elektronjai ideális gáz atomjaiként viselkednek, és ezt a tulajdonságukat megtartják akkor is, ha a hőmozgás következtében már kiléptek a fémből. Ha egy elektron akkor lép ki a fémből, amidőn a fémlapra merőleges x tengely irányába eső sebességkomponense $\geqq \sqrt{E}$ (a fémre jellemző konstans), mi a $g(u, v, w)\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w + o(\Delta u \ldots)$ vsz. annak, hogy

egy kilépett elektron kilépés előtti sebességkomponensei $(u, u + \Delta u)$; $(v, v + \Delta v)$; $(w, w + \Delta w)$ közé estek (Δu stb. igen kis mennyiségek), ha a kinetikus gázelmélet alaptételeit az elektronokra kiterjesztve kiindulunk abból, hogy egy elektron ξ, η, ζ sebességkomponensei vsz. v.-k, amelyek s. f.-ei $f_\xi(u) = A e^{-\alpha u^2}$, $f_\eta(v) = A e^{-\alpha v^2}$ $f_\zeta(w) = A e^{-\alpha w^2}$ (A, α konst; emellett függetlenek a ξ, η és ζ)?

6. Egy rádióállomás minden órában pontos időt közöl; valaki találomra megnézi az óráját, de az megállt. Bekapcsolja a rádiót. Mi a vsz.-e, hogy legfeljebb 10 percet kell várnia az időjelzésre? (Tegyük fel, hogy az óranézés időpontja, ξ vsz. v., mely egy nap tartama alatt egyenletes eloszlású.)

7. Egy atommagon szóródó neutront kettőjük tömegközéppontjába helyezett koordinátarendszerben vizsgálva, a neutron egyenlő vsz.-gel haladhat tovább akármilyen irányba eső, az említett koordinátarendszer origójából felrakott elemi térszögben. Mi a vsz., hogy valamilyen irányban az említett origóból húzott x-tengely körül szimmetrikusan elhelyezkedő 2φ nyílásszögű kúpban fog szóródás után továbbhaladni?

8. γ sugárzás egy fotonja egy számlálócső sík falában kivált egy elektront. A kiváltott elektron R távolságot futhat be a fal anyagában, míg el nem nyelődik. Ha az elektron a keletkezési helytől kiindulva bármely irányban fekvő egyforma elemi térszögekben egyenlő vsz.-gel haladhat tova, és a fal belső oldalától számított x mélységben keletkezett, mi a vsz., hogy bejut a számlálócső belsejébe? (Engedjük meg, hogy a fal méretei nagyok R-hez képest.)

Megoldás. Rajzoljunk az x mélységű pontból R sugárral egy gömbfelületet. Ilyen távolságra biztosan eljut az elektron; ha közben kívül ért a falon, távolabb is. Feltételeink szerint az elektron iránya egyenletes eloszlású lesz a teljes térszögben (mondhatjuk: ezen a gömbfelületen). A számlálócső belsejébe jutása akkor történhetik meg, ha $x < R$, és ha az említett gömbfelületnek a számláló belseje felé eső része felé mutat az elektron iránya. A keresett vsz. tehát (az egyenletes eloszlás alapján) a számláló belsejébe eső gömbfelületrész (egy gömbsüveg) felszínének és a teljes gömb felszínének hányadosa, ami adataink mellett $2\pi R (R - x)/4\pi R^2 = (1/2)(1 - x/R)$.

9. Legyen egy A esemény bekövetkezésének ξ időpontja egyenletes eloszlású vsz. v. valamilyen ismeretlen $(0, T_1]$ intervallumban. Legyen $0 < t < T < T_1$ és $\mathbf{P}(0 \leqq \xi < T) = p$. T, t, p-t ismerjük. Ha a t időpontig A nem következett be, ismert adatainkkal kifejezve mi a vsz.-e, hogy a hátralevő $T - t$ idő alatt bekövetkezik?

10. Egy korongon nyílások vannak, amelyek alakját és elhelyezkedését nehéz megállapítani. Dobjunk a korongra N db apró sörétet, melyek pontnak foghatók fel a lyukak méreteihez képest. A sörétek közül M db átesik. Ha feltesszük, hogy a nyílások τ összterületének és a korong T területének hányadosa $\tau/T = \xi$ egyenletes eloszlású vsz. v. $(0, 1]$-en, és $(0, 1]$-et egyenlő elemi kis Δx szakaszokra osztjuk fel, kísérletünk alapján milyen $(x, x + \Delta x)$ intervallumba fog legnagyobb vsz.-gel esni ξ értéke? (Bármely sörét beesési pontja egyenletes eloszlású vsz. vektor.)

11. n egymás után következő lövésnél a lövedék minden alkalommal a célba csapódik be. Legyen egy találat vsz.-e, ξ, maga is vsz. v. a $(0, 1]$-en egyenletes eloszlással. Mi lesz a vsz., hogy az $(n + 1)$-edik lövés is találjon? Mekkora n-nél lesz ez a vsz. $\geqq 0{,}999$?

12. A klasszikus matematikai statisztikában szerepelt a következő probléma: Egyszerű alternatívát szolgáltató kísérletben a kívánt A esemény bekövetkezésének való-

színűsége legyen maga is ξ vsz. v., amelynek s. f.-e $p(x)$. Ha n kísérlet közül η-ban következett be A (η vsz. v.), mi lesz ξ feltételes s. f.-e az $\eta = k$ feltétel mellett? Hogyan alakul a megoldás, ha $p(x)$ a $(0, 1]$-ben konst, egyébként $\equiv 0$?

Megoldás. Jelölje ξ feltételes s. f.-ét az $\eta = k$ feltétel mellett $f(x \mid \eta = k)$. Azt tudjuk, hogy $\mathrm{P}(\eta = k \mid \xi = x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$. Ekkor

$$f(x \mid \eta = k) = \mathrm{P}(\eta = k \mid \xi = x)\, p(x) \Big/ \int_0^1 \mathrm{P}(\eta = k \mid \xi = x)\, p(x)\, dx =$$

$$= x^k (1 - x)^k\, p(x) \Big/ \int_0^1 x^k (1 - x)^{n-k}\, p(x)\, dx.$$ Ha $p(x)$ *egyenletes* eloszlású $(0, 1]$-en,

$$f(x \mid \eta = k) = \frac{\Gamma(n + 2)}{\Gamma(k + 1)\, \Gamma(n - k + 1)}\, x^k (1 - x)^{n-k} \quad (\text{ha } x \in (0, 1];\ \text{egyébként} \equiv 0)$$

Ez speciális esete az ún. *B(éta)-sűrűségfüggvénynek*, amelynek általános alakja

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} \quad (\alpha, \beta > 0,\ 0 \leqq x \leqq 1;\ \text{egyébként} \equiv 0)$$

Egy ilyen s. f.-ű vsz.v.-t *B(éta)eloszlásúnak* mondunk. Már mondtuk, hogy az elnevezés onnan ered, hogy $\int_0^1 x^{a-1} (1 - x)^{b-1}\, dx = \Gamma(a)\, \Gamma(b)/\Gamma(a + b)$ az Euler-féle *B(éta)-függvény*, illetve, hogy $\int_0^x y^{a-1} (1 - y)^{b-1}\, dy$ $(x \leqq 1)$ az ún. *nem teljes B(éta) függvény.*

Az eredmény tehát azt jelenti, hogy ha egyszerű alternatívánál nem ismerjük az esemény fellépte vsz.-t, hanem azt tudjuk, hogy az esemény n-ből k kísérletben következett be, és (ezen feltétel mellett) az ismeretlen vsz.-et vsz. v.-nak tekintjük, amelynek (feltétel nélküli $=$ *a priori)* s. f.-e *egyenletes*, akkor ezen vsz. v. feltételes s. f.-e a *B(éta)* s. f.

Mindez bizonyos módot nyújt arra, hogy a bekövetkezések számából a vizsgált esemény fellépésének vsz.-ére következtethessünk — ha efogadtuk, hogy a vsz. maga is vsz. változó (pláne, hogy egyenletes eloszlású). A módszert az is támogatni látszik — könnyen igazolhatóan —, hogy *B(éta)* s. f.-ünk k/n-nél éri el maximumát. *Az „a priori" eloszlással kapcsolatos feltevések azonban kifogásolhatók*, s ezért ezt a módszert (az ún. BAYES-*féle módszer)* ismeretlen vsz.-eknek relatív gyakoriságból való meghatározására ma már ritkán használják.

13. Az atomreaktorok elméletében találkozunk a következő problémával: Egy E_0 kinetikus energiájú neutron nekiütközik egy H-atommagnak, arról megváltozott kinetikus energiával tovább pattan („szóródik"), s egyenes vonalban addig halad tovább, amíg újabb magba nem ütközik; erről ismét megváltozott kinetikus energiával pattan tovább, é. í. t. Kimutatható, hogy azon feltétel mellett, hogy a neutron kinetikus energiája ütközés előtt $\varepsilon = E$ volt (ε általában vsz. v.), az ütközés utáni kinetikus energiája $\varepsilon' \leqq E$ egyenletes eloszlású vsz. v. lesz $(0, E]$-ben, $f(E' \mid \varepsilon = E) \equiv f(E' \mid E) = 1 \mid E)$

feltételes s. f.-nyel. Mi lesz az E_0 kezdeti kinetikus energiájú neutron kinetikus energiájának (amely nyilván vsz. v.) a s. f.-e n ütközés után?

14. Vezessük le az exponenciális eloszlásnál szereplő $q_0(v) = e^{-\lambda v}$ alaptörvényt a repetitóriumrészben közölt feltevések alapján.

Megoldás. Az exakt POISSON-eloszlás levezetéséhez hasonló eljárást alkalmazunk. Tekintsük a v mértékű T és a Δv mértékű, T-t nem metsző ΔT tartományt. A repetitóriumrész jelöléseit használjuk. Nyilván $\mathrm{P}(R \nmid T + \Delta T) = \mathrm{P}[(R \nmid T) \cdot (R \nmid \Delta T)$.] Az utóbbi események azonban feltevés szerint függetlenek, így tehát az egyes vsz.-eket $q_0(v + \Delta v)$, $q_0(v)$, $q_0(\Delta v)$-vel jelölve $q_0(v + \Delta v) = q_0(v)\, q_0(\Delta v)$. Képezzük a $[q_0(v + \Delta v) - q_0(v]/\Delta v$ differenciahányadost; $\dfrac{q_0(v + \Delta v) - q_0(v)}{\Delta v} = \dfrac{q_0(v)\,(q_0(\Delta v) - 1)}{\Delta v}$. Mivel 1 helyett $q_0(0)$-t is írhatunk (= biztos, hogy 0 mértékű tartományba nem eshet a pont), s a differenciálhatóság folytán $\Delta v \to 0$-ra térhetünk át, kapjuk $\dfrac{dq_0}{dv} = q_0 \left[\dfrac{dq_0}{dv}\right]_{v=0} = bq_0$ (b konst), vagyis $q_0(v) = c \exp(bv)$ (c konst). Mivel $q_0(0) = 1$, $c = 1$, és mert $q_0(v)$ vsz., s így $\leqq 1$, $b < 0$, tehát írhatjuk: $b = -\lambda$, és így $q_0(v) = e^{-\lambda v}$. — Megjegyzendő, elég volna annyit feltenni, hogy $q_0(v)$ monoton csökkenő függvény.

15. Egy szövőgép automatikusan megáll, ha legalább egy fonalszakadás történik. Legyen τ a gép megindulásától az első fonalszakadásig eltelt idő (a gépállások időtartamát persze nem számítjuk); τ vsz. v.; állapítsuk meg τ e. f.-ét azon feltételek mellett, hogy adott időintervallum alatt szakadás beállta nem függ attól, korábbi vagy későbbi-e ez az időintervallum; az, hogy korábbi időintervallum alatt nem történt szakadás, nem befolyásolja azt, hogy későbbi időintervallumban sem fog történni.

16. Egy autó $t = 0$-kor útkereszteződéshez érkezik. Mi a vsz., hogy várnia kell, és a $(t, t + \Delta t)$ időintervallumban indulhat csak tovább, ha odaérkezésekor a lámpa egyenlő vsz.-gel mutathat pirosat vagy zöldet (a sárgát nem számítjuk), és az az esemény, hogy a $t = 0$-ban pirosat mutató lámpa nem vált bizonyos időtartam alatt *a)* csak az időtartam hosszától függ, *b)* független attól, hogy egy közvetlenül megelőző időtartam alatt sem váltott a lámpa.

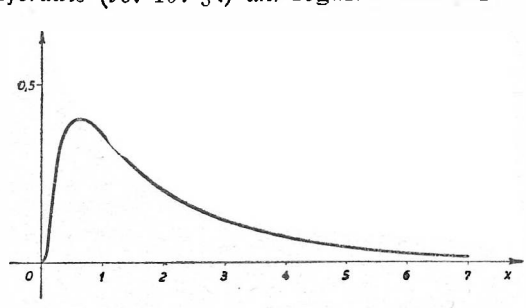
17. Igazoljuk, hogy a normális, illetve exponenciális eloszlás s. f.-e kielégíti a PEARSON-féle differenciálegyenletet.

18. *Nem* PEARSON*-féle a sokszor előforduló (vő. 10. §.) ún.* **logaritmiko-normális e. f., amelynek s. f.-e**

$$f(x) = \frac{e^{-(\log x - m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, x}$$

(ha $x > 0$; egyébként $\equiv 0$)

($m, \sigma > 0$ konst). — Egy ilyen s. f. grafikonja látható a 24. ábrán. Kimutatható, hogy bizonyos fajta homokszemek (mm-ben vett) átmérője, ξ oly vsz. v., amelynek s. f.-e logaritmiko-normális s. f. (Könnyebbség kedvéért végtelen átmérőt is meg-



24. ábra

engedünk, s. f.-ünk a valóságnak persze csak jó közelítése ekkor.) Ha a homokszemeket gömb alakúnak vesszük, a szemek összsúlyának közelítőleg hány százaléka lesz $< a$ mm átmérőjű?

Megoldás. Legyen az $< a$ átmérőjű szemek összes súlya M, az összes szemek súlya N. $100\,M/N$-t keressük. Annak a vsz., hogy egy szem átmérője $(x, x + \Delta x)$-be esik, $f(x)\,\Delta x + o(\Delta x)$, vagyis jó közelítéssel az ilyen átmérőjű szemek száma (S szem esetén) $S\,f(x)\,\Delta x$. Az $(x, x + \Delta x)$-be eső átmérőjű szemek összes súlya tehát (közelítőleg) $(s\,\pi\,x^2/6)\,s\,f(x)\,\Delta x$, ahol s a homok fajsúlya. A $< a$ átmérőjű szemek összes súlya, M ekkor (az említett közelítésben) $= \dfrac{S\,s\,\pi}{6}\displaystyle\int_0^a x^3 f(x)\,dx$, ugyanekkor az összes homok súlya, N pedig (elvileg akármilyen átmérőt megengedtünk) $\dfrac{S\,s\,\pi}{6}\displaystyle\int_0^\infty x^3 f(x)\,dx$. De

$$\int_0^a x^3 f(x)\,dx = \int_0^a \frac{x^2 \exp\left[-(\log x - m)^2/2\sigma^2\right]}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dx =$$

$$= e^{3m+9\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\log a} \frac{\exp\left[-\{y - (m+3\sigma^2)\}^2/2\sigma^2\right]}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dy =$$

$$= e^{3m+9\sigma^2/2}\,\Phi\left((\log a - m - 3\sigma^2)/\sigma\right); \qquad \left(\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dv\right).$$

Ezt felhasználva, a keresett százalék végül is jó közelítéssel $100 \cdot \Phi\left((\log a - m - 3\sigma^2)/\sigma\right)$ (minthogy $a = \infty$-nél az előbbi integrál értéke 1). Ennek a formulának különböző aprítási problémáknál van szerepe.

6. §. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK EGYES FÜGGVÉNYEINEK ELOSZLÁSFÜGGVÉNYE

a) Valószínűségi változó(k) függvényeinek eloszlásfüggvénye általában

Ebben a §-ban végig feltesszük, hogy a szereplő vsz. v.-k e. f.-ei szakaszonként simák. Vizsgáljuk most egy ξ vsz. v. valamely $\eta = \psi(\xi)$ függvényét, illetőleg a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k $\eta_i = h_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ függvényeit. (η, η_i vsz. v.-k !)

η, illetve η_i e. f. (együttes e. f.) stb.-ének meghatározásáról a következőket mondhatjuk:

1. Ha ξ diszkrét vsz. v., ξ lehetséges értékei $x_1, \ldots, x_k$ és $\psi(x_k) = y_k$, az η eloszlása

$$\mathbf{P}(\eta = y_k) = \mathbf{P}(\xi = x_k)$$

lesz; más y-okra $\mathbf{P}(\eta = y) = 0$. Ha több x_k-ra lesz $\psi(x_k) = y_k$, a jobb oldal az ezen x_k-kra vett $\sum \mathbf{P}(\xi = x_k)$ összeg.

2. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ diszkrét vsz. v.-k, s adva van együttes vsz. e.-uk, e vsz. v.-k m számú $\eta_i = h_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ függvényének együttes vsz. e.-át az előbbiek értelemszerű kiterjesztésével határozhatjuk meg.

3. Ha ξ folytonos vsz. v. $F(x)$ e. f.-nyel és $f(x)$ s. f.-nyel, $\psi(\xi)$ ξ értékkészletén monoton, és ugyanitt differenciálható (de $\psi'(x) \neq 0$!), — azaz a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű), $\eta = \psi(\xi)$ e. f.-e

$$G(y) = \begin{cases} F[\psi^{-1}(y)], \\ 1 - |F[\psi^{-1}(y)]|, \end{cases} \text{ ha } \psi(x) \text{ monoton } \begin{cases} \text{növekedő}, \\ \text{csökkenő}, \end{cases}$$

s. f.-e pedig

$$g(y) = f[\psi^{-1}(y)] \cdot \left| \frac{d\psi^{-1}}{dy} \right|$$

lesz (minden olyan y pontban, amelyhez tartozó x pontban $f(x)$ folytonos). $\psi(x)$ persze megszabja, mi η értelmezési tartománya. Ennek alapján egyszerűen levezethető sok olyan összefüggés, amelyet általában külön szoktak bebizonyítani (l. pl. 6. § 23. pl.).

4. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ folytonos vsz. v.-k, $F(x_1, \ldots, x_n)$, illetve $f(x_1, \ldots, x_n)$ együttes e. f.-nyel, illetve s. f.-nyel, ezen vsz.-k m számú $\eta_i = h_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ függvényének (vagyis m darab vsz. v.-nak) együttes e. f.-e, illetve $g(y_1, \ldots, y_n)$ s. f.-e általában nem adható meg explicite csak egyes speciális esetekben. Egyik ilyen eset a következő:

Legyen az előzőkben $m = n$. Ha most a h_i függvények a $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vsz. vektor értelmezési tartományában mindenütt egyértékűek és folytonosak, és — legfeljebb

bizonyos $(x_1, \ldots, x_n)$ pontokat kivéve, amelyek véges számú hiperfelületen vannak — az x_k — k $(k = 1, \ldots, n)$ szerinti parciális deriváltjaik folytonosak, továbbá, ha a ξ_i-k egyértelműen kifejezhetők az η_k-k segítségével $\xi_i = r_i(\eta, \ldots, \eta_n)$ alakban $(i, k = 1, \ldots, n)$, és $D = \left| \frac{\partial r_i}{\partial y_k} \right|$ az $r_i(y_1, \ldots, y_n)$ függvények függvénydeterminánsa, akkor minden olyan $(y_1, \ldots, y_n)$ pontban, amelynek az r_i függvényekkel előállított $(x_1, \ldots, x_n)$ hozzárendeltje nem fekszik egyetlen említett hiperfelületen sem és amelyben D véges,

$$g(y_1, \ldots, y_n) = f[r_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, r_n(y_1, \ldots, y_n)] \cdot |D|.$$

Az e. f.-ek összefüggésére itt nem térhetünk ki.

b) Valószínűségi változók összegének eloszlásfüggvénye

Most az előző bekezdésben 2. és 4. alatt említett problémák közül olyanokat vizsgálunk, amelyekben $m = 1$, vagyis a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ diszkrét vagy folytonos vsz. v.-k valamilyen $\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ függvényével foglalkozunk. η vsz. e.-át vagy e. f.-ét a gyakorlatban általában csak egyszerű $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ típusoknál tudjuk meghatározni. Pár ilyet veszünk most sorra.

Tekintsük először azt az esetet, amidőn $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Bebizonyítható, hogy

1. Ha ξ_1, ξ_2 diszkrét vsz. v.-k, melyek az $x_1, \ldots, x_N$, illetve $y_1, \ldots, y_M$ értékeket veszik csak fel, és együttes vsz. eloszlásuk

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = g_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, M),$$

akkor η vsz. eloszlása

$$\mathbf{P}(\eta = z) = \sum_{x_i + y_j = z} g_{ij}$$

(itt azokra az i és j-kre összegezünk, melyekre $x_i + y_i = z$; ha nincs ilyen pár, az összegen 0 értendő).

Független ξ_1 és ξ_2 vsz. v.-k esetén

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = \mathbf{P}(\xi_1 = x_i)\ \mathbf{P}(\xi_2 = y_j) \equiv p_i\, q_j$$

Ekkor tehát

$$\mathbf{P}(\eta = z) = \sum_{x_i + y_j = z} p_i\, q_j$$

2. Ha ξ_1 és ξ_2 folytonos vsz. v.-k, $g(x_1, x_2)$ együttes s. f.-nyel, akkor η s. f.-e,

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, z - x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(z - x, x)\, dx.$$

Ha ξ_1 és ξ_2 függetlenek, $g(x_1, x_2) \equiv p(x_1)\, q(x_2)$ és

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, q(z - x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(z - x)\, q(x)\, dx.$$

Az e. f.-ek ezekből már definíciójuk alapján levezethetők.

ξ_1 és ξ_2 függetlensége esetén η s. f.-éről azt mondjuk, hogy az a $p(x)$ és $q(x)$ függvények kompozíciója vagy **konvolúciója** *(jelben: $p * q$). (E. f.-eknél hasonlóan.) Ezzel tulajdonképp egy műveletet vezettünk be s. f.-ekre (e. f.-ekre).*

Két vsz. v. összegének e. f.-e (s. f.-e) akkor is értelmezhető, ha ξ_1 diszkrét és ξ_2 folytonos. Erre nem térünk ki.

E. f.-ek (s. f.-ek) konvolúciója igen fontos fejezete a valószínűségszámításnak. Később megismerkedünk majd egy olyan analitikus eszközzel, amellyel a konvolúciót bizonyos esetekben sokkal kényelmesebben végre tudjuk hajtani.

c) Valószínűségi változók szorzatának eloszlásfüggvénye

Tekintsünk ismét csak két vsz. v.-t, ξ_1 és ξ_2-t, és vizsgáljuk ezek $\eta = \xi_1 \xi_2$ függvényét. η e. f.-éről (s. f.-éről) a következőket állapíthatjuk meg:

1. Ha ξ_1 és ξ_2 diszkrét vsz. v., $x_1, \ldots, x_N$, illetve $y_1, \ldots, y_M$ lehetséges értékekkel, és

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = g_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, M)$$

akkor

$$\mathbf{P}(\eta = z) = \sum_{x_i y_j = z} g_{ij}$$

(azon i-kre és j-kre összegezünk, amelyekre $x_i y_j = z$; ha nincs ilyen pár, az összegen 0 értendő).

A független ξ_1-re és ξ_2-re szóló képlet ebből gépiesen adódik.

2. Ha ξ_1 és ξ_2 folytonos vsz. v.-k $g(x_1, x_2)$ együttes s. f.-nyel, η s. f.-e

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|}.$$

Ha ξ_1 és ξ_2 függetlenek, $g(x_1, x_2) \equiv p(x_1)\, q(x_2)$ és

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) q\left(\frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|}.$$

Az e. f.-ek ezekből gépiesen felírhatók.

d) Valószínűségi változók hányadosának eloszlásfüggvénye

Azt az egyszerű esetet tárgyaljuk még, amidőn $\eta = \xi_1/\xi_2$.

1. Ha ξ_1 és ξ_2 diszkrét vsz. v. és

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = g_{ij},$$

akkor

$$\mathbf{P}(\eta = z) = \sum_{x_i / y_j = z} g_{ij}$$

Független ξ_1 és ξ_2 esetét ebből gépiesen levezethetjük.

2. Ha ξ_1 és ξ_2 folytonos vsz. v.-k $g(x_1, x_2)$ együttes s. f.-nyel, akkor η s. f.-e.

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, g(x, zx)\, dx.$$

Független ξ_1 és ξ_2 esetén pedig $[g(x_1, x_2) \equiv p(x_1)\, q(x_2)]$

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\, q(zx)\, dx$$

Az e. f.-ek gépiesen felírhatók. A vsz. v.-k függvényeiről szóló tételek értelemszerűen kiterjeszthetők kettőnél több változó esetére is.

e) **Keverék** | *A teljes valószínűség tétele kapcsán jutottak egy másik, e. f.-ekre (s. f.)-ekre vonatkozó valószínűségszámítási művelethez, e. f.-ek, illetve s. f.-ek keveréséhez.* Ennek egyes aleseteit a következőképp definiáljuk (egyes szereplő számsorozatok tagjai esetleg bizonyos indextől kezdve mind 0-ok, vagyis az illető sorozat véges).

1. *A* $\Psi_1(x), \ldots, \Psi_n(x), \ldots$ *e. f.-ek* $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1\right)$ *súlyokkal vett* **keverékén** *az*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \Psi_n(x)$$

függvényt értjük. Ez maga is e. f.

2. Ha az előbbi $\Psi_n(x)$-eknek létezik $\psi_n(x)$ s. f.-ük, $F(x)$-é is létezik, és ez a

$$\frac{dF}{dx} \equiv f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\, \psi_n(x)$$

s. f. keverék.

3. Ha a t paramétertől függő $\Psi(x, t)$ e.f., amely tulajdonképp végtelen sok e. f.-t képvisel, a t paraméterben folytonos $(-\infty < t < \infty)$, és $p(t)$ egy s. f., akkor *a* $\Psi(x, t)$ *e. f.-ek* $p(t)$ *súlyfüggvényével vett* **keverékén** *az*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t)\, p(t)\, dt$$

függvényt értjük, mely maga is e. f.

4. Ha a $\Psi(x, t)$-knek van bármely szóba jövő t-nél $\psi(x, t)$ s. f.-ük, hasonlóan értelmezzük a

$$\frac{dF}{dx} \equiv f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t)\, p(t)\, dt$$

s. f. keveréket.

5. *A* $(q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \ldots)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *vsz.e.-ok* $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1\right)$ *súlyokkal vett* **keverékén** az

$$r_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, q_i^{(n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

mennyiségek összességét értjük. Az r_i*-k maguk is egy vsz. e. tagjai.*

6. Ha a t paramétertől függő $[q_1(t), q_2(t), \ldots]$ vsz. e., amely tulajdonképp végtelen sok vsz. e.-t képvisel, a t paraméterben folytonos $(-\infty < t < \infty)$, és $p(t)$ egy s. f., akkor *a* $[q_1(t), q_2(t), \ldots]$ *vsz. e.-ok* $p(t)$ *súlyfüggvénnyel vett* **keverékén** *az*

$$r_i = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \, q_i(t) \, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

mennyiségek összességét értjük. Az r_i*-k maguk is egy vsz. e. tagjai.*

5. és 6. a szereplő vsz.e.-okhoz rendelhető e. f.-ekből indulva ki, 1. és 2. alesetként nyerhető.

A $\Psi_n(x)$, $\psi_n(x)$, illetve $\Psi(x, t)$, $\psi(x, t)$ függvényeket, a $(q_1^{(n)}, \ldots)$, illetve $(q_1(t), \ldots)$ vsz. e.-okat *komponenseknek* is hívjuk.

Keverék keletkezését a következő, gyakorlatban sokszor szereplő szkémával szemléltethetjük: Legyen ξ vsz. v. A $\xi < x$ esemény bekövetkezhet az $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ teljes eseményrendszer eseményei valamelyikével együtt;

$$\mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi < x \mid A_n) \; \mathbf{P}(A_n)$$ (1. 2. § 33. pl.) és ez a $\mathbf{P}(\xi < x \mid A_n) = \Psi_n(x)$

komponensek $\mathbf{P}(A_n) = p_n$ súlyokkal vett $\mathbf{P}(\xi < x) = F(x)$ keveréke. A folytonos $p(t)$-hez vezető példát itt nem tárgyalunk. (Keverékre ad példát a 3. § 20 pl. is.)

f) **Véletlentől függő számú valószínűségi változó összegének eloszlásfüggvénye**

1. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ és ν független vsz. v.-k, $\mathbf{P}(\nu = n) = w_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ e. f.-e $\Phi_n(x)$, $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ *e. f.-e a következő:*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \Phi_n(x),$$

vagyis egy e. f. keverék.

η s. f.-e ebből értelemszerűen kapható.

2. Ha az előzőkben $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — *diszkrét vsz. v.-k*, és $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ vsz. e.-a, $\mathbf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n = x_i) = q_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, η *vsz. e.-ának tagjai*

$$r_i = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \, q_i^{(n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

vagyis $(r_1, \ldots)$ *egy vsz. e.-keverék.*

2. a szereplő vsz. e.-okhoz rendelhető e.f.-ekből indulva ki, 1. alesetként nyerhető.

Példák és feladatok

1. A repetitóriumrészben közölt feltételek mellett vezessük le egy ξ folytonos vsz. v. $\eta = \psi(\xi)$ függvénye e. f.-ének (s. f.-ének) képletét.

Megoldás. Legyen ξ e. f.-e (s.f.-e) $F(x)$, illetve $f(x)$, η e. f.-e, illetve s. f.-e $G(y)$, illetve $g(y)$, legyen továbbá a $\psi(x)$ függvény ξ értékkészletén monoton és differenciálható ($\psi'(x) \neq 0$ mellett!). Ekkor $G(y) = P(\eta < y) = P(\psi(\xi) < y)$. Mivel $\psi(x)$ kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést létesít, az utóbbi vsz. monoton növekedő $\psi(x)$ esetén $\mathbf{P}[\xi < \psi^{-1}(y)]$-nal, monoton csökkenő $\psi(x)$ esetén pedig $\mathbf{P}[\xi > \psi^{-1}(y)] = 1 - \mathbf{P}[\xi \leqq \psi^{-1}(y)]$-nal ekvivalens; utóbbi — mivel feltevéseink folytán $F(x)$ mindenütt folytonos — $1 - \mathbf{P}[\xi < \psi^{-1}(y)]$-nal egyenlő. Mindez azonban azt jelenti, hogy $G(y) = F[\psi^{-1}(y)]$ (ha $\psi(x)$ monoton növekedő), és $G(y) = 1 - F[\psi^{-1}(y)]$ (ha $\psi(x)$ monoton csökkenő). $g(y)$-z ezekből differenciálással kapjuk; az eredmény mindkét esetben: $g(y) = f[\psi^{-1}(y)] \left|\frac{d\psi^{-1}}{dy}\right|$. Persze, $\psi(x)$ alapján esetenként rögzíteni kell, mi lesz η [s így $g(y)$] értelmezési tartománya.

A repetitórium-rész *a)* bekezdésének 4. pontjához tanulságos illusztráció a következő: Legyen ξ_1 és ξ_2 együttes s. f.-e, $f(x, y)$ kétdimenziós normális s. f., azaz legyen

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{(x_1-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x_1-a)(x_2-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

$$(a, b, r, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0 \text{ konst}).$$

Határozzuk meg az η_1 és η_2 vsz. v.-k együttes s. f.-ét, $g(y_1, y_2)$-t, ha $\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}$, $\eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}$. Alkalmazzuk az említett *a)* bekezdés 4-ben közölt képletét: Nyilván $\xi_1 = (1/I)[a_{22}(\eta_1 - a_{13}) - a_{12}(\eta_2 - a_{23})]$ és $\xi_2 = (-1/I)[a_{21}(\eta_1 - a_{13}) - a_{11}(\eta_2 - a_{23})]$, ahol $I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; a függvénydeterminánsa pedig $(1/I)$, vagyis $g(y_1, y_2) =$

$$f\{(1/I)[a_{22}(y_1 - a_{13}) - a_{12}(y_2 - a_{23})], (-1/I)[a_{21}(y_1 - a_{13}) - a_{11}(y_2 - a_{23})]\} \cdot |1/I|.$$

Ha az itt szereplő exponenciális függvény kitevőjét részletesen kiírjuk és y_1 és y_2 hatványai szerint rendezzük, azt látjuk, hogy az a_{ik} $(i, k = 1, 2)$ konstansok alkalmas választásával mindig elérhető, hogy $g(y_1, y_2)$ két, külön-külön csak y_1, illetve csak y_2-től függő függvény szorzata legyen. Ez azonban azt jelenti, hogy az ehhez felhasznált a_{ik}-kal ξ_1 és ξ_2-n végrehajtott transzformációnál nyert η_1 és η_2 vsz. v.-k *függetlenek*. Két nem független vsz. v., melyek együttes s. f.-e kétdimenziós normális s. f., alkalmas lineáris transzformációval mindig átvihető két független vsz. v.-ba. Ez a tétel általánosítható n $(= 2, 3, \ldots)$olyan vsz. v. esetére is, amelyek együttes s. f.-e n dimenziós normális s. f.

2. Ha a ξ vsz. v. e. f., illetőleg s. f.-e, $F(x)$, illetve $f(x)$ adott $(-\infty < x < \infty)$, mi lesz $\eta = a\xi + b$ (a, b konst) e. f.-e (s. f.-e)? — Eredményünk felhasználásával oldjuk meg a következő, a stellárstatisztikában szereplő problémát: tekintsük a Naptól kiinduló ω térszögben levő összes csillagokat. Legyen $A(m)\,\Delta m + o(\Delta m)$ ezek közt azon csillagok száma, amelyek látszólagos magnitudója (csillagászati nagyságrendje) az $(m, m + \Delta m)$ intervallumba esik [egyszerűség kedvéért: $(-\infty < m < \infty)$], $\varphi_r(M)\,\Delta M + o(\Delta M)$ annak a vsz.-e, hogy tetszőleges, a Naptól r távolságban levő

csillag abszolút magnitudója az $(M, M + \Delta M)$ intervallumba esik [szintén: $(-\infty < M < \infty)$], $D(r)\,\omega\, r^2\,\Delta r + o(\Delta r)$ pedig a Naptól minden pontjában r (parsec) távolságban levő, az ω térszöget kitöltő Δr vastag térrészben levő csillagok száma [csak r és Δr-től függőnek tételezve fel ezt; $(0 \leqq r < \infty)$]. Határozzuk meg $A(m)$-et $\varphi_r(M)$ és $D(r)$ segítségével, ha egy r távolságban levő csillag m látszólagos és M abszolút magnitudója közt az összefüggés $M = m - 5 \log r + 5$, és ha az egyes csillagok egyforma vsz.-szel lehetnek meghatározott tulajdonságúak (vsz.-eket helyettesíthetünk relatív gyakoriságokkal!).

3. A Planck-féle sugárzási formula szerint egy abszolút fekete test a $(\nu, \nu + \Delta\nu)$ frekvenciaintervallumban igen kis $\Delta\nu$ esetén jó közelítéssel $p(\nu)\,\Delta\nu = [a\,\nu^3/(e^{b\nu} - 1)]\,\Delta\nu$ $(\nu \geqq 0$; egyébként $\equiv 0)$ energiát sugároz ki $(a, b$ konst). A dolog úgy is felfogható, mintha a frekvencia egy ξ vsz. v. volna $(0 \leqq \xi < \infty)$, (konstanstól eltekintve) $p(\nu)$ s. f.-nyel. Ennek a felfogásnak az alapján számítsuk ki, mennyi energiát sugároz ki a test a $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ igen kis hullámhossz-intervallumban?

4. Legyen ξ $m, \sigma > 0$ paraméterű normális eloszlású vsz. v. Mi lesz $\eta = e^{\xi}$ s. f.-e?

Megoldás. Alkalmazhatjuk vsz. v. függvénye s. f.-ének képletét; η csak nem negatív értékeket vehet fel. Egyszerű számolás után [a képletben szereplő $\psi(x)$-re e^x-et véve] η s. f.-e

$$g(y) = \frac{e^{-(\log y - m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, y} \qquad (\text{ha } y > 0;\ \text{egyébként} \equiv 0)$$

(Ezt a s. f.-t, mint már említettük, **logaritmiko-normális** (logaritmikusan normális, lognormális) **sűrűségfüggvénynek** nevezik; sokszor előfordul a gyakorlatban. Röviden így mondják: η *log* (aritmiko) *normális eloszlású vsz. v.*)

5. Egy tükrös galvanométer tekercsének helyzetét jellemezze a nyugalmi helyzetben levő, illetve elfordult tükör normálisai által bezárt φ szög $(-\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi/2)$. A tükörről fénysugár vetődik rá egy skálára, amely a tükör nyugalmi helyzetében merőleges a fénysugárra. A galvanométerbe bocsátott áram hatására a tükör elfordul. Tegyük fel, hogy az elfordulás φ szöge egyenletes eloszlású vsz. v. a fenti intervallumon. Mi a vsz.-e, hogy a fénysugár a skála $(x, x + \Delta x)$ intervallumába mutat $(-\infty < x < \infty)$? (A 0 legyen a skálán ott, ahová a fénysugár nyugalmi helyzetben mutat.)

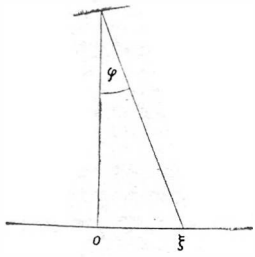
Megoldás. Legyen a skála és a tükör-középpont távolsága r (25. ábra). Ha φ vsz. v., ξ is az, és $\xi = r \operatorname{tg} \varphi$. Ez a függvény monoton nő φ értékkészletén, és deriváltja $\neq 0$, így tehát alkalmazhatjuk a vsz. v. függvényének s. f.-éről szóló tételt. φ s. f.-e $f(\varphi) = c$ (konst), amelynek értéke $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} c\, d\varphi$-ből $c = 1/\pi$. Ha $\psi(\varphi) = r \operatorname{tg} \varphi$, $\psi^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg}\,(x/r)$, és az említett tétel alapján ξ s. f.-e $g(x) = (1/\pi\, r)\,(1/[1 + x^2/r^2])$.

Ez az ún. CAUCHY-**féle valószínűség-sűrűségfüggvény** egy esete. Alakját a 26. ábra mutatja; a görbe az y tengelyre szimmetrikus.

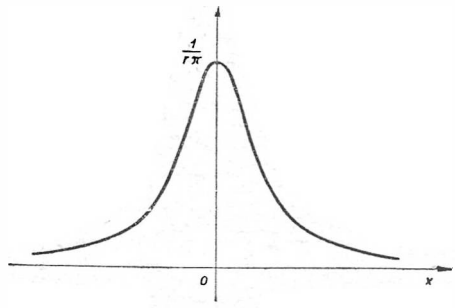
E s. f. legáltalánosabb alakja

$$f(x) = \frac{1}{\pi\,\sigma}\,\frac{1}{1 + (x - m)^2/\sigma^2} \qquad (m, \sigma > 0 \text{ konst}).$$

Egy ily s. f.-ű vsz. v.-t CAUCHY-*eloszlásúnak* hívnak.



25. ábra



26. ábra

6. Egy állócsillagnak a legközelebbi szomszédjától való távolsága egy ϱ vsz. v., $f(r) = 4\pi r^2 s \exp[-4\pi s r^3/3]$ ($r \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$) s. f.-nyel (s az átlagos csillagsűrűség). Határozzuk meg annak a vsz.-ét, hogy egy csillagra legközelebbi szomszédja által gyakorolt gravitációs vonzóerő abszolút értéke F és $F + \Delta F$ közé esik. (A csillagok tömege legyen egyformán M; ha a legközelebbi szomszéd távolsága r, az említett erő abszolút értéke $F = GM r^{-2}$, ahol G konst.)

7. Az 5. § 5. fel. feltételei mellett tegyük fel, hogy a kilépő elektron η és ζ sebességkomponense kilépés után is változatlan, ξ sebességkomponense azonban ξ'-vé válik, és $\xi^2 - \xi'^2 = E$ (konst). Mi lesz a sebességkomponensek vsz. s. f.-e, $h(u, v, w)$ kilépés után?

8. A $(-\infty, \infty)$ értékkészletű ξ vsz. v. e. f.-e (s. f.-e) ismeretében számítsuk ki az $\eta = |\xi|$ vsz. v. e. f.-ét (s. f.-ét).

Megoldás. Idevágó formulánkat nem alkalmazhatjuk, mert η nem monoton ξ egész értékkészletén. Az e. f. közvetlen kiszámításához nyilván elég $\mathbf{P}(\eta < y) = \mathbf{P}(|\xi| < y)$-t keresni (ez csak $y > 0$-ra nem $\equiv 0$; $|\xi|$ csak $\geqq 0$ értékeket vehet fel!). De ez $= \mathbf{P}(-y < \xi < y) = \mathbf{P}(\xi < y) - \mathbf{P}(\xi \leqq -y)$. Ha tehát ξ e. f.-e $F(x)$ és η-ét $G(y)$-nal jelöljük, a fentiek és az e. f. definíciója alapján folytonos $F(x)$-nél $F(y) - F(-y)$ ($y \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$). Ha ξ, illetve η s. f.-ei $f(x)$, illetve $g(y)$ az előzőkből $g(y) = f(y) + f(-y)$, ($y \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$), ami páros $f(y)$ függvény esetén $2f(y)$-ba megy át.

9. A $(-\infty, \infty)$ értékkészletű ξ vsz. v. s. f.-e ismeretében számítsuk ki $\eta = \xi^2$ e. f.-ét (s. f.-ét).

Megoldás: Legyen ξ e. f.-e (s. f.-e) $F(x)$ [$f(x)$], η-é $G(y)$ [$g(y)$]. Mivel $\xi^2 = |\xi|^2$, $|\xi|$ e. f.-e (s. f.-e) alapján fogjuk $\xi^2 = \eta$ e. f.-ét (s. f.-ét) kiszámítani. Az előző feladat alapján $|\xi|$ e. f.-e, illetve s. f.-e $H(z) = F(z) - F(-z)$, illetve $h(z) = f(z) - f(-z)$ ($z \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$). $|\xi|$ $(0, \infty)$ értékkészletén azonban $|\xi^2|$ már monoton nő, s így alkalmazhatjuk általános formuláinkat, amelyek alapján [$\psi(|\xi|) = |\xi|^2 = \xi^2$-tel] $G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$ (ha $y \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$), és $g(y) = [f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})](1/2\sqrt{y})$ (ha $y \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$). Páros $f(x)$ esetén $g(y) = f(\sqrt{y})/\sqrt{y}$ ($y \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$).

10. Legyen ξ egy vsz. v, melynek értékkészlete $(0, \infty)$. Határozzuk meg $\eta = +\sqrt{\xi}$ e.f.-ét (s.f.-ét).

Megoldás. Legyen ξ e. f.-e (s.f.-e) $F(x)$ $[f(x)]$, η-é $G(y)$ $[g(y)]$. η csak nem negatív értékeket vehet fel; ezt figyelembe véve alkalmazhatjuk a vsz.v. függvényének e. f.-éről (s. f.-éről) szóló tételünket; az ottani $\psi(x)$-nek $\sqrt{x}$ felel meg. Végül is azt kapjuk, hogy $G(y) = F(y^2)$ (ha $y \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$) és $g(y) = 2f(y^2) \cdot y$ (ha $y \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$).

11. Érdekes összehasonlítani az előzővel a következő feladatot: Valamely t időtartam alatt egy számlálócsőbe érkező kozmikus sugárzásbeli korpuszkulák száma ξ, legyen λ paraméterű POISSON-eloszlású vsz. v. Állapítsuk meg $\eta = +\sqrt{\xi}$ vsz. eloszlását.

12. Egy ξ folytonos vsz. v. nem normális eloszlású. Milyen feltételek mellett és milyen $\eta = \psi(\xi)$ transzformációval érhető el, hogy η már normális eloszlású legyen?

Megoldás. Vsz. v. függvényének e. f.-ére, illetve s. f.-ére vonatkozó tétel mellékfeltételeinek nyilván fenn kell állania; ha tehát ξ értékkészlete az (a, b) intervallum, $\psi(x)$-nek (a, b)-n monotonnak és differenciálhatónak $[\psi'(x) \neq 0$ mellett ! $]$ kell lennie. Ha most ξ e. f.-e, illetve s. f.-e $F(x)$, illetve $f(x)$, és η-é $G(y)$, illetve $g(y)$, vsz. v. függvénye e. f., illetve s. f.-e képletének alapján $G(y) = F[\psi^{-1}(y)]$, ha $\psi(x)$ monoton növekedő, és $G(y) = 1 - F[\psi^{-1}(y)]$, ha $\psi(x)$ monoton csökkenő, továbbá $g(y) = f[\psi^{-1}(y)] \left| \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial y} \right|$; ha csak $F(x)$-et ismerjük, arra támaszkodunk, hogy $G(y)$-nak normális e. f.-nek kell lennie (mondjuk, $\int_{-\infty}^{y} \frac{\exp[-(v-m)^2/2\sigma^2]}{\sqrt{2\pi}\sigma} dv$ alakkal).

Ha előre kikötjük, hogy $\psi(x)$ növekedő vagy csökkenő legyen, az előbbiekből $\psi^{-1}(y)$-ra egy függvényegyenletet kapunk; ennek olyan megoldását kell keresni, amelynek inverze a $\psi(x)$-re fentebb tett megkötéseknek is eleget tesz, és ξ értékkészlet intervallumát $(-\infty, \infty)$-be viszi át ξ értékkészlet intervalluma $(-\infty, \infty)$-re is kiterjeszthető, ha egyes ξ értékekhez 0 vsz.-et rendelünk). Külön kérdés, hogy növekedőnek vagy csökkenőnek tételezzük-e fel $\psi(x)$-et; ennek taglalására itt nem térhetünk ki. Ha $f(x)$-et is ismerjük, arra támaszkodunk, hogy $g(y)$-nak normális s. f.-nek kell lennie, (mondjuk, $\exp[-(y-m)^2/2\sigma^2]/\sqrt{2\pi}\sigma$ alakkal). Ebből $\psi^{-1}(y)$-ra ismét egy függvényegyenletet kapunk; megoldását illetőleg ugyanaz a helyzet, mint az e. f.-ek alapján történő vizsgálatnál. A megoldást képező $\psi(x)$-nek (a, b)-t $(-\infty, \infty)$-be is át kell vinnie. — A gyakorlatban általában az a helyzet, hogy $F(x)$ vagy $f(x)$ grafikonja van adva (esetleg ennek csak ekvidisztans abszcisszájú pontjai). Feltesszük, hogy ξ bizonyos (általunk választott) $\psi(\xi) = \eta$ függvénye normális eloszlású vsz. v. Ezután az ismert formulák segítségével előállítjuk η $G(y)$ e. f.-ét vagy $g(y)$ s. f.-ét. Ezek normális voltát kell ellenőrizni. $G(y)$ ellenőrzése igen könnyű az ún. *Gauss-papír* segítségével. Ez olyan skálázású, merőleges egyenesekből álló hálózat, ahol a vízszintes skála egyenletes, a függőleges pedig a $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv$ normális e. f. *inverze* szerint van

felrakva. Ha tehát $G(y)$ általunk kapott értékeit ilyen Gauss-papírra felrakjuk, és $G(y)$ *normális e. f.*, a felrakott pontok *egy egyenesben helyezkednek el* (akármilyen m és σ paramétere van is a normális e. f.-nek). Ez a jelenség igazolja tehát $G(y)$ normális e. f. voltát, s így az alkalmazott transzformáció helyes választását. Ellenkező esetben más transzformációval próbálkozunk. $g(y)$ normális s. f. voltának ellenőrzése így mehet: ha $g(y)$ szimmetrikus egyetlen M maximumhely körül, utóbbit egy $\exp[-(y-M)^2/2\sigma^2]/\sqrt{2\pi}\,\sigma$ normális s. f. M-jének tételezzük fel, az adatokat pedig ezen függvény értékeinek. Ekkor pár adatból σ-t is kiszámíthatjuk (a függvény alakja felhasználásával); ezután ellenőrizzük, megkapjuk-e az így nyert M-mel és σ-val a többi grafikonpontot is. Nem szimmetrikus $g(y)$-nál, vagy ha a számított és a tapasztalati grafikonpontok nem esnek egybe, más transzformációval próbálkozunk. Világos, hogy ha megtaláltuk a kellő transzformációt, ξ (kiindulási) s. f.-ének, illetve e. f.-ének analitikus kifejezését is megadhatjuk.

13. Egy vektor essék egyenlő vsz.-gel a kezdőpontjából felrakható egyenlő elemi térszögek bármelyikébe; ekkor azt mondjuk, hogy végpontja egyenletes eloszlású az általa leírt gömbfelületen. Nyilvánvaló, hogy annak a vsz.-e, hogy a végpont a gömbfelület bárhol elhelyezkedő T tartományába esik, arányos lesz ekkor T mértékével. Adjunk meg egy irányított félegyenest a vektor kezdőpontjából. Mi lesz a s. f.-e a vektor ezen félegyenesre való vetületének?

Megoldás. A közvetlen meggondolás a legegyszerűbb: Induljon ki a vektor az origóból, és legyen a hossza r, a vetület pedig valamilyen ξ vsz. v. Elég meghatározni $\mathbf{P}(x \leqq \xi < x + \Delta x)$-t. Ez annak a vsz.-e, hogy a vektor végpontja abba a gömbövbe esik, amelyet a kezdőponttól x, illetve $x + \Delta x$ távolságban az irányított félegyenesre merőlegesen álló síkok a gömbből kimetszenek. Ez a vsz. feltevés szerint arányos a szóban forgó gömböv felszínével, vagyis $= c[2\pi r\,\Delta x + o(\Delta x)]$ (c konst), azaz ξ s. f-e $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [\mathbf{P}(x \leqq \xi < x + \Delta x)/\Delta x] = c\,2\pi r$ $(-r < x \leqq r$; egyébként $\equiv 0)$. Igy tehát a ξ egyenletes eloszlású vsz. v. $(-r, r]$-en. Az $\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 1$ kikötésből $c = 1/4\pi r^2$, és így $f(x) = 1/2\pi r$ $(-r^2 < x \leqq r$; egyébként $\equiv 0)$.

14. Legyen a ξ szakaszonként sima eloszlású vsz. v. e. f.-e $F(x)$, s ennek deriváltja sehol se legyen 0 $(-\infty < x < \infty)$. Mi lesz az $\eta = F(\xi)$ vsz. v. e. f.-e?

Megoldás. Legyen η e. f.-e $G(y)$; alkalmazhatjuk vsz. v. függvénye e. f.-ének képletét: ezzel $G(y) = F[F^{-1}(y)] = y$, ha $0 < y \leqq 1$; nyilván $y < 0$, illetve $y > 1$-re $G(y) \equiv 0$, illetve $\equiv 1$. η tehát egyenletes eloszlású vsz. v. a $(0, 1)$ intervallumon. Ennek a ténynek a matematikai statisztikában van szerepe; ennek alapján számos vsz. v.-t át lehet transzformálni egyenletes eloszlásúvá.

15. Legyen $P_t(k)$ annak a vsz.-e, hogy egy telefonközpontba t idő alatt k hívás érkezik be $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Ha egymás után következő időtartamok alatt befutó hívások számai egymástól függetlenek, hogyan fejezhető ki $P_t(k)$ segítségével annak a vsz.-e, hogy $2t$ időtartam alatt s hívás fog befutni?

16. Mi lesz az eloszlása két (λ, illetve μ paraméterű) POISSON-eloszlású, független vsz. v. összegének?

Megoldás. Legyen a két vsz. v. ξ_1 és ξ_2. Feltevés szerint $\mathbf{P}(\xi_1 = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ és $\mathbf{P}(\xi_2 = l) = e^{-\mu}\mu^l/l!$ $(k,\ l = 0, 1, \ldots)$. A keresett vsz.-e. tagjai $(n = 0, 1, \ldots)$

$$\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 = n) = \sum_{r=0}^{n} \mathbf{P}(\xi_1 = r)\,\mathbf{P}(\xi_2 = n - r) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (e^{-\lambda}\lambda^r/r!)\,(e^{-\mu}\mu^{n-r}/(n-r)!) = (e^{-(\lambda+\mu)}/n!) \sum_{r=0}^{n} \frac{n!\,\lambda^r\mu^{(n-r)}}{r!\,(n-r)!} =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda + \mu)^r/n!$$

Újból Poisson-eloszlást kapunk, csak $\lambda + \mu$ paraméterrel (a paraméterek összegeződtek).

17. Igazoljuk, hogy a k-adrendű negatív binomiális eloszlás k számú független, egyforma paraméterű geometriai eloszlású vsz. v. összegének eloszlása.

18. Legyen a (ξ, η) vsz. vektor együttes s. f.-e, $f(x, y)$ normális, azaz legyen $f(x, y) = \left(\sqrt{AC - B^2}/2\pi\right)$ exp $[-(1/2)\ [A\,(x - M_1)^2 + 2B\,(x - M_1)\,(y - M_2) + C\,(y - M_2)^2]]$. (Tudjuk, hogy ξ és η függetlensége esetén $B = 0$, s ekkor ξ és η külön-külön normális s. f.-ű, M_1, $1/\sqrt{A} = \sigma_1$, illetve M_2, $1/\sqrt{C} = \sigma_2$ paraméterekkel.) Számítsuk ki $\xi_1 + \xi_2$ s. f.-ét.

Megoldás. Vsz. v.-k összege s. f.-ének képlete értelmében

$$\zeta = \xi_1 + \xi_2 \text{ s. f.-e } g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{AC - B^2}}{2\pi} \exp\,[-(1/2)[A(x - M_1)^2 +$$

$$+ 2B\,(x - M_1)\,(z - x - M_2) + C\,(z - x - M_2)^2]\,dx.$$

Ez az integrál visszavezethető az

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\,[-(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)]\,dx = \left(\sqrt{\pi/\alpha}\right) \exp\,[(\beta^2 - \alpha\gamma)/\alpha] \quad (\alpha > 0)$$

integráltípusra. Ennek alapján végül is

$$g(z) = \left(\sqrt{AC - B^2}/\sqrt{2\pi\,(A + 2B + C)}\right) \exp\,[-(AC - B^2)\,(z - M_1 - M_2)^2/ 2(A + 2B + C)],$$

ami ξ_1 és ξ_2 függetlensége esetén

$$g(z) = \left(\sqrt{AC}/\sqrt{2\pi\,(A + C)}\right) \exp\,[-AC\,(z - M_1 - M_2)^2/2\,(A + C)\,]\text{-re}$$

redukálódik, azaz ekkor

$$g(z) = \exp\,[-(z - M_1 - M_2)^2/2\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]\,/\sqrt{2\pi\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)},$$

vagyis függetlenség esetén $\xi_1 + \xi_2$ s. f.-e ismét normális, de $M_1 + M_2$ és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ paraméterekkel. — Ha azonos e. f.-ü, független vsz. v.-k összege ugyanolyan e. f.-ü, azt

mondjuk, hogy a szóbanforgó e. f. *stabilis*. *A normálós e. f. tehát stabilis.* Erre a tényre még visszatérünk (l. 10. §). — Itt csak azt vegyük észre, hogy az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-(x-M_1)^2/2\sigma_1^2\right]}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \cdot \frac{\exp\left[-(z-x-M_2)^2\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\,dx$$

típusú konvolúcióintegrál (különböző paraméterű normális s. f.-ek konvolúciója értéke $\exp\left[-(z-M_1-M_2)^2/2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\right]/\sqrt{2\pi\,(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$. Ezt a tényt még kihasználjuk. ξ_1 *és* ξ_2 *függetlensége* esetén a megoldást sokkal könnyebben is megkaphatjuk egy másik analitikus segédeszköz révén; erről a 9. §-ban lesz szó. Ha azonban a vsz. v.-k *nem függetlenek*, nincs más út $\xi_1+\xi_2$ s. f.-e kiszámítására, mint amit ebben a feladatban követtünk.

19. Kozmikus sugárzásból eredő pozitronokat vizsgálnak; két egymás után érkező pozitron beérkezési időpontjai közt eltelt időtartamok legyenek független, exponenciális eloszlású vsz. v.-k, ugyanazon λ paraméterrel. Mi a s. f.-e az elsőnek megfigyelt „0-adik"-tól az n-edik pozitron beérkezéséig eltelt időtartamnak, és mi a vsz.-e, hogy a „0-dik" beérkezéstől számított fix T időtartam alatt épp n pozitron érkezik be?

Megoldás. Kezdjük el regisztrálni a pozitronokat a „0-diknak" elnevezett beérkezése után, s legyenek az egyes beérkezések közti időtartamok τ_1 (az 1. pozitron beérkezéséig), τ_2 (az első beérkezésétől a másodikéig), é. í. t. A τ_i — $k(i=1,2,\ldots)$ közös s. f.-e feltevés szerint $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ $(t>0$; egyébként $\equiv 0)$. Számítsuk ki először a „0-dik" pozitron beérkezésétől az n-edik beérkezéséig eltelt időtartam, a $\xi_n=\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n$ vsz. v. s. f.-ét, $g_n(t)$-t $[g_1(t)=f(t)]$.

Mivel $\xi_n=\xi_{n-1}+\tau_n$, a függetlenség folytán $g_n(t)=\int_0^t g_{n-1}(v)\,f(t-v)\,dv$. Ebből

$$g_2(t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda v}\,\lambda e^{-\lambda(t-v)}\,dv=\lambda^2\,t\,e^{-\lambda t}.$$

Hasonlóan, $g_3(t)=\lambda^3\,t^2\,e^{-\lambda t}/2!$; azt a sejtést, hogy $g_n(t)=\lambda^n\,t^{n-1}\,e^{-\lambda t}/(n-1)!$, ezek után teljes indukcióval igazolhatjuk, ti. ha ez igaz, akkor

$$g_{n+1}(t)=\int_0^t g_n(t)\,\lambda\,e^{-\lambda t}\,dt=\frac{\lambda^{n+1}\,e^{-\lambda t}}{(n+1)!}\int_0^t v^{n-1}\,dv=\lambda^{n+1}\,t^n\,e^{-\lambda t}/n!$$

és mert a feltevés $n=1$, 2-re igaz volt, ezzel bebizonyítottuk, hogy általában is igaz,

$$g_n(t)=\frac{\lambda^n\,t^{n-1}\,e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \qquad (t>0\,;\ \text{egyébként} \equiv 0)$$

Ezt a s. f.-t n-**edrendű** (λ **paraméterű**) Γ**—s. f.-nek nevezzük.**

ξ_n — *n darab független, azonos exponenciális eloszlású vsz. v. összege — mint mondani szokás, n-edrendű* (λ *paraméterű*) Γ*-eloszlású vsz. v.*

(*Az elnevezés indokolása:* $\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt$ az Euler-féle Γ-*függvény*, illetve ξ_n e. f.-e, $\int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}\, dt}{(n-1)!} = \int_0^{\lambda x} \frac{z^{n-1} e^{-z}\, dz}{(n-1)!}$, az úgynevezett *nem-teljes* Γ *függvény*, $\int_0^y z^{n-1} e^{-z}\, dz$, $1/(n-1)!$-szorosa, $y = \lambda x$ argumentumnál.) — Annak a vsz.-ét, hogy a „0-adik" pozitron beérkezésétől számított T időtartam alatt épp n pozitron érkezik be, így számíthatjuk ki: A keresett vsz. egyenlő annak az eseménynek a vsz.-ével, hogy a 0-tól számított n-edik korpuszkula beérkezési időpontja $\leqq T$, de az $n+1$-ediké $> T$. Ezen n-edik korpuszkula beérkezési időpontja — ha az időt a „0-adik" beérkezésétől számítjuk — a fenti ξ_n; az $(n+1)$-ediké ξ_{n+1}; ha ξ_n e. f.-e $G_n(x)$, a keresett vsz. $G_n(T) - G_{n+1}(T)$. $G_n(T) = \int_0^T g_n(t)\, dt$ felhasználásával a keresett vsz.-re végül is $e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!$-t kapunk, POISSON-eloszlást. Ezt máskor kézenfekvő feltevésekből vezettük le. — Az itteni probléma szerepel pl. szövőgépek fonalszakadásának vizsgálatánál is, ahol az egyes szakadások időpontjai közti időtartamok ugyancsak exponenciális eloszlású vsz. v.-k. Figyeljük meg az itt tárgyaltak feladatunktól elvonatkoztatott tartalmát, a következő érdekes kapcsolatot exponenciális, illetve POISSON-eloszlású vsz. v.-k között: *ha egymásra következő véletlen események közti időtartamok egyforma exponenciális eloszlású független vsz. v.-k, akkor az első esemény időpontjától számított rögzített időtartam alatti események száma* POISSON-*eloszlású vsz. v. lesz.*

20. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független vsz. v.-k $f_1(x)$ és $f_2(x)$ s. f.-ekkel. Határozzuk meg $\xi_1 - \xi_2$ s. f.-ét.

Megoldás. $\xi_1 + (-\xi_2)$ s. f.-ét kell meghatároznunk. Legyen $(-\xi_2) = \eta$. A 6. § 2. fel. alapján ekkor η s. f.-e $g(x) = f_2(-x)$. Ha a ξ_1 és ξ_2 függetlenek, ξ_1 és $(-\xi_2)$ is, és így független vsz. v.-k összege s. f.-ének képlete szerint $\xi_1 + \eta \equiv \xi_1 - \xi_2$ s. f.-ére, $h(z)$-re :

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, g(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(x-z)\, dx.$$

21. Egy η sugarú tengely akkor forog jól egy ξ sugarú furatban, ha $a \leqq \xi - \eta < b$, ahol $a > 0$, $b > 0$ konst. Ilyen tengelyeket, illetve furatos alkatrészeket nagy mennyiségben, egymástól függetlenül készítenek, s megállapítják, hogy az egyes tengelyek, illetve furatok sugarai ξ, illetve η normális eloszlású vsz. v.-k, $r, \sigma_r > 0$, illetve R, $\sigma_R > 0$ paraméterekkel. A találomra összeállításra kerülő tengely- és alkatrészpárok hány százaléka lesz meg nem felelő?

22. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n$ független vsz. v.-k, ugyanazzal a $p(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi}\sigma$ normális s. f.-nyel ($\sigma > 0$ konst). Határozzuk meg $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ s. f.-ét. Megjegyezzük a következőt: Ha ξ_1, ξ_2, ξ_3 szerepel csak és ezek egy ideális gázmolekulának pl. az edényfalhoz viszonyított sebességkompo-

nensei, amelyeket függetleneknek és normális eloszlásúaknak tekintünk a kinetikus gázelméletben, η a molekula sebessége lesz. Ekkor a megoldás a molekula sebességeloszlásának képletét, az ún. Maxwell-féle sebességeloszlást szolgáltatja. *Ezt itt tételeink segítségével vezetjük le,* és nem külön, önállóan, mint sok fizikakönyv.

Megoldás. ξ_i^2 s. f.-e, $q(x)$ a 6. § 9. pl. alapján $q(x) = \exp\,[-x/2\sigma^2]/\sqrt{2\pi}\,x\,\sigma$ $(x \geqq 0$; egyébként $\equiv 0)$. Mindenekelőtt meghatározzuk $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ s. f.-ét a vsz. v.-k összege s. f.-e képlete alapján (l. a repetitórium-részt); először $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \zeta_1$-ét, azután $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \zeta_1 + \xi_3^2$-ét, ismét mint két vsz. v. összegének s. f.-ét, é.i.t. Legyen általában $\xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2 = \zeta_k$ s. f.-e már ismeretes; ekkor a következő lépés $\zeta_k + \xi_{k+1}^2 = \zeta_{k+1}$ s. f.-ének meghatározása. Legyen ξ_k s. f.-e $r_k(x)$ $[r_1(x) = q(x)]$; ξ_{k+1}^2-é nyilván $q(x)$, és így az említett képlet alapján ζ_{k+1} s. f.-e $r_{k+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r_k(y)\,q(x-y)\,dy = \int_0^x r_k(x)\,q(x-y)\,dy$, mivel $q(x)$ csak $x \geqq 0$-ra $\not\equiv 0$, és így y legfeljebb x-ig mehet, $\xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2 = \zeta_k$ pedig csak pozitív értékeket vehet fel, és így $r_k(x)$ is csak $x \geqq 0$-ra $\not\equiv 0$, következésképp elég 0 alsó határtól integrálnunk. Természetesen $x < 0$-nál $r_{k+1}(x)$ is $\equiv 0$. $r_k(x)$-et teljes indukcióval határozzuk meg. $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$ könnyen kiszámítható (nem is részletezzük): $r_2(x) = \exp\,(-x/2\sigma^2)/2\sigma^2$ $(x \geqq 0$; egyébként $\equiv 0)$, $r_3(x) = \sqrt{x}\exp\,(-x/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi}\,\sigma^3$ $(x \geqq 0$; egyébként $\equiv 0)$; alakjuk valószínűvé teszi, hogy $r_k(x) = x^{k/2-1}\exp\,(-x/2\sigma^2)/2^{k/2}\,\Gamma(k/2)\,\sigma^k$ ($\Gamma(v)$ az $\int_0^\infty t^{v-1}e^{-t}\,dt$-vel definiált ún. Γ-**függvény**) $(x \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$; $k = 1, \ldots, n-1)$. Tegyük fel, hogy ez igaz, és határozzuk meg ennek alapján $r_{k+1}(x)$-et. $x \geqq 0$ esetén $r_{k+1}(x) = [1/2^{k+2}\,\Gamma(k/2)\,\sigma^k]\int_0^x \frac{y^{k/2-1}\exp\,(-y/2\sigma^2)\exp\,[-(x-y)/2\sigma^2]}{\sqrt{2\pi\,(x-y)}\,\sigma}\,dy =$

$= [\exp\,(-x/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi}\;2^{k/2}\,\Gamma(k/2)\,\sigma^{k+1}]\int_0^x \frac{y^{k/2-1}}{\sqrt{x-y}}\,dy$. De $\int_0^x \frac{y^{k/2-1}}{\sqrt{x-y}}\,dy$ a $t = y/x$ helyettesítéssel átmegy $x^{(k-1)/2}\int_0^1 t^{k/2-1}\,(1-t)^{-1/2}\,dt$-be. $I = \int_0^1 t^{k/2-1}\,(1-t)^{-1/2}\,dt$ azonban, mint ismeretes, kifejezhető az *Euler-féle B (éta) függvénnyel,* illetve a Γ függvénnyel (ti. az előbbi definíció szerint $B(\alpha,\beta) \equiv \int_0^1 t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,dt = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$, és így $I = \Gamma(k/2)\,\Gamma(1/2)/\Gamma[(k+1)/2] = \sqrt{\pi}\,\Gamma(k/2)/\Gamma[(k+1)/2)$, $\left(\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\right)$. Visszahelyettesítve és egyszerűsítve $x \geqq 0$ esetén végül is ezt kapjuk: $r_{k+1}(x) = x^{(k+1)/2-1}\exp\,(-x/2\sigma^2)/2^{(k+1)/2}\,\Gamma\,[(k+1)/2]\,\sigma^{k+1}$. Nyilván $x < 0$-nál $r_k(x) \equiv 0$, s így $r_{k+1}(x)$ is $\equiv 0$. Ezzel azonban igazoltuk $r_k(x)$ fentebb közölt alakját. *Következésképp* $\zeta_n = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ *s. f.-ét,* $r_n(x)$*-et is ismerjük:*

$$r_n(x) = \frac{x^{n/2-1}\,e^{-x/2\sigma^2}}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)\,\sigma^n} \qquad (x \geqq 0;\ \text{egyébként} \equiv 0)$$

(ezt egyébként a PEARSON*-féle* χ^2 **eloszlás sűrűségfüggvényének** *is hívják).*

Egy ilyen s. f.-nyel bíró vsz. v.-t röviden χ^2 *eloszlású vsz. v.-nak* is hívnak.

Most már csak $\sqrt{\zeta_n}$ s. f.-ét kell meghatároznunk. Alkalmazhatjuk a 6. § 10. pl. eredményét: Legyen $\sqrt{\zeta_n}$ s. f.-e $s_n(x)$; akkor $s_n(x) = 2r_n(x^2)\,x$ $(x \geqq 0$; egyébként $= 0)$. $s_n(x) = x^{n-1} \exp(-x^2/2\sigma^2)/2^{n/2-1}\,\Gamma(n/2)\,\sigma^n$ $(x \geqq 0$; egyébként $\equiv 0)$. Mint említettük, $s_3(x)$ *egy molekula Maxwell-féle sebességeloszlását* (sebességének vsz. s. f.-ét) adja meg: $s_3(x) = (\sqrt{2}/\sqrt{\pi}\sigma^3)\,x^2 \exp(-x^2/2\sigma^2)$. Ezt az összefüggést jól ismerjük a kinetikus gázelméletből: itt sokkal jobban láthattuk eredetét és levezetését. σ természetesen bizonyos fizikai állandókkal fejezhető ki $(= \sqrt{kT/m}$, ahol k a Boltzmann-féle állandó, T az abszolút hőmérséklet, m a molekula tömege). — Vsz. v.-k egyes függvényei s. f.-ének meghatározása szempontjából feladatunk igen jellegzetes volt. Világos, hogy $r_3(x)$ konstansoktól eltekintve a molekula *energiájának* eloszlását adja meg.

23. Egy téglalap alakú dobozoldal területét akarjuk meghatározni. Hosszúságát és szélességét azonban olyan műszerrel állapítjuk meg, amelynek hibahatára m (vagyis, ha a műszer M egységet mutat, a valóságos méret bárhol lehet — tegyük fel, egyenlő vsz.-gel — az $(M, M + m)$-ben). Hossz, szélesség (s így a terület is) tehát vsz. v.-k. Mi lesz a terület s. f.-e, ha a két mérés független?

24. A matematikai statisztika szempontjából fontos a következő probléma: Legyenek $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n$ független vsz. v.-k, mindegyik s. f.-e $f(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi}\sigma$ $(\sigma > 0$ konst). Határozzuk meg $\zeta = \eta/\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ s. f.-ét.

Megoldás. $\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ s. f.-ét, $s_n(x)$-et a 6. § 22. pl.-ból már ismerjük: $s_n(x) = x^{n-1} \exp(-x^2/2\sigma^2)/2^{n/2-1}\,\Gamma(n/2)\,\sigma^n$ $(x \geqq 0$; egyébként $\equiv 0)$. Vsz. v.-k hányadosa s. f.-ének képlete szerint ζ s. f.-e, $g(x)$:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, s_n(y)\, f(xy)\, dy = \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1} \exp(-y^2/2\sigma^2)}{2^{n/2-1}\,\Gamma(n/2)\,\sigma^n} \cdot \frac{\exp(-x^2y^2/2\sigma^2)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, dy =$$

$$= [1/2^{n/2-1}\,\Gamma(n/2)\,\sqrt{2\pi}\,\sigma^{n+1}] \int_0^{\infty} y^n \exp[-y^2(1 + x^2)/2\sigma^2]\, dy$$

Az integrál $t = y^2(1 + x^2)/2\sigma^2$ helyettesítéssel a következő lesz:

$$[2\sigma^2/(1 + x^2)]^{(n+1)/2} \int_0^{\infty} t^{(n-1)/2}\, e^{-t}\, dt = [2\sigma^2/(1 + x^2)]^{(n+1)/2}\, \Gamma[(n + 1)/2],$$

vagyis

$$g(x) = \frac{\Gamma[(n + 1)/2]}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2)} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^{(n+1)/2}}$$

Ezt a függvényt az n **szabadsági fokú** STUDENT*-**féle eloszlás sűrűségfüggvényének** *nevezzük* a matematikai statisztikában; egy ilyen s. f.-nyel bíró vsz. v.-t pedig n *szabadsági fokú* STUDENT-*eloszlású vsz. v.-nak.* $n = 1$-nél ez a $m = 0, \sigma = 1$ paraméterű CAUCHY-féle sűrűségfüggvénybe megy át, ami azt jelenti, hogy két, egy-

* „*Student*" fedőnév alatt írt *William Sealy Gosset* (1876—1937) angol matematikus.

aránt $m = 0$, $\sigma > 0$ paraméterű normális eloszlású vsz. v. hányadosának s. f.-e (0, 1) paraméterű CAUCHY-féle.

25. Egy gépnek n különböző alkatrésze van; az egyes alkatrészek élettartamai független, exponenciális eloszlású vsz. v.-k, s a k-adik élettartamának e. f.-e $1 - e^{-\lambda_k t}$ (ha $t \geqq 0$; egyébként $0 \equiv !$) ($\lambda_k > 0$ konst). Mi a vsz.-e annak, hogy a megindulástól számított T időn belül valamelyik alkatrész elromlása következtében leáll a gép?

Megoldás. Legyenek az egyes alkatrészek élettartamai a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k. Annak a vsz.-ét keressük, hogy ezek közül a *legkisebb* is $< T$, ekkor áll le ti. T-n belül a gép, vagyis, ha $\min(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \xi^*$, $\mathrm{P}(\xi^* < T)$-t. Könnyebb kiszámítani $1 - \mathrm{P}(\xi^* < T) = \mathrm{P}(\xi^* \geqq T)$-t, ti. ez a függetlenség folytán $= \mathrm{P}(\xi_1 \geqq T) \cdots \mathrm{P}(\xi_n \geqq T) = e^{-\lambda_1 T} \ldots e^{-\lambda_n T} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)T}$, és így $\mathrm{P}(\xi^* < T) = 1 - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) T]$, *vagyis ez az n darab vsz. v. közül a legkisebbnek az e. f.-e.* A matematikai statisztikában az ún. *rendezett minták* elméletében találkozunk ehhez hasonló problémákkal; ott pl. n darab vsz. v. közül nagyságrend szerint az i-ediknek keressük az e. f.-ét — illetve hasonló feladatok szerepelnek. A dolog érdekessége, hogy *itt több vsz. v. egyáltalán nem algebrai kifejezéssel leírható függvényének kellett keresnünk az e. f.-ét.* Itt különben különösen előnyös e. f.-nyel és nem s. f.-nyel dolgozni.

26. Egyes kutatók szerint a tbc röntgenvizsgálatok a következő szkémával írhatók le: A lakosság három csoportba osztható: az *a)* csoportba tartozók tüdején tbc nyoma nem látható; a *b)* csoportbeliek tüdején enyhébb, a *c)* csoportba tartozókén pedig súlyosabb folyamat látható. A három csoport sorjában a lakosság $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ százalékát teszi ki. Bármelyik csoportbeli egyén vizsgálatánál van bizonyos p_1 (illetve p_2, p_3) vsz.-e annak, hogy a vizsgálat tbc-snek minősíti. (Ennek a gyakorlati értelmét itt most nem taglaljuk.) Ha egy „találomra választott" egyént n-szer vizsgálnak meg tbc-re, mi a vsz.-e, hogy k esetben tbc-snek nyilvánítják (az egyes vizsgálatok függetlenek)?

27. Állócsillagokat fényességük alapján „törpé"-nek, „óriás"-nak és „szuper-óriás"-nak minősítenek. Legyen bizonyos összességben ezek aránya sorban α, β és γ $(= 1 - \alpha - \beta)$. Az osztályozás a csillag spektruma alapján történik, és eredménye a véletlentől is függ. Az egyes osztályozások vsz.-ei

Annak a vsz.-e, hogy	„törpének"	„óriásnak"	„szuper-óriásnak"
	osztályozzanak		
„törpét"	$1 - p_1 - p_2$	p_1	p_2
„óriást"	p_3	$1 - p_3 - p_4$	p_4
„szuper-óriást"	p_5	p_6	$1 - p_5 - p_6$

Találomra választott csillag spektrumát háromszor (egymástól függetlenül) megvizsgálják. Legyen ξ, illetve η azon vizsgálatok száma, amelyek eredménye az „óriás", illetve „szuper-óriás" osztályozás. Határozzuk meg (ξ, η) együttes eloszlását, és ξ, illetve η eloszlását.

28. Egy nagyváros lakóinak s százaléka tüdőrákban szenved. — Diagnózis céljából a lakosokat speciális vizsgálatnak vetik alá; ez az A vizsgálat egyszeri és a B vizsgálat háromszori alkalmazásából áll. Az összes vizsgálatok egymástól függetlenek, és mindegyik eredménye csak „pozitív", illetve „negatív" lehet. Rákbeteg személy esetén annak

a vsz.-e, hogy A „pozitív" lesz, p_1, hogy B „pozitív" lesz, p_2. Ugyanezek a vsz.-ek nem rákos egyénnél p_3, illetve p_4. Találomra választott lakost a fenti vizsgálatnak vetnek alá. Legyen ξ a „pozitív" döntések száma a nála elvégzett A és (háromszori) B vizsgálatok együttesében. Mi lesz ξ vsz. eloszlása?

29. Egy folyadék térfogategységében levő kolloidrészecskék száma λ paraméterű POISSON-eloszlású vsz. v. Ha egy V térfogatú térrészből az időegység alatt egy részecske α vsz.-gel lép ki, mi a vsz.-e, hogy az időegység alatt épp k számú részecske fog kilépni a V térfogatból, ha a kilépések egymástól függetlenek?

Megoldás. Legyen ξ az időegység alatt kilépő részecskék száma és η a V térfogatban levő részecskeszám. Mivel az egyes kilépések függetlenek, $\mathrm{P}(\xi = k \mid \eta = n) = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Megengedtük, hogy η-ra teljesülnek a POISSON-eloszlás fellépésének feltételei; ekkor $\mathrm{P}(\eta = n) = e^{-\lambda V} (\lambda V)^n / n!$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ahol λ konst. Ennek folytán

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi = k \mid \eta = n)\ \mathrm{P}(\eta = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} e^{-\lambda V} (\lambda V)^n / n! =$$

$$= \frac{e^{-\lambda V} (\alpha \lambda V)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^{n-k}}{(n-k)!} (\lambda V)^{n-k} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda V} (\alpha \lambda V)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^n}{n!} (\lambda V)^n = \frac{e^{-\alpha \lambda V} (\alpha \lambda V)^k}{k!},$$

vagyis ξ ismét POISSON-eloszlású. ξ eloszlása *binomiális eloszlások* POISSON-*eloszlással való keverésének eredménye*; kimondhatjuk, hogy az ilyen keverékeloszlás *ismét* POISSON-*eloszlás, amelynek paramétere a kiindulási binomiális, illetve* POISSON-*eloszlás* α *és* λV *paramétereinek szorzata.*

30. Egy számlálócső p vsz.-gel regisztrál egy korpuszkulát. Ha a T idő alatt beérkező korpuszkulák száma POISSON-eloszlású vsz. v., mi a vsz.-e, hogy k lesz a T idő alatt regisztrált korpuszkulaszám, ha az egyes regisztrálások függetlenek?

31. Sok esetben azt tapasztalták, hogy bizonyos vsz. v.-k nem POISSON-eloszlásúak ugyan, eloszlásuk azonban előállítható igen sok különböző paraméterű POISSON-eloszlás összegeződéseként. Hasonló eloszlástípusra példa többek közt a következő: Greenwood és Yule bizonyosfajta balesetek ξ számának vsz. eloszlását legjobban azzal a modellel tudták megközelíteni, hogy ξ POISSON-eloszlású, de paramétere, λ, folytonos vsz. v. $f(l) = c^p l^{p-1} \exp(-cl)/\Gamma(p)$ $(0 \leqq l < \infty$; egyébként $\equiv 0)$ s. f.-nyel. $(c > 0$; $p \geqq 1$, egész). (Ez egy p-edrendű c paraméterű Γ-eloszlás s. f.-e.) Határozzuk meg ξ vsz. eloszlását.

Megoldás. Nyilván $\mathrm{P}(\xi = k \mid \lambda = l) = e^{-l} l^k / k!$, és mert $\mathrm{P}(\xi = k) = \int_0^{\infty} \mathrm{P}(\xi = k \mid \lambda = l) f(l)\, dl$ (ez diszkrét eloszlások folytonos súlyfüggvénnyel való keveréke) a keresett vsz.-re az integrálás elvégzése után

$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{p-1+k}{p-1} [c/(c+1)]^p \; [1/(c+1)]^k$-t kapunk, vagyis ξ $c/(c+1)$ és p paraméterű negatív binomiális eloszlású vsz. v. Eredményünk azt mondja ki, hogy POISSON-*eloszlások keveréke p-edrendű c paraméterű* Γ*-eloszlás s. f.-évei mint súlyfüggvénnyel negatív binomiális eloszlást képez.*

32. Osszuk fel az évet n egyenlő szakaszra. Legyen x_k a k-adik szakasz átlagos napi középhőmérséklete. Az év tetszőleges napjainak középhőmérséklete, ζ, vsz. v., felfogható, mint a ξ és η vsz. v.-k összege, ahol $\xi = x_k$, ha a vizsgált nap a k-adik szakaszra esik, η pedig ugyanezen feltevés mellett az x_k átlagtól való eltérés. Ha egyazon szakaszon belül a napok választása egyenlően vsz., és η e. f.-e $\xi = x_k$ feltétel esetén normális, σ_k^2 (tehát a k-adik szakasz minden napjára állandó) és $m = 0$ paraméterekkel, mi lesz ζ e. f.-e és s. f.-e? Ha ξ is folytonos vsz. v. lenne $g(x)$ s. f.-nyel és $\xi = x$ feltétel mellett η e. f.-ének paramétere $\sigma(x)$ volna, ζ e. f.-e és s. f.-e hogyan alakulna?

Megoldás. A feladat szerint η feltételes e. f.-e $F(y \mid \xi = x_k) = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{-x^2/2\sigma_k^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} dx$

és (a vizsgálat napjának egyenletes eloszlása folytán) $\mathbf{P}(\xi = k) = a(x_k)/n$, ahol $a(x_k)$ azon szakaszok száma, amelyeken x_k az átlagos napi középhőmérséklet; ζ e. f.-e, $H(z)$ pedig

$$\mathbf{P}(\xi + \eta < z) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\xi = x_k)\, \mathbf{P}(\eta < z - x_k \mid \xi = x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\xi = x_k)\, F(z - x_k \mid \xi = x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a(x_k)}{n} \int_{-\infty}^{z-x_k} \frac{e^{-x^2/2\sigma_k^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} dx$$

(Vegyük észre, hogy itt két vsz. összege e. f.-e kiszámításának különleges esetével volt dolgunk; az e. f. keveréknek is felfogható.) ζ s. f.-e,

$$\frac{dH}{dz} = h(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a(x_k)}{n} \frac{\exp[-(z-x_k)^2/2\sigma_k^2]}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}$$

Ha ξ is folytonos vsz. v. lenne $g(x)$ s. f.-nyel, és $\xi = x$ feltétel mellett η e. f.-ének paramétere $\sigma(x)$ volna, $h(z)$ nyilván $h(z) = \int_{m}^{M} \frac{\exp[-(z-x)^2/2\,\sigma^2(x)]\, g(x)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)} dx$

lenne [$M(m)$ a legnagyobb (legkisebb) érték, amelyet ξ felvehet] az integrál keverék s. f.-e, mint az várható is volt.

33. Hogyan alakul a 6. § 32. pl. folytonos ξ vsz. v.-ra szóló megoldása, ha $\sigma(x) =$ = konst, $g(x) = t$-t pedig abból kell megállapítani, hogy az átlagos hőmérséklet évi lefutása $\xi(t) = a + b \cos 2\pi\tau$ (az egység egy év !), és τ egyenletes eloszlású (0, 1]-en. Mi lesz ζ s. f.-e?

34. Legyen az η vsz. v. egy regisztráló berendezésbe T idő alatt érkező olyan korpuszkulák száma, amelyek energiája $\geqq E_0$. Feltehető, a beérkező (bármilyen energiájú) részecskék száma, ξ POISSON-eloszlású vsz. v. Ha annak a vsz.-e, hogy találómra

választott korpuszkula energiája $\geqq E_0$, p-vel egyenlő, mi lesz η vsz. e.-a? (A korpuszkulák egymástól teljesen függetlenül viselkednek!)

35. Gyakorlatban (spektroszkópia stb.) sokszor találkozunk a következőkkel: Egy vizsgálat eredményeként egy olyan görbét kapunk, amelyről elméleti meggondolásokból tudjuk, hogy különböző m_k, σ_k paraméterű normális s. f.-ek A_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) súlyokkal vett keverékét, $\sum_{k=1}^{N} A_k \frac{\exp[-(x-m_k)^2/2\sigma_k^2]}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}$-t ábrázolja (az m_k-k különbözők, $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_N$). Meghatározandók $f(x)$ görbéje alapján az ismeretlen m_k, σ_k paraméterek. Az erre szolgáló eljárás alapgondolata: ha elő tudjuk állítani pusztán $f(x)$ és 0-tól fokozatosan növekvő, önkényes $\lambda_n > 0$-k ($n = 1, 2, \ldots$) segítségével az $f^*(x, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{N} A_k \frac{\exp[-(x-m_k)^2/2(\sigma_k^2+\lambda_n)]}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_k^2+\lambda_n}}$ [$f^*(x, 0) \equiv f(x)$] függvény görbéjét, ebben az egyes normális s. f.-ek görbéi felrajzolva keskenyebbek lennének, mint $f(x)$-nél — maximumhelyeik azonban változatlanok maradnak, vagyis $f^*(x, \lambda_n)$ görbéjéből az egyes normális s. f.-görbék jobban kivehetők, mint $f(x)$ görbéjéből. Ha $\lambda_n \to \sigma_1^2$, az 1 indexű normális s. f. görbéje tűszerűen emelkedik ki. A „tű" helye m_1-nél van, az erős kiemelkedés beálltakor használt $\lambda_n \approx \sigma_1^2$, s ha a „tű" eléggé elkülönülten jelentkezik, egyetlen Gauss-függvénygörbeként kezelhető, s ekkor adataiból A_1 is meghatározható. Így tehát az 1 indexű normális s. f. paramétereit meghatározhattuk; a „tű"-t a grafikonból törölve, az eljárás a „maradék"-görbén megismételhető, mikor is újabb paramétereket kaphatunk meg, é. í. t. — A legfontosabb tehát $f^*(x, \lambda_n)$ előállítása. Egyik idevágó módszer alapja az $f^*(x, \lambda_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda_n^k}{2^k k!} f^{(2k)}(x)$ összefüggés. Bizonyítsuk be ezt.

Megoldás. Fejtsük $f^*(x, \lambda_n)$-t λ_n szerint Maclaurin-sorba (esetünkben ez előállítja a függvényt). $f^*(x, \lambda_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(\frac{\partial^k f^*}{\partial \lambda_n^k}\right)_{\lambda_n=0}$. Mivel azonban $\frac{\partial f^*}{\partial \lambda_n} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^*}{\partial x^2}$, f^* definíciója alapján írhatjuk, hogy $\frac{\partial^k f^*}{\partial \lambda_n^k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\partial^{2k} f^*}{\partial x^{2k}}$ és $\left(\frac{\partial^k f^*}{\partial \lambda_n^k}\right)_{\lambda_n=0} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{\partial^{2k} f^*}{\partial x^{2k}}\right)_{\lambda_n=0} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} f^*(x, 0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k f^{(2k)}(x)$, amiből — tekintetbe véve, hogy a sor konvergenciája is könnyen kimutatható (itt nem részletezhetjük ennek a bizonyítását) — állításunk már következik. A gyakorlatban úgy járunk el, hogy egyes (ekvidisztáns) x helyekre határozzuk meg közelítőleg a fenti sor egy szelete segítségével $f^*(x, \lambda_n)$-t, 0-tól egyre növekvő λ_n-ekkel, újból és újból. A deriváltakat $f(x)$ grafikonjából numerikus módszerekkel határozzuk meg; ha λ_n közel jár σ_1^2-hez, várható, hogy az 1 indexű Gauss-függvénygörbe ki fog emelkedni a grafikonból; ekkor a fent vázolt módon olvashatjuk le paramétereit stb. A sorszelet alkalmazásából eredő hiba is megbecsülhető. Nehézség, hogy λ_n-t nekünk kell „óvatosan" megválasztanunk; mivel λ_n akármilyen kis értékénél is van keskenyedése az egyes Gauss-görbéknek, kis λ_n alkalmazásánál kapott eredményből legtöbbször látható, kell-e nagyobb λ_n-nel ismételni az eljárást. Általában egy-két λ_n értékkel elég kísérletezni ahhoz, hogy legalább az $f(x)$-ben szereplő normális s. f.-„komponensek" számát és (nagyjából) m_k-ját megmondhassuk. Gyakorlatban ritkán kell több. *Az itt ismertetettek speciális esete*

valószínűség-sűrűségfüggvények *konstans súlyokkal vett* **keveréke** *összetevőkre bontásának, röviden:* **felbontásának.**

36. Egyes vegyipari vizsgálatok végeredményeként azt kapjuk, hogy (a mértékegységek alkalmas választása mellett) n számú „edényben" (cső, tartály) oldószerben sorjában $f_0, f_1, \ldots, f_n \left(\sum_{i=1}^{n} f_i = 1\right)$ mennyiség helyezkedik el bizonyos anyagból, és elméleti meggondolásokból tudjuk, hogy $f_i = \sum_{k=1}^{N} A_k \binom{n}{i} p_k^i (1-p_k)^{n-i}$ $(i=0, 1, \ldots n)$; formálisan mondhatjuk, hogy az f_i-k egy olyan „eloszlás" tagjai, amely N darab n és p_k paraméterű binomiális eloszlás A_k súlyokkal vett „keveréke". (A_k, p_k konst. $A_k > 0$, $0 < p_k < 1$; a p_k-k általában különbözők.) A_k, p_k ismeretlen. A feladat ilyenkor meghatározni az f_i-k ismeretében az A_k és p_k-kat. A feladatot megoldottnak tekintjük, ha általunk választott $\mu > 1$ ($\mu \max p_k \leqq 1$; $k = 1, \ldots N$) paraméter és az f_i-k segítségével elő tudjuk állítani az $F_i(\mu) = \sum_{k=1}^{N} A_k \binom{n}{i} (\mu p_k)^i (1-\mu p_k)^{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ tagokkal bíró vsz. e. keveréket. Ha ti. μ-t fokozatosan növeljük akkor, amidőn $\mu \max p_k = 1$ lesz, a $\max p_k$ indexével (mondjuk: m) bíró binomiális eloszlás az n abszcisszájú pontban mutatkozó egyetlen A_m ordinátájú pontba koncentrálódik, amely a többi eloszláspont közül erősen kiugrik. Így tehát egyre növekvő μ-kel újból és újból ki kell számítanunk az $F_i(\mu)$ értékeket, s amikor az $F_n(\mu)$ erősen kiugrik, tudhatjuk, hogy $\mu \max p_k = \mu p_m \approx 1$, s a kiugró pont $\approx A_m$ magasságban van; ebből már A_m és $p_m = 1/\mu$ értéke meghatározható. Az A_m magasságban levő pontot egyszerűen kihagyva, egy binomiális eloszlást leválasztottunk; ezután megismételjük az eljárást, aminek végén újabb adatokat kapunk, é. i. t. Kimutatható, hogy az eljárás közben az egyes binomiális eloszlások egymástól is jobban elkülönülnek, úgy, hogy sokszor egyetlen μ-vel végzett eljárás után is már látni, hány binomiális eloszláskomponens volt a keverékben. — A lényeg ilyenképpen az $F_i(\mu)$-k előállítása. Igazoljuk a következő formulát: $F_i(\mu) = \mu^i \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} (1-\mu)^{r-i} f_r$ $(i = 0, \ldots n)$.

Megoldás. $F_i(\mu)$ így is felírható:

$$F_i(\mu) = \mu^i \sum_{k=1}^{N} A_k \binom{n}{i} p_k^i \left[(1-\mu) p_k + (1-p_k)\right]^{n-i} =$$

$$= \mu^i \sum_{k=1}^{N} A_k \binom{n}{i} p_k^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (1-\mu)^j p_k^j (1-p_k)^{n-i-j}.$$

$j = r - i$-vel új r összegező indexet vezetve be és rendezve:

$$F_i(\mu) = \mu^i \sum_{k=1}^{N} A_k \sum_{r=i}^{n} \binom{n}{i} \binom{n-i}{r-i} (1-\mu)^{r-i} p_k^{r-i} (1-p_k)^{n-r}$$

és így

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{r-i} = \binom{n}{r} \binom{r}{i}$$

-vel

$$F_i(\mu) = \mu^i \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} (1-\mu)^{r-i} \sum_{k=1}^{N} A_k \binom{n}{r} p_k^r (1-p_k)^{n-r} = \mu^i \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} (1-\mu)^{r-i} f_r.$$

Itt nincs közelítés vagy numerikus deriválás, mint a normális s. f.-ek keverékének felbontásánál (a „felbontás" megjelölést itt is használhatjuk); általában *azt mondjuk:* **diszkrét valószínűség-eloszlások** *konstans súlyokkal vett* **keverékének** *„összetevőkre bontása" (vagy röviden „***felbontása***").* — A formula akkor is igaz, ha n minden komponens binomiális e.-ban más és más (mondjuk n_k), ekkor a Σ-ban n helyett $\max n_k$ áll ($k = 1, \ldots, N$). μ megválasztásának nehézségei itt is ugyanolyan jellegűek, mint a normális s. f.-ek keverékének felbontásánál λ megválasztásának nehézségei.

Megjegyezzük, hogy POISSON-*eloszlásoknak a fentihez hasonló típusú keverékét is felbonthatjuk ugyanilyen elven alapuló módszerrel.* Igaz ti. a következő tétel: POISSON-eloszlások $f_i = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\lambda_k} \lambda_k^i / i!$ $(i = 0, 1, \ldots)$ tagokkal bíró keveréke és az ismeretlen paraméterek meghatározására alkalmas $F_i(\mu) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-(\lambda_k - \mu)} (\lambda_k - \mu)^i / i!$ $(i = 0, 1, \ldots; \mu < \min \lambda_k$ önkényes; $k = 1, \ldots, N)$ tagokkal bíró keveréke közt fennáll $F_i(\mu) = e^{\mu} \sum_{r=0}^{i} (-\mu)^{i-r} f_r / (i - r)!$ $(i = 0, 1, \ldots)$. A felbontás nyitja itt az, hogy λ_k μ-vel való csökkentésekor $\mu = \min \lambda_k \equiv \lambda_m$ esetén az m indexű POISSON eloszlás az ordinátatengelyen A_m magasban elhelyezkedő egyetlen ponttá fajul el, amely általában kiválik a maradékgrafikonból, s így fellépéséből A_m és (a hozzá szükséges μ-ből) λ_m is megállapítható. (Az eljárás az említett pont kihagyása után fennmaradt grafikonon megismételhető, é. í. t.) μ megválasztásának nehézségei s egyáltalán az összes körülmények itt nagyjából ugyanazok, mint a binomiális eloszlások keverékének felbontásánál.

7. §. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK JELLEMZŐI

a) A várható érték definíciója

Tekintsünk egy kísérletet, amelynek lehetséges kimeneteleit egy ξ vsz. v. $x_1, \ldots, x_n$ értékei jellemzik. Adott N kísérletből álló kísérletsorozatban legyen a $\xi = x_k$ gyakorisága N_k ($\sum_{k=1}^{n} N_k = N$). ξ ebben a kísérletsorozatban mutatott értékeinek (az átlag klasszikus definíciója szerint képezett) átlagértéke, $\bar{\xi}$, a következő:

$$\bar{\xi} = \frac{N_1 x_1 + \ldots + N_n x_n}{N_1 + \ldots + N_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k}{N} x_k$$

A 2. §-ba a tapasztalat alapján posztuláltuk, hogy egy kísérlet nagyszámú ismétlésekor a kísérlet valamely A eredményének relatív gyakorisága az A valószínűsége körül ingadozik.

Mivel N_k/N a $(\xi = x_k)$ esemény relatív gyakorisága a fenti kísérletsorozatban, közelítőleg írhatjuk

$$\bar{\xi} \approx \sum_{k=1}^{n} x_k \, \mathrm{P}(\xi = x_k)$$

Minthogy *tapasztalatra épített posztulátumaink szerint* a kísérlet nagyszámú ismétlésekor a relatív gyakoriság általában egyre jobban közelebb esik a vsz.-hez, $\bar{\xi}$ kifejezése annál pontosabb, minél hosszabb kísérletsorozatról van szó. Hosszú kísérletsorozat esetén tehát $\bar{\xi}$-nek, vagyis az észlelések átlagértékének a fenti kifejezést vehetjük (amely, mint látni fogjuk, matematikai szempontból a legmegfelelőbb), s ekkor viszonylag kis hibát követünk el. Ha most a matematikai elmélet számára absztrahálni akarunk, kézenfekvő ezek alapján a következő *definíciókat* bevezetni:

Egy ξ vsz. v.-hoz hozzárendelünk egy $\mathrm{M}(\xi)$ mennyiséget, amelyet ξ átlagának vagy (legtöbbször)* **várható értékének** *(rövidítve* **v. é.***) fogunk nevezni, és amelyet a következőképpen* **definiálunk:**

1. *Ha ξ diszkrét vsz. v., amely csak az x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ értékeket veheti fel, és $\mathrm{P}(\xi = x_k) = p_k$, $\mathrm{M}(\xi)$-t az*

$$\mathrm{M}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

végtelen sorral definiáljuk, feltéve, hogy az abszolút konvergens. (Véges sok x_k esetén az összeg véges.)

* M ún. *operáció* jele és nem szorzó.

2. *Ha ξ folytonos vsz. v., amelynek létezik $f(x)$ s.f.-e, $M(\xi)$-t* (1. *általánosításaként*) *az*

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

integrállal definiáljuk, feltéve, hogy ez abszolút konvergens.

Ha 1- vagy 2-ben az abszolút konvergencia nem áll fenn, azt mondjuk, hogy ξ-nek nem létezik v. é.-e.

1- és 2-t egyesíthetjük, ha $M(\xi)$-t az

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$$

Stieltjes-integrállal definiáljuk, ahol $F(\xi)$ ξ e. f.-e. — A gyakorlatban sokszor elegendő az 1. illetve, 2. definícióval dolgozni.

A vsz.-ek gyakorlati értékének posztulátuma alapján azt is posztulálhatjuk, hogy egy $F(x)$ e. f.-ű vsz. v.-ra (pl. valamely mérési adatra) végzett nagyszámú észlelés eredményeinek átlagértéke kis hibával $M(\xi)$ lesz (folytonos vsz. v.-nál a tényleges átlagérték a v. é.-et kifejező integrál egy közelítő Riemann-összege).

A v. é. definíciója alapján az is bebizonyítható, hogy *ha ξ e. f.-e $F(x)$, $g(\xi) = \eta$ pedig ξ valamely minden véges intervallumon korlátos ingadozású folytonos függvénye (amely maga is vsz. v.),*

$$M(\eta) = M[g(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x)$$

E tételre még sokszor szükség lesz.

Mivel a v. é. a mondottak szerint az e. f.-től függ csak, *beszélünk egy eloszlás vagy e. f. v. é.-éről is.*

b) **Tételek a várható értékről**

A v. é.-ről a következő tételek mondhatók ki:

1. Ha egy ξ vsz. v. elfajult, vagyis $= c$ (konstans) $M(c) = c$.

2. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *tetszőleges* vsz. v.-k

$$M(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = M(\xi_1) + \ldots + M(\xi_n).$$

3. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *tetszőleges* vsz. v.-k, $\zeta_\nu = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$, ahol ν is vsz. v. és $S_m : (\nu = m)$, továbbá, ha $n > m$-nél ξ_n és S_m függetlenek, $M(\xi_n)$ létezik és $\sum_{n=1}^{\infty} M(|\xi_n|)\, P(\nu \geqq n)$ konvergens: $M(\zeta_\nu)$ létezik és $M(\zeta_\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n)\, M(\zeta_n) = \sum_{j=1}^{\infty} M(\xi_j)\, P(\nu \geqq j)$. — Speciálisan, ha $M(\xi_n) = a$, $M(\zeta_\nu) = a\, M(\nu) = a \sum_{n=1}^{\infty} n\, P(S_n)$; a tétel triviálisan igaz, ha az *összes* ξ_n-ek függetlenek ν-től.

4. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *összességükben független* vsz. v.-k,

$$M(\xi_1 \cdots \xi_n) = M(\xi_1) \cdots M(\xi_n).$$

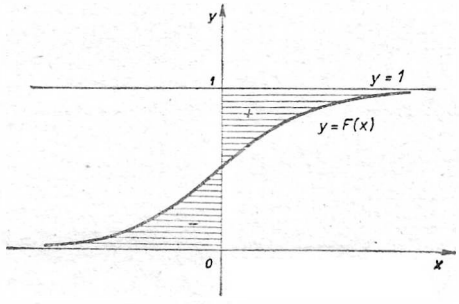
Speciálisan $M(c\,\xi) = c\, M(\xi)$ (c konstans, amely bármilyen ξ-től nyilván független)

5. Ha a ξ vsz. v. e. f.-e $F(x)$ és $\mathrm{M}(\xi)$ létezik,

$$\mathrm{M}(\xi) = \int_0^\infty [1 - F(x)]\, dx - \int_{-\infty}^0 F(x)\, dx$$

(és megfordítva, ha az integrálok léteznek, $\mathrm{M}(\xi)$ is létezik, és a fenti kifejezéssel egyenlő).

5-ből következik a v. é. szemléletes és gyakorlatban is használható értelmezése e. f.-e alapján: $\mathrm{M}(\xi)$ egyenlő a 27. ábrán + illetve — szal jelölt területek különbségével.



27. ábra

Ismételten leszögezzük, hogy egy vsz. v.-ra vonatkozó mérésekből annak v. é.-ét úgy határozhatjuk meg közelítőleg, hogy az egyes értékek relatív gyakoriságaival a definiáló összeget vagy az integrál egy közelítő Riemann-összegét képezzük, vagy az e. f. felrajzolása után a közölt módon járunk el. Ha netán folytonos e. f. (s. f.) görbe állana rendelkezésre, a szükséges integrálokat ezzel, ismert eszközökkel végezzük el (esetleg gépekkel). (Az így kapott v. é.-ek nyilván megegyeznek a szóban forgó adatok közönséges értelemben vett átlagértékével.)

c) Feltételes várható érték

Legyen a ξ vsz. v. feltételes e. f.-e A feltétel mellett, $F(x \mid A)$. (A tartozzék ugyanabba a vsz. algebrába, mint amelyen ξ értelmezve van.)

Ekkor ξ-hez hozzárendelhetünk egy $\mathrm{M}(\xi \mid A)$ mennyiséget, amelyet ξ A feltétel mellett vett feltételes várható értékének *fogunk nevezni, és amelyet az*

$$\mathrm{M}(\xi \mid A) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x \mid A)$$

integrállal definiálunk.

Bebizonyítható a következő tétel:

Ha az $A_1, \ldots, A_k, \ldots$ események ugyanabba a vsz. algebrába tartoznak, mint amelyen ξ értelmezve van, és teljes eseményrendszert alkotnak,

$$\mathrm{M}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_k)\, \mathrm{M}(\xi \mid A_k) \equiv \mathrm{M}[\mathrm{M}(\xi \mid A_k)].$$

Legyen az η vsz. v. értéke k, ha A_k következik be ($k = 1, 2, \ldots$). Ha $\zeta = \mathrm{M}(\xi \mid \eta)$ az a vsz. v., amely $= \mathrm{M}(\xi \mid k)$, ha $\eta = k$, *előbbi összegünket az* $\mathrm{M}(\xi) = \mathrm{M}[\mathrm{M}(\xi \mid \eta)]$ *alakban is írhatjuk* (a külső M η-ra vonatkozik).

Ha η folytonos vsz. v., amelynek s. f.-e $g(y)$, és amely ugyanazon a vsz. algebrán van értelmezve, mint ξ, és ξ feltételes e. f.-e $\eta = y$ feltétel mellett $F(x \mid y)$, ξ-*hez*

hozzárendelhetünk egy $\mathrm{M}(\xi \mid y)$ *mennyiséget, amelyet* ξ $\eta = y$ *feltétel mellett vett* **feltételes várható értékének** *fogunk nevezni, és amelyet az*

$$\mathrm{M}(\xi \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x \mid y)$$

Stietljes-integrállal **definiálunk.**

Ha $\zeta = \mathrm{M}(\xi \mid \eta)$ itt az a vsz. v., amely $= \mathrm{M}(\xi \mid y)$, ha $\eta = y$ *ismét fennáll* $\mathrm{M}(\xi) = \mathrm{M}[\mathrm{M}(\xi \mid \eta)]$; ez formailag teljesen egyezik a diszkrét esetre kimondott eredménnyel.

Ha ξ és η együttes e. f.-ének van $f(x, y)$ s. f.-e

$$\mathrm{M}(\xi \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) \, dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) \, dx \Big/ g(y).$$

Sokszor használható a következő összefüggés is: Tetszőleges ξ-re és η-ra

$$\mathrm{M}(\xi \eta) = \mathrm{M}[\eta \, \mathrm{M}(\xi \mid \eta)].$$

d) **Valószínűségi vektorok esete**

Röviden megemlítjük:

1. Ha a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ folytonos vsz. v.-k együttes e. f.-ének létezik $f(x_1, \ldots, x_n)$ s. f.-e (*csak* e. f. létezésének esetével itt nem foglalkozhatunk), ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$ *v. é.-ét az*

$$\mathrm{M}(\xi_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_k f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n$$

integrállal **definiáljuk,** feltéve, hogy ez abszolút konvergens.

2. Ha a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ diszkrét vsz. v.-k $[\xi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ az $x_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m^{(i)})$ értékeket veheti fel] együttes vsz. e.-ának tagjai $\mathrm{P}(\xi_1 = x^{(1)}, \ldots, \xi_n = x_j^{(n)})$ ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$ *v. é.-ét az*

$$\mathrm{M}(\xi_k) = \sum_{j=0}^{m^{(1)}} \cdots \sum_{j=0}^{m^{(n)}} x_j^{(k)} \, \mathrm{P}(\xi = x_j^{(1)}, \ldots, \xi_k = x_j^{(k)}, \ldots, \xi_n = x_j^{(n)})$$

összeggel **definiáljuk.**

Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ egy $\vec{\xi}$ vsz. vektor koordinátái, $\vec{\xi}$-hez hozzárendelünk egy $\vec{\mathrm{M}}(\vec{\xi})$ *mennyiséget, amelyet* $\vec{\xi}$ *várható értékének fogunk nevezni, és amelyet az* $[\mathrm{M}(\xi_1), \ldots, \mathrm{M}(\xi_n)]$ *vektorral definiálunk.* Ennek a komponensei nevezhetők $\vec{\xi}$ végpontja várható helye koordinátáinak is.

Analóg módon a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valamilyen $g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ függvényéhez *hozzárendelhetünk egy szintén v. é.-nek nevezett* $\mathrm{M}[g(\xi_1, \ldots, \xi_n)]$ *mennyiséget, az*

$$\mathrm{M}[g(\xi_1, \ldots, \xi_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n$$

definíció *segítségével,* feltéve, hogy a többszörös integrál abszolút konvergens. Ez értelemszerűen diszkrét vsz. v.-kra is kiterjeszthető.

e) **Komplex valószínűségi változók esete**

Egy $\zeta = \xi + i\,\eta$ *komplex vsz. v.* $\mathrm{M}(\zeta)$ *v. é.-ének definíciója*

$$\mathrm{M}(\zeta) = \mathrm{M}(\xi) + i\,\mathrm{M}(\eta).$$

Teljesen független komplex vsz. v.-k szorzatának v. é.-ére ugyanolyan tételek érvényesek, mint valós vsz. v.-knál. Ha $A(t)$ a t valós változók komplex értékű folytonos függvénye, minden véges intervallumban, korlátos ingadozású valós és imaginárius résszel, továbbá ξ valós vsz. v. és $\zeta = A(\xi)$ v. é.-e létezik, akkor $\mathrm{M}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x)\,dF(x)$ [$F(x)$ ξ e. f.-e]. Például: $\mathrm{M}(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)$ (t valós!). Fennáll: $|\mathrm{M}(\zeta)| \leqq \mathrm{M}(|\zeta|)$.

f) **A szórásnégyzet definíciója**

Ismeretes, hogy mérési adatok átlaguktól való eltérését, az adatok tömörülését *megállapodásszerűen* az átlagtól való eltérések négyzeteinek átlagából vont négyzetgyökkel szokták jellemezni.

Ebből *absztraháljuk* a következő definíciót:

Egy ξ vsz. v. v. é.-e körül való ingadozása jellemzőjéül *ξ-hez hozzárendelünk egy* $\mathrm{D}(\xi)$* *mennyiséget, amelyet* ξ **szórásának** *(rövidítve* **sz.***) fogunk nevezni, és amelyet*

$$\mathrm{D}(\xi) = +\sqrt{\mathrm{M}([\xi - \mathrm{M}(\xi)]^2)}$$

kifejezéssel **definiálunk**, *feltéve, hogy az ebben a kifejezésben szereplő v. é.-ek léteznek.* $\mathrm{D}(\xi)$ *négyzetét külön jellel:* $\mathrm{D}^2(\xi)$*-vel jelöljük, és* **szórásnégyzetnek** *(röviden* **sz. n.***) nevezzük (legtöbbször ezzel dolgozunk).*

Az ingadozás ezen definíciója mutatkozott a lehetőségek közül a legmegfelelőbbnek és legtermékenyebbnek. Gyakorlati jelentését a vsz. számítás gyakorlati értékének posztulátumából és a fenti definícióból közvetlenül levezethetjük. $\mathrm{D}^2(\xi)$ jellemzi közelítőleg a ξ-re vonatkozó egyes mérési adatok eltérését átlaguktól, illetve pontosabban, $\mathrm{D}^2(\xi)$ kb. az adatok négyzetes középhibája körül ingadozik; és megfordítva: a kísérleti adatok négyzetes középhibája pedig azon ξ sz. n.-e körül, amelynek bizonyos értékei a kísérleti adatok.

A gyakorlatban a v. é. ($\approx$ átlagérték) és a sz. n. a legtöbbet mondó és a viszonyokat sokszor már elegendően is jellemző adatok. Ezért fontos az ismeretük, itt is *ezért* foglalkozunk annyit velük.

g) **Tételek a szórásnégyzetről**

Bebizonyíthatók a következő tételek:

1. Tetszőleges ξ vsz. v.-nél

$$\mathrm{D}^2(\xi) = \mathrm{M}(\xi^2) - [\mathrm{M}(\xi)]^2$$

2. Ha a és b állandók és $\eta = a\,\xi + b$

$$\mathrm{D}^2(\eta) = a^2\,\mathrm{D}^2(\xi)$$

* D ismét operációt jelent

3. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *páronként független* vsz. v.-k,

$$D^2(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + \ldots + D^2(\xi_n).$$

A sz. n. gyakorlati meghatározását illetőleg az elv ugyanaz, mint amit a v. é.-nél kifejtettünk. A v. é., sz. n. és a méréseknél szereplő átlag és négyzetes középhiba pontosabb kapcsolatával a matematikai statisztikában foglalkoznak.

Itt jegyezzük meg, hogy a legtöbb esetben egyszerűség kedvéért a szereplő *vsz. v.-kat lineáris transzformációval olyan vsz. v.-ba visszük át, melyeknek v. é.-e* 0 *és sz. n.-e* 1. *Ezt az új vsz. v.-t* **normált** *(vagy standardizált)* **vsz. v.-nak** *nevezzük.* Könnyen bebizonyítható, hogy a szükséges lineáris transzformáció $\eta = [\xi - M(\xi)]/D(\xi)$. Tetszőleges ξ helyett ezzel a formulával bevezetett vsz. v. normált vsz. v. lesz.

h) **Valószínűségi vektorok esete**

Megemlítjük még, hogy egy $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *n dimenziós vsz. vektorhoz (az egydimenzióbeli sz. n. analogonjaként) hozzárendelhetünk egy* $||\sigma_{ij}||$ *matrixot, amelyet* $\vec{\xi}$ **szórásmatrixának** *nevezünk, és amelynek az elemeit a*

$$\sigma_{ij} = M[(\xi_i - M(\xi_i))(\xi_j - M(\xi_j))] \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

összefüggés definiálja, amennyiben a v. é.-ek léteznek.

Feltételes e. f.-ek esetén a feltételes v. é. segítségével feltételes sz. n.-et is definiálhatunk; mindezt (és a gyakorlati értéküket) itt nem részletezzük.

i) **Momentumok**

V. é. és sz. n. tulajdonképp speciális esetei az e. f.-ek bizonyos jellemzőinek, az ún. **momentumoknak.** Idevágó *definíciók:*

Egy ξ *vsz. v.-hoz hozzárendelünk egy* μ_k *mennyiséget, amelyet* ξ *k-adik* **centrális momentumának** *nevezünk, és amelyet a*

$$\mu_k = M[(\xi - M(\xi))^k]$$

függvénnyel **definiálunk** *(amennyiben a v. é.-ek léteznek).*

$M(\xi) = 0$ *esetén* **kezdeti momentumról** *beszélünk* $[= M(\xi^k)]$. Külön jele: m_k.

Korábban említett tételekből következik, hogy

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^k \, dF(x)$$

$[F(x)$ ξ e. f.-e].

$M(\xi) = 0$ esetén ez az

$$M(\xi^k) \equiv m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x)$$

alakra redukálódik.

Ha az $F(x)$ $f(x)$ s. f.-e létezik, $dF(x)$ helyébe $f(x)\,dx$ kerül. S. f. létezése esetén továbbá vsz. e.-oknál a megfelelő integrálok, illetve szummák ugyancsak gépiesen felírhatók a definíciók alapján. A definiáló integrál alakjából következik, hogy páros k-nál (tehát pl. a sz. n.-nél is) a momentumok mindig > 0, amennyiben léteznek.

A momentumok meghatározása kísérleti adatokból úgy történik, hogy az egyes kísérleti adatok és előfordulásuk relatív gyakoriságaival, mint x_i és $f(x_i)$ értékekkel képezzük a szükséges v. é.-eket, illetve a szóban forgó integrálok közelítő Riemann-összegét. Persze, ha nem tudjuk előre, léteznek-e ezek, esetleges (véges) eredménynek kétes értéke van, hisz a közelítés, hibák stb. folytán a közelítő összegre véges értéket is kaphatunk, bár az integrál divergens. Erről nem szabad elfeledkezni. — A gyakorlatban sokszor olyan vsz. v.-kkal van dolgunk, amelyek csak véges értékeket vehetnek fel. Ekkor a momentumok eleve léteznek*, kísérleti értéküket is nyugodtan használhatjuk, még akkor is, ha az a végtelen intervallumon értelmezett e. f., amely a végesben jól közelíti a vsz. v. e. f.-ét, s amellyel — épp ezért — könnyebbség kedvéért dolgozunk, nem rendelkezne momentumokkal.

Sok gyakorlati vizsgálatnál elég a v. é., sz. n., esetleg még a 3., 4. momentum elméleti kiszámítása, és az e. f. nem is kell. Ezért fontos ezeket a jellemzőket bevezetni: ezek sokszor még akkor is meghatározhatók, amikor az e. f. nem és így a szükséges minimális számú adat rendelkezésre fog állni. Alapelveink szerint ezen adatok körül ingadoznak majd tényleg elvégzett kísérleteknél az átlagérték és a többi jellemzők — vagyis amit a kísérletekből leszűrhetünk. (Ha viszont észlelt adatokból kell a v. é.-et és a sz. n.-et meghatározni, a „klasszikus" átlagértéket, illetve az akörül való négyzetes középhibát számítjuk ki az adatokból; láttuk, hogy ezek nagyszámú észlelésnél az elméleti v. é. és sz. n. körül ingadoznak, s így ezek közelítő értékeinek vehetők.)

j) Korrelációs együttható

Két esemény függése fokának szemléltetésére is szükséges egy újabb jellemző. Mivel *független* (egyazon vsz. algebrabeli) A és B ($\neq I$) eseményeknél $\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) = 0$; kívánkozik *nem független* A és B-nél is a $\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$ különbséget venni a függőség jellemzőjének. Mivel pedig A és B úgy is felfoghatók, hogy két vsz. v. bizonyos értékeket vesz fel, az előbbit mindjárt általánosítjuk, és *vsz. v.-k függősége jellemzésére* (részben a matematikai kezelés szempontjait is figyelembe véve) *a következő mennyiséget definiáljuk* (jobb híján; ti. ez már nem minden esetben tekinthető a függőség jellemzőjének, csak egyes aleseteinél, ezek kedvéért tartjuk meg, mert ezeket másként nem tudjuk alkalmasan jellemezni):

Ha ξ és η tetszőleges (nem elfajult) vsz. v.-k, ezekhez hozzárendelünk egy $\mathbf{R}(\xi, \eta)$ mennyiséget, amelyet ξ és η **korrelációs együtthatójának** *(rövidítve* **k. e.***) nevezünk és amelyet az*

$$\mathbf{R}(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{M}\left[(\xi - \mathbf{M}(\xi))\,(\eta - \mathbf{M}(\eta))\right]}{\mathbf{D}(\xi)\,\mathbf{D}(\eta)} = \frac{\mathbf{M}(\xi\,\eta) - \mathbf{M}(\xi)\,\mathbf{M}(\eta)}{\mathbf{D}(\xi)\,\mathbf{D}(\eta)}$$

összefüggéssel **definiálunk** *(feltéve, hogy a v. é.-ek és sz. n.-ek léteznek).*

Kiindulásunkkal ez úgy függ össze, hogy ha ξ, illetve η az A, *illetve* B karakterisztikus változói, $\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{P}(A)$ é. í. t. (könnyen igazolható), s ekkor $\mathbf{R}(\xi, \eta) = [\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)]\,/\sqrt{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})}$, vagyis $\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$-vel arányos. Jelen esetben a k. e.-t $\mathbf{R}(A, B)$-vel is szokták jelölni.

Mivel egy többdimenziós vsz. vektor egyes komponenseinek (illetve ezek függvényének) v. é.-ét már definiáltuk, értelemszerűen felírhatjuk egy ilyen vsz. vektor bármely ξ_i és ξ_j ($i \neq j$) komponense közt is a k. e.-t, ha a komponensek együttes s. f.-ét ismerjük.

* Az őket definiáló integrál mindig létezik.

k) **Tételek a korrelációs együtthatóról**

A k. e.-ra fennállnak a következők:

1. $-1 \leqq R(\xi, \eta) \leqq 1$.

2. Ha ξ és η függetlenek, $R(\xi, \eta) = 0$, ξ, η *korrelálatlanok*. **Megfordítva ez általában nem igaz.** Igaz azonban

3. Ha ξ, illetve η a pozitív vsz.-ű A, illetve B események karakterisztikus változói, $R(\xi, \eta)$ akkor és csak akkor 0, ha ξ és η függetlenek.

4. Ha a (ξ, η) vsz. vektor normális eloszlású, és $R(\xi, \eta) = 0$, ξ és η függetlenek.

5. Ha a $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vsz. vektor normális eloszlású (az n dimenziós térben), és a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k páronként korrelálatlanok (a megfelelő k. e. $= 0$), akkor a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k teljesen függetlenek is. (Az *együttes* e. f. és nem az *egyes* vsz. v.-k e. f.-e normális!)

6. $R(\xi, \eta)$ akkor és csak akkor ± 1, ha létezik olyan $a \neq 0$ és b konst, hogy $\eta = a\xi + b$, vagyis a kapcsolat lineáris; ez esetben $a > 0$-nál $+1$, $a < 0$-nál -1 áll fenn. (Ha ξ, η karakterisztikus változók, $R(\xi, \eta)$ akkor és csak akkor $+1$, illetve -1, ha a velük jellemzett A és B eseményekre $A = B$, illetve $A = \bar{B}$ áll fenn.

7. Ha $\xi' = a_1\xi + b_1$, $\eta' = a_2\eta + b_2$,

$$R(\xi, \eta) = R(\xi', \eta').$$

Ha a ξ és η vsz. v.-kra van egy sereg kísérleti adatunk, $R(\xi, \eta)$-t nyilván közelítőleg megkaphatjuk, ha az adatokkal képezzük az átlagérték stb.-t, s ezekkel $R(\xi, \eta)$ kifejezését (az átlagérték ti. a v. é.-et közelíti meg, é. í. t.). Ezeket a számításokat sokszor leegyszerűsíthetjük 7. felhasználásával. Az eredményből nagyszámú kísérlet esetén jó közelítéssel következtethetünk ξ és η (1—7-ben) foglalt egyes tulajdonságaira. — Egy elméleti úton kapott $R(\xi, \eta)$ érték sokszor mond valamit ξ, η viszonyáról, és így adott kísérletsorozatnál a ξ, η-nak ebben a sorozatban mutatkozó értékeinek kapcsolatáról is; ξ és η lineáris kapcsolatára nézve a k. e. biztos tájékoztató (vö. 6-kal!).

Leglényegesebbek azok az esetek, amidőn a korrelációs együttható értéke (legalábbis közelítő) függetlenségre vagy lineáris kapcsolatra mutat; pl. ≈ 1 k. e.-nál feltehető, hogy a vizsgált vsz. v.-k közel lineáris kapcsolatban vannak. Ha $R(\xi, \eta)$ értéke 0 és $+1$ (-1) között van, ξ és η közt vagy nem lineáris, de függvényszerű kapcsolat áll fenn, vagy pedig ez sem, hanem, ahogy mondani szokták, csak *sztohasztikus* kapcsolat: ξ és η nem független, de kapcsolatuk nem fejezhető ki függvénnyel, véletlenlenszerűen más és más (legtöbbször valamilyen függvénnyel kifejezhető összefüggés körül ingadozik). Ilyen pl. bizonyos korú férfiak magassága és testsúlya közti összefüggés (általában: sok biológiai „ökölszabály": „hány kg-nak kell lennie valakinek, ha ilyen és ilyen magas", s. í. t.).

Pozitív k. e. esetén ξ és η egyirányban ingadoznak, negatív k. e. esetén ellenkező irányban.

Megjegyezzük még, hogy egy ζ komplex vsz. v. sz. n.-ét és k. e.-ját és a róluk szóló tételeket gépiesen bevezethetjük, miután ζ v. é.-ét és egyéb tulajdonságait már definiáltuk, illetve ismerjük.

l) **Regressziós görbék és egyenesek**

A sztohasztikus kapcsolatban álló ξ és η vsz. v.-k összefüggését — ξ és η együttes e. f.-én kívül — közelítőleg például úgy is jellemezhetjük, hogy *megkeressük azt az* $A(x)$ *függvényt, amelyre* η *és* $A(\xi)$ *különbsége négyzetének v. é.-e minimális* (a szereplő v. é.-ek létezését itt és a továbbiakban végig feltesszük!); ha ξ és η egyes összetartozó

értékeit ismerjük, és ezeket az értékpárokat egy (x, y) koordinátarendszerben pontokkal ábrázoljuk, az $y = A(x)$ görbe jó közelítéssel a legkisebb négyzetek módszere alapgondolatának megfelelően fog elhaladni ezen pontok között. A számítás eredménye: $A(x)$ η-nak a $\xi = x$ feltétel mellett vett v. é.-e,

$$A(x) = \mathbf{M}(\eta \mid \xi = x).$$

Ezt a függvényt (amelyet $\mathbf{M}(\eta \mid x)$*-szel is jelölnek) ábrázoló görbét* η ξ**-re vonatkozó regressziós görbéjének** *nevezzük.*

Értelemszerűen beszélhetünk ξ **η-ra vonatkozó regressziós görbéjéről** *is. Ez az* $\mathbf{M}(\xi \mid y)$*-nal jelölt* $\mathbf{M}(\xi \mid \eta = y)$ *függvény görbéje.*

A regressziós görbék általában nem egyenesek. Kiszámításunkhoz ismerni kell (pontosan vagy közelítőleg) ξ és η együttes e. f.-ét (s. f.-ét). Ennél egyszerűbb és ezt tetszőleges pontossággal megközelítő módszer az, hogy pl. $y = A(x)$-et *egy* $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *polinommal helyettesítjük,* amelynek együtthatóit ugyancsak abból a feltételből határozzuk meg, hogy a velük képezett $\mathbf{M}\left(\left(\eta - \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k\right)^2\right)$ kifejezés minimális legyen.

Az $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *függvényt* η ξ**-re vonatkozó** n**-ed fokú regressziós parabolájának** *nevezzük;* meghatározásának módjára általánosságban nem térünk ki, hanem csak azzal az esettel foglalkozunk, *amidőn ez* $y = ax + b$ *alakú, vagyis lineáris függvény.*

Ekkor η ξ**-re vonatkozó regressziós egyenesről** *beszélünk. Kimutatható, hogy ezen egyenes egyenlete*

$$\frac{y - \mathbf{M}(\eta)}{\mathbf{D}(\eta)} = \mathbf{R}(\xi, \eta)\,\frac{x - \mathbf{M}(\xi)}{\mathbf{D}(\xi)}.$$

Mindezek a fogalmak értelemszerűen kiterjeszthetők arra az esetre is, amidőn ξ-t vonatkoztatjuk η-hoz.

ξ η-ra vonatkozó regressziós egyenesének *egyenlete például*

$$\frac{y - \mathbf{M}(\eta)}{\mathbf{D}(\eta)} = \frac{1}{\mathbf{R}(\xi, \eta)}\,\frac{x - \mathbf{M}(\xi)}{\mathbf{D}(\xi)}.$$

Ha a normált ξ *és* η *vsz. v.-kat* ξ^* *és* η^**-gal jelöljük,* η^* ξ^**-re vonatkozó regressziós egyenesének egyenlete* (a normálásnak megfelelő új (x^*, y^*) koordinátarendszerben):

$$y^* = \mathbf{R}(\xi^*, \eta^*)\,x^* \equiv \mathbf{R}(\xi, \eta)\,x^*$$

lesz, a k. e.-ra szóló 7. összefüggés alapján; ξ^* η^**-ra vonatkozó regressziós egyenesének egyenlete pedig*

$$y^* = \frac{1}{\mathbf{R}(\xi^*, \eta^*)}\,x^* \equiv \frac{1}{\mathbf{R}(\xi, \eta)}\,x^*$$

Számolásoknál ez nagy könnyebbséget jelent.

Ha ξ és η egyes értékeire kísérleti adatok vannak, a regressziós egyenes egyenletét könnyű közelítőleg meghatározni, minthogy $\mathbf{M}(\eta)$ stb. adatokból való közelítő meghatározásának módját már ismerjük.

Látjuk, hogy a két regressziós egyenes közti szög annál kisebb, minél nagyobb a k. e. abszolút értéke („minél erősebb ξ és η közt a korreláció"). Adatok feldolgozásánál ez a tény is segítségünkre lehet.

ξ és η sztohasztikus kapcsolatáról a regressziós parabolák (egyenesek) általában persze jóval kevesebb felvilágosítást adnak, mint ξ és η együttes e. f.-e (s. f.-e). Ha azonban a sztohasztikus kapcsolat közel függvényszerű, a regressziós parabolák (egyenesek) is eléggé használhatók; ez a gyakorlatban nagy könnyebbséget jelent.

Az itt tárgyaltak kettőnél több vsz. v. esetére nagyjából értelemszerűen terjeszthetők ki; a részleteket nem közölhetjük.

Régebben a k. e.-hoz hasonlóan a regressziós görbéknek (egyeneseknek, paraboláknak) nagy jelentőséget tulajdonítottak; a modern vizsgálatok kapcsán, miután az említett jellemzők értékét kellőleg felderítették, ez a jelentőség lényegesen megcsappant. Alkalmazásuk esetén mindig tartsuk szem előtt alkalmazhatóságuknak azokat a kereteit, amelyekről az előbbiekben bőven volt már szó.

Példák és feladatok

1. N egyént bizonyos szempontú vérvizsgálatnak vetnek alá. Minthogy nem akarják mindet megvizsgálni, így járnak el: k egyén vérét összekeverik, és a keveréket analizálják. Ha utóbbi eredménye negatív, a vonatkozó k egyént nem kell külön vizsgálni (feltesszük, hogy egyetlen egyén pozitív jellegű vére is már pozitívvá teszi az eredményt). Ha a keverék vizsgálata pozitív eredményt ad, mind a k egyén vérét megvizsgálják (vagyis ekkor összesen $k + 1$ vizsgálatot végeznek). Ezt az eljárást, a hátralevő egyénekből ismét k-t választva ki, megismétlik é. í. t. Ha bármelyik egyénnél ugyanazzal a vsz.-gel lehet a vizsgálat eredménye pozitív, és az egyes vizsgálatok eredményei független események, *a)* mi a vsz., hogy a k egyén összekevert vérének vizsgálata pozitív eredményt ad, *b)* mi az említett módszernél az összes elvégzendő vizsgálatok számának v. é.-e (azaz mikor az N egyént k személyből álló csoportokba osztva, csoportonként vizsgáljuk), *c)* milyen k-nál lesz az előbbi v. é. minimális?

Megoldás. Legyen p annak a vsz., hogy egy egyénnél a vizsgálat eredménye pozitív. Ekkor *a)*-nál annak a vsz.-ét keressük, hogy k egyén vére közül legalább 1 pozitív eredményt ad; ez annak az ellentettje, hogy egy sem ad pozitívat, vagyis vsz.-e (feltevéseink alapján) $1 - (1 - p)^k \equiv 1 - q^k$; *b)* esetében legyen összesen $m + 1$ csoport: m számú k egyénes és egy $N - mk$ egyénből álló. Az összes vizsgálatok száma, ξ, összeadódik az $1, 2, \ldots, m, m + 1$ csoportnál végzendő kísérletek számából, ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_m$, ξ_{m+1}-ből. Feltevéseink szerint utóbbiak függetlenek, és így esetről esetre ugyanazok a viszonyok, csak ξ_{m+1}-nél kell kevesebb vizsgálat ($l = N - mk$), ξ_i ($i = 1, \ldots, m$) csak 1 vagy $k + 1$ lehet, ξ_{m+1} csak 1 vagy l. Ekkor az összes vizsgálatok számának v. é.-e, $\mathrm{M}(\xi) = \sum_{i=1}^{m+1} \mathrm{M}(\xi_i)$ és $i = 1, 2, \ldots, m$ esetében $\mathrm{M}(\xi_i) = 1$. $\mathrm{P}(\xi_i = 1) + (k + 1)\,\mathrm{P}(\xi_i = k + 1) = q^k + (k + 1)(1 - q^k)$, mert akkor kell $k + 1$ vizsgálat, ha a keverék pozitív eredményt adott é. í. t. (a szereplő vsz.-ek i-től függetlenek). Hasonlóan $\mathrm{M}(\xi_{m+1}) = q^l + (l + 1)(1 - q^l)$; mindezekkel $\mathrm{M}(\xi) = m\,[k(1 - q^k) + 1] + [l(1 - q^k) + 1]$. *c)*-nél $\mathrm{M}(\xi)$ mint k függvénye minimuma helyét kell keresnünk, $mk + l = N$ (fix) feltétel mellett. Ez általánosságban nem határozható meg zárt alakban.

2. Láncmolekulák síkbeli vetületét a következő modellel próbálták tanulmányozni: A síkban n egységnyi hosszú „rúdból" álló „lánc" van kiterítve. Két szomszédos rúd

irányainak szöge $\pm\alpha$ lehet csak ($\alpha \neq 0$); bármelyik értékét a szög 1/2 vsz.-gel veheti fel. Az egyes „rudak" közti szögek értékei egymástól függetlenek. A „lánc" eleje és vége közti távolság ekkor vsz. v. lesz. Számítsuk ki ezen távolság négyzetének a v. é.-ét.

3. A 3. § 9. fel. feltételei mellett határozzuk meg, mi egy x éves egyén hátralevő élettartamának v. é.-e.

Megoldás. Az említett feladatban láttuk, hogy ha az x éves egyén halálának időpontja $x + \eta$, η e. f.-e $\mathbf{P}(\eta < y) = F(y) = 1 - l(x + y)/l(x)$ ($y > 0$; egyébként 0). $\mathbf{M}(\eta)$-t keressük; definíció szerint (x-et paraméterként kezelve) $\mathbf{M}(\eta) = -\int_0^\infty \frac{y}{l(x)} \frac{dl(x+y)}{dy} dy =$ (parciális integrálással) $= \frac{1}{l(x)} \int_0^\infty l(x + y)\, dy$. Ezt az értéket egy x életkorú egyén várható hátralevő élettartamának nevezzük.

4. Állapítsuk meg a ξ **binomális eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. Feltevés szerint $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(0 < p < 1)$; $k = 0, \ldots, n$), és így pl. $\mathbf{M}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ez az összeg elég könnyen kiszámítható (l. lentebb), legegyszerűbb azonban a következő módszer, amely már általános tételeket használ fel: Legyen egy kísérlet eredménye A vagy $\bar{A}$; $\mathbf{P}(A) = p$. Ismételjük meg ezt a kísérletet n-szer; az egyes eredmények legyenek függetlenek; ha az i-edik esetben az eredmény A, jellemezze ezt a ξ_i vsz. v. 1 értéke, ellenkező esetben legyen $\xi_i = 0$. Az n kísérlet alatt A bekövetkezésének számát $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ adja meg. Ez az összeg nyilván binomiális eloszlású vsz. v.; összeg v. é.-ének formulája szerint $\mathbf{M}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}(\xi_i)$. De $\mathbf{M}(\xi_i) = 1 \cdot \mathbf{P}(\xi_i = 1) + 0 \cdot \mathbf{P}(\xi_i = 0) = 1 \cdot \mathbf{P}(A) + 0 \cdot \mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(A) = p$, és így

$$\mathbf{M}(\xi) = np.$$

Ugyanezt kapnánk az első komplikáltabb módon.* Ugyanígy határozzuk meg $\mathbf{D}^2(\xi)$-t is. Itt használjuk ki először a ξ_i-k függetlenségét; ennek alapján alkalmazhatjuk a vsz. v. összegének sz. n.-éről szóló tételünket, és azt kapjuk, hogy $\mathbf{D}^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}^2(\xi_i)$. De $\mathbf{D}^2(\xi_i) = \mathbf{M}[(\xi_i - \mathbf{M}(\xi_i))^2] = \mathbf{M}[(\xi_i - p)^2] = (1-p)^2 \mathbf{P}(A) + (0-p)^2 \mathbf{P}(\bar{A}) = (1-p)^2 p + p^2 (1-p) = p(1-p)$, és így

$$\mathbf{D}^2(\xi) = np(1-p).$$

Vegyük észre, hogy a binomiális eloszlást normális s. f.-nyel való közelítésekor a normális s. f.-ben v. é.-ként np és sz. n.-ként $npq = np(1-p)$ szerepelt; a közelítő normális s. f. tehát olyan volt, amelynek v. é.-e és sz. n.-e megegyezett a binomiális eloszláséival; ezzel új értelmet adtunk az amott szereplő mennyiségeknek is. — Röviden megmutatjuk, hogyan lehet általánosságban kiszámítani az $\mathbf{M}(\xi)$-ben

* Módszerünk egyébként akkor is alkalmazható, ha $\mathbf{P}(A)$ kísérletről kísérletre változik (pl. az i-ediknél $\mathbf{P}(A) = p_i$). Ez esetben már igen bonyolult volna a v. e.-ból kiindulva számítani ki a v. é.-et. Ezek a sz. n. esetére is szólnak l

szereplőhöz hasonló összegeket. Az eljárás a következő: Legyen a $\sum_{k=0}^{\infty} k^{\nu} A_k x^k$ hatványsor $\nu = 0, 1, \ldots$-nél egyenletesen konvergens, ha $|x| < B$ (A_k, B konst), és legyen összege $f_{\nu}(x)$. Legyen $f_0(x)$ ismert; akkor $f_{\nu}(x)$-et a következő rekurzív formula adja meg: $x \frac{df_{\nu}}{dx} = f_{\nu+1}$, amiről azonnal meggyőződhetünk. — Írjuk fel a binomiális eloszlást $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ alakban, és számítsuk ki az előbbiek segítségével $\sum_{k=0}^{n} k^{\nu} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = f_{\nu}(p)$-t. Ez a fentiekből $A_k = \binom{n}{k} q^{n-k}$ ($k \leqq n$; egyébként $= 0$), $x = p$ helyettesítéssel származik (a korlátok $0 \leqq p \leqq 1$), $f_0(p)$ nyilván $(p + q)^n$, és így $f_1(p) = p \frac{df_0}{dp} = np\,(p + q)^{n-1}$; $f_2(p) = p \frac{df_1}{dp} = np\,[(p + q)^{n-1} + (n - 1)\,p(p + q)^{n-2}]$. Mivel binomiális eloszlásnál $p + q = 1$, a végeredmények np, illetve $np\,[1 + (n - 1)\,p]$, vagyis $\mathrm{M}(\xi) = np$ és $\mathrm{D}^2(\xi) = \mathrm{M}(\xi^2) - [\mathrm{M}(\xi)]^2 = np\,[1 + (n - 1)\,p] - n^2 p^2 = np\,[1 - p]$, ahogy fentebb is megkaptuk.

5. Számítsuk ki egy ξ POISSON-**eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. Értelmezés szerint $\mathrm{M}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ ($\lambda > 0$ konst), $\mathrm{D}^2(\xi)$-hez pedig elég $\mathrm{M}(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \lambda^k / k!$-t kiszámítani, mert ezzel és $\mathrm{M}(\xi)$-vel $\mathrm{D}^2(\xi)$ kifejezhető.

Az előző feladatban közölt módszert itt is alkalmazhatjuk, ha $e^{-\lambda}$-t a Σ elé kiemeljük; az ekkor kapott $\sum_{k=0}^{\infty} k^{\nu} \lambda^k / k! = f_{\nu}(\lambda)$ típusú összegekre nyilván alkalmazható az említett módszer, mert ez a sor egyenletesen konvergens ($-\infty < \lambda < \infty$)-re (két egymás utáni koefficiens hányadosa $\to \infty$!). $f_0(\lambda)$ nyilván e^{λ}, s így $f_1(\lambda) = \lambda \frac{df_0}{d\lambda} = \lambda e^{\lambda}$, $f_2(\lambda) = \lambda \frac{df_1}{d\lambda} = \lambda e^{\lambda}(1 + \lambda)$, s ezzel végül is $\mathrm{M}(\xi) = e^{-\lambda} f_1(\lambda)$, azaz

$$\mathrm{M}(\xi) = \lambda,$$

továbbá $\mathrm{M}(\xi^2) = e^{-\lambda} f_2(\lambda) = \lambda(1 + \lambda)$, vagyis a sz. n.-et megadó $\mathrm{M}(\xi^2) - [\mathrm{M}(\xi)]^2 = \lambda(1 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$, és

$$\mathrm{D}^2(\xi) = \lambda.$$

A POISSON-*eloszlás v. é.-e és sz. n.-e tehát ugyanaz.*

4. **Számítsuk ki a ξ hipergeometrikus eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. Definíció szerint $\mathrm{M}(\xi) = \sum_{k=0}^{N} k \binom{M}{k} \binom{N - M}{n - k} \Big/ \binom{N}{n}$ és a $\mathrm{D}^2(\xi)$ kiszámításához szükséges $\mathrm{M}(\xi^2) = \sum_{k=0}^{M} k^2 \binom{M}{k} \binom{N - M}{n - k} \Big/ \binom{M}{n}$. Mindjárt az $\mathrm{M}(\xi^r) =$

$= \sum_{k=0}^{M} k^r \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} \equiv A(r, M, N, n) \Big/ \binom{N}{n}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ összeg kiszámítását fogjuk elvégezni (ennek a keresettek speciális esetei). Rekurzív formulát adunk meg az $A(r, M, N, n)$-ekre a következőképpen:

$$A(r, M, N, n) = M \sum_{k=0}^{M} k^{r-1} \binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k} = M \sum_{k=1}^{M} k^{r-1} \binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k} =$$

$$= M \sum_{k=0}^{M-1} (k+1)^{r-1} \binom{M-1}{k}\binom{N-M}{n-1-k} =$$

$$= M \sum_{k=0}^{M-1} \binom{M-1}{k}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-k} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} k^i =$$

$$= M \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} \sum_{k=0}^{M-1} k^i \binom{M-1}{k}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-k} =$$

$$= M \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} A(i, M-1, N-1, n-1).$$

Ezzel rekurzív összefüggést kaptunk; a kezdeti feltétel: $A(0, M^*, N^*, n^*) = \sum_{k=0}^{M^*} \binom{M^*}{k}\binom{N^*-M^*}{n^*-k} = \binom{N^*}{n^*}$ (ismert összefüggés) bármilyen M^*, N^*, n^*-ra, amelyekre a binomiális együtthatóknak értelme van. Ebből a rekurzív összefüggésből $A(1, M, N, n) = M \cdot A(0, M-1, N-1, n-1) = M \binom{N-1}{n-1}$, amiből $\mathrm{M}(\xi) = A(1, M, N, n) \Big/ \binom{N}{n} = (M/N)\, n$. A v. é. tehát

$$\mathrm{M}(\xi) = (M/N)\, n.$$

Mint tudjuk, a hipergeometrikus eloszlás pl. N darabból álló s eközött M selejteset tartalmazó készletből kivett n elemű mintában mutatkozó selejtes darabok ξ számának vsz. eloszlása ($\xi = 0, 1, \ldots, M$). Ekkor $\mathrm{M}(\xi)$ az előbbiek szerint $(M/N)\, n$. Ám M/N annak a vsz., hogy egy kiemelésnél selejtes darabot kapunk; ha most n-szer veszünk ki egy-egy darabot a készletből és mindig visszatesszük, és η-szor találtunk (az n kiemelésből) selejteset, nyilván η binomiális eloszlású vsz. v. M/N és n paraméterekkel, és $\mathrm{M}(\eta) = (M/N)\, n$, vagyis ugyanaz, mint $\mathrm{M}(\xi)$. Ezt úgy fejezik ki, hogy n elemes, visszatevés nélküli, illetve visszatevéses mintavételnél (ugyanazon készletből) a mintában levő selejtes darabok számának v. é.-e ugyanaz. — Térjünk át $\mathrm{M}(\xi^2)$-re. Ekkor $A(2, M, N, n)$ kell. Ez

$$M \binom{1}{0} A(0, M-1, N-1, n-1) + M \binom{1}{1} A(1, M-1, N-1, n-1) =$$

$$= M \binom{N-1}{n-1} + M(M-1) \binom{N-2}{n-2},$$

és így

$$\mathrm{M}(\xi^2) = A(2, M, N, n) \Big/ \binom{N}{n} = Mn/N + M(M-1)\, n(n-1)/N(N-1),$$

végül is a sz. n.-et megadó

$$\mathbf{M}(\xi^2) - [\mathbf{M}(\xi)]^2 = (Mn/N)\,(1 - M/N)\,[1 - (n-1)/(N-1)],$$

vagyis

$$\mathbf{D}^2(\xi) = (M\,n/N)\,(1 - M/N)\,(1 - (n-1)/(N-1)).$$

Rekurzív formulánk segítségével nyilván kiszámíthatók a magasabb momentumok is.

7. A 6. § 17. fel. alapján számítsuk ki a ξ **k-adrendű negatív binomális eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. Láttuk (6. § 17. fel.), hogy a k-adrendű negatív binomális eloszlás k darab független és egyenként $p\,q^{n-1}$ $(p + q = 1)$ (geometriai) eloszlású η vsz. v. összegének eloszlása. De $\mathbf{M}(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = 1/p$, és $\mathbf{D}^2(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 pq^{n-1} - [\mathbf{M}(\eta)]^2 = q/p^2$, és így

$$\mathbf{M}(\xi) = k/p$$

és

$$\mathbf{D}^2(\xi) = kq/p^2.$$

8. Számítsuk ki egy ξ **klasszikus valószínűség-eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. Feltevésünk szerint legyenek ξ értékei $1, 2, \ldots, n$ és $\mathbf{P}(\xi = i) = 1/n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}(\xi) = (n + 1)/2$$

és

$$\mathbf{D}^2(\xi) = (n^2 - 1)/12.$$

9. Számítsuk ki egy ξ **normális eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. Ha ξ s. f.-e, $f(x) = \exp\,[-(x-m)^2/2\sigma^2]/\sqrt{2\pi}\,\sigma$, definíció szerint a v. é. $\int_{-\infty}^{\infty} x\,(\exp\,[-(x-m)^2/2\sigma^2]/\sqrt{2\pi}\,\sigma)\,dx = m$, vagyis

$$\mathbf{M}(\xi) = m,$$

és a sz. n.-et definiáló $\mathbf{M}[(\xi - \mathbf{M}(\xi))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\,(\exp\,[-(x-m)^2/2\sigma^2]/\sqrt{2\pi}\,\sigma)\,dx = \sigma^2$, azaz

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \sigma^2$$

(tehát $\mathbf{D}(\xi) = \sigma$). Ezzel megkaptuk egy *normális eloszlású vsz. v. s. f.-e paramétereinek jelentését: m a vsz. v. várható értéke, σ pedig a szórása.*

10. Számítsuk ki egy ξ **egyenletes eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. Legyen a szóban forgó ξ vsz. v. s. f.-e $f(x) = 1/(b-a)$ (konst), ha $(a < x \leqq b$; egyébként $\equiv 0)$. Ekkor ξ v. é.-e $= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = (a+b)/2$, vagyis

$$\mathbf{M}(\xi) = (a + b)/2.$$

Mivel pedig $\mathbf{M}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = (a^2 + ab + b^2)/3$ a sz. n.-et szolgáltató $\mathbf{M}(\xi^2) - (\mathbf{M}(\xi))^2 = (b-a)^2/12$, és így

$$\mathbf{D}^2(\xi) = (b-a)^2/12.$$

11. Számítsuk ki egy ξ **exponenciális eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. ξ s. f.-e $\lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geqq 0$; egyébként $= 0$); definíció szerint ξ v. é.-e $\lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx = 1/\lambda$, azaz

$$\mathbf{M}(\xi) = 1/\lambda.$$

Mivel pedig $\mathbf{M}(\xi^2) = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx = 2/\lambda^2$,

$\mathbf{D}^2(\xi) = 1/\lambda^2$.

12. Számítsuk ki egy ξ χ^2 **eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. ξ s. f.-e n darab 0 v. é.-ű és σ^2 sz. n.-ű normális eloszlású független vsz. v. (mondjuk ξ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)) négyzete összegének ($\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^2$-nek) a s. f.-e. $\xi_i^2 \equiv \eta_i$ s. f.-e viszont a 6. § 9. pl. alapján $h(x) = (1/\sqrt{2\pi}\,y\,\sigma)e^{-y/2\sigma^2}$ ($y \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$). Az η_i-k v. é.-éből és sz. n.-éből már következtethetnénk ξ v. é.-ére és sz. n.-ére. Ám $\mathbf{M}(\eta) = \int_0^{\infty} \frac{y\,e^{-y/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,y\,\sigma}\,dy = \sigma^2$, és $\mathbf{M}(\eta^2) = \int_0^{\infty} \frac{y^2\,e^{-y/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,y\,\sigma}\,dy = 3\sigma^4$, amiből $\mathbf{D}^2(\eta) = 2\sigma^4$. A v. é.-re és sz. n.-re vonatkozó tételek szerint tehát $\xi = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$ v. é.-e, illetve sz. n.-e

$$\mathbf{M}(\xi) = n\sigma^2,$$

illetve

$$\mathbf{D}^2(\xi) = 2n\sigma^4.$$

13. Számítsuk ki egy ξ n **szabadsági fokú** STUDENT**-eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét.**

Megoldás. A szóban forgó vsz. v. s. f.-e $(1/\sqrt{\pi})\left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)(1 + x^2)^{-(n+1)/2}$

Ez páros függvény, és így — ha $(n+1)/2 > 1$ — a v. é.-et kifejező integrál

$$\mathbf{M}(\xi) = 0$$

(egyébként divergens). A sz. n. kiszámításánál az integrál konvergenciájának feltétele, hogy $(n+1)/2 > 3/2$, vagyis $n > 2$. Ha ez fennáll, a sz. n.

$$(2/\sqrt{\pi})\left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}\,dx = 1/(n-2), \text{ azaz}$$

$$\mathbf{D}^2(\xi) = 1/(n-2),$$

egyébként nem beszélhetünk sz. n.-ről. — A felsorolás teljessége kedvéért megjegyezzük:

Egy ξ *B (éta)* **eloszlású vsz. v. v. é.-e és sz. n.-e** (ha ξ s. f.-e $f(x) = [\Gamma(\alpha + \beta)/\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)]\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ ($\alpha, \beta > 0$ konst; $0 < x \leqq 1$; egyébként $\equiv 0$)):

$$\mathbf{M}(\xi) = \alpha/(\alpha + \beta),$$

illetve

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \alpha\beta/(\alpha + \beta)^2\,(\alpha + \beta + 1).$$

Egy ξ **logaritmiko-normális eloszlású vsz. v. v. é.-e és sz. n.-e** (ha ξ s. f.-e $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}\,\sigma\,x)\exp\,[-(\log x - m)^2/2\sigma^2]$ (m, $\sigma > 0$ konst; $x > 0$; egyébként $\equiv 0$)):

$$\mathbf{M}(\xi) = e^{m+\sigma^2/2}$$

illetve

$$\mathbf{D}^2(\xi) = e^{2m+\sigma^2}\,(e^{\sigma^2} - 1).$$

14. Tekintsük x évet megért egyének egy N személyből álló csoportját. Feltehető, hogy ezek elhalálozásai függetlenek egymástól. Legyen $\xi(x, t)$ az N közül azon x évet megért egyének száma, akik még t évig elélnek. Határozzuk meg $\xi(x, t)$ v. é.-ét.

15. A 4. § 35. fel.-ban mi a v. é.-e a felső toleranciahatár alatti (feletti) vastagságú alkatrészek számának?

16. Textilipari kísérletek azt mutatják, hogy bizonyos időszak (100 „orsóóra") alatt átlagban 2 szálszakadás következett be egy szövőgépnél. Mi a vsz., hogy ugyanezen időtartamú megfigyelés folyamán 0 vagy 1 szakadást fogunk észlelni, feltéve, hogy a szakadások egymástól függetlenek?

17. Tekintsük a világűr egy V térfogatú A részét. Tegyük fel, hogy a csillagok véletlenszerűen oszlanak el, és *a)* annak a vsz.-e, hogy A-ban 0, 1, 2, ... csillag van, csak V-től függ, *b)* a csillagok előfordulási száma egymást nem metsző térrészekben egymástól független, *c)* az (egészhez viszonyítva) eleminek tekinthető ΔV térfogatban egyetlen csillag előfordulásának vsz.-e első közelítésben $\lambda\,\Delta V$ (ugyanis egynél több csillag előfordulásának vsz.-e az előbbinél kisebb nagyságrendű). Mi a vsz., hogy V-ben épp n csillag lesz? Mi a vsz.-e, hogy egy csillag távolsága a legközelebbitől $(r, r + \Delta r)$ közt lesz, ha a csillagok átlagos sűrűsége s?

18. Egy anyagi pont centrális erőtérben ellipszis pályán mozog. Keringési ideje bizonyos időpontjában megállapítjuk a pont és a vonzó centrum távolságát. Mi lesz az ilyen mérések eredményének v. é.-e, ha a mérés τ időpontja egyenletes eloszlású vsz. v. (a T keringési időn belül), s a pálya nagytengelye félhossza a és excentricitása e?

19. A 4. § 28. pl. feltételei mellett mi lesz az első hívásig eltelt ξ időtartam v. é.-e?

20. Egy korpuszkula véletlenszerűen eloszló, egyforma átmérőjű részecskék (ideális gáz molekulái, atomok stb.) közt ide-oda ütközve halad el, az egyes ütközések közt egyenes vonalú mozgással. Mi lesz egy ütközés után az ütközés nélkül megtett út v. é.-e *(az „átlagos szabad úthossz")*, ha a részecskék száma valamely térfogatban POISSON-eloszlású vsz. v.? (Az ütközés vsz.-e csak a megtett út (folytonos) függvénye, és nem függ a már (ütközés nélkül) megtett úthossztól).

21. Egy molekula sebességének abszolút értéke egy ξ vsz. v., amelynek a s. f.-e $p(x) = A\,x^2 \exp(-\alpha\,x^2)$ $(x > 0$; egyébként $\equiv 0$, A, α konst). Mi a v. é.-e a molekula által Δt idő alatt megtett útnak, ha közben ütközés nem történik?

22. A Maxwell-féle sebességeloszlás segítségével, a kinetikus gázelmélet alapfeltevéseire támaszkodva, vezessük le edénybe zárt ideális gáz nyomásának értékét az edény falára.

Megoldás. A kinetikus gázelmélet feltevései szerint az edény falára gyakorolt nyomás értékét úgy kapjuk meg, hogy kiszemelünk egy ΔS területű elemi felületdarabot az edény falán, és kiszámítjuk, mekkora erőt gyakorolnak erre a nekiütköző molekulák, majd az eredményt ΔS-sel osztjuk, és $\Delta S \to 0$-t végzünk. Mivel az elmélet rugalmas ütközést tételez fel, ez az erő $\cdot \Delta S$ szorozva egyetlen ütköző molekulának a molekula felületdarab — normális irányába eső impulzuskomponensének ütközéskor beálló megváltozásával (ellenkező előjellel), mivel ütközés előtt és után állandó a molekula sebessége. — Képzeljünk el az edényben egy koordinátarendszert úgy, hogy az x tengely a kiszemelt ΔS területű felület normálisa irányába mutasson. Legyenek egy molekula sebességkomponensei ebben a koordinátarendszerben ξ, η, ζ. A kinetikus gázelmélet alapfeltevései szerint egy molekula sebességkomponensei — bármely koordinátarendszerben tekintve is — független, 0 v. é.-ű és azonos $\sigma = \sqrt{k\,T/m}$ sz.-ú normális eloszlású vsz. v.-k (k a Boltzmann-féle állandó, m a molekula tömege, T az abszolút hőmérséklet). Következésképp ξ, η, ζ is ilyen vsz. v.-k. Számítsuk ki tetszőleges molekula által a kiszemelt ΔS területű felületdarabra gyakorolt erő v. é.-ét; a kinetikus gázelmélet alapfeltevései nyomán az összes molekulák ugyanezen mennyiségeinek összege ΔS-sel osztva és $\Delta S \to 0$ esetében a nyomásnak tekinthető, feltéve, hogy független az egységfelület helyétől. — Egy ξ, η, ζ sebességkomponensű molekula akkor ütközik felületdarabunkba, ha ξ sebességkomponense efelé mutat (tehát $\xi \gtrless 0$), amellett benne van egy, a felületdarab fölé emelt, a (ξ, η, ζ) vektorral párhuzamos alkotójú és ξ magas (tehát $\xi\,\Delta S$ térfogatú) hengerben (feltehető, hogy e henger oly kis térfogatú, hogy a benne levő molekulák egymásba már nem ütköznek). Egy $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ sebességkomponensű molekula által a falon kifejtett erő 1. vagy 0, vagy 2. $2m\,x\,\Delta S$ aszerint, hogy az említett hengerben benne van-e a molekula, vagy sem (ütközéskor a felületdarab normálisa irányába eső impulzuskomponens megváltozása $-2m\,x\,\Delta S$). Legyen az 1. eset vsz.-e p_1, a 2. eseté pedig p_2. A szóban forgó molekula által a falra kifejtett erő v. é. tehát $0 \cdot p_1 + 2m\,x\,p_2 = 2m\,x\,p_2$. p_2 annak a vsz., hogy a szóban forgó molekula benne van a hengerben. A kinetikus gázelmélet felteszi, hogy egy ilyen molekula (a hasonló sebességkomponensekkel bíró sok más közül) „egyenlő vsz.-gel lehet bárhol", függetlenül a többitől, vagyis a $p_2 =$ (hengertérfogat)/(az edény W térfogata) $= x\,\Delta S/W$, s így egy x, y, z sebességkomponensű molekula által ΔS területen felületünkre gyakorolt erő v. é.-e $(2m\,\Delta S/W)\,x^2$. Ez tulajdonképp feltételes v. é. (azon feltétel mellett, hogy $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$). Ha tehát egy tetszőleges molekula által kifejtett erő v. é.-ét akarjuk megkapni, az előbbi eredményt ismét vsz. v.-nak kell tekinteni, és ki kell számítani ennek v. é.-ét. Meghatározandó tehát a $\mathrm{M}((2m\,\Delta S/W)\,\xi^2)$ v. é., annak felhasználásával, hogy ξ, η, ζ független vsz. v.-k, mind ugyanazon $(0, \sigma)$ paraméterű normális s. f.-nyel és azzal a feltétellel, hogy $\xi \gtrless 0$. A szóban forgó v. é. ezek után

$$((2m\,\Delta S)/W) \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \exp\left(-(1/2\sigma^2)\,(x^2+y^2+z^2)\right)}{\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma\right)^3}\,dx\,dy\,dz = m\,\Delta S\,\sigma^2/W =$$

$$= k\,T\,\Delta S/W.$$

Ha összesen N molekula van és — a kinetikus gázelméletének megfelelően — egymástól függetleneknek tekintjük őket, az összesek által elemi felületdarabunkra gyakorolt erő v. é.-e $N\,k\,T\,\Delta S/W$ lesz. ΔS-sel osztva és $\Delta S \to 0$ határátmenetet végezve (az eredmény független az elemi felületdarab helyétől!) végül is a nyomásra a $p = N\,k\,T/W$ értéket kapjuk, megegyezésben a klasszikus gáztörvénnyel (ott még behozzák az R gázállandót is). — *Itt példát láttunk arra, hogy véletlen események összességét egy valószínűségi jellegű törvény hidalja át, és ez (a v. é.-en keresztül) kapcsolatba hozható egy klasszikus (szükségszerűnek tekintett) természettörvénnyel.* Általában is az a helyzet, hogy azok a mennyiségek, amelyekre a klasszikus fizika kijelentéseket tesz, vsz. v.-k várható értékei. — A véletlen események felett szükségszerű összefüggésekbe beépítve dominálnak a v. é.-ek, a véletlentől függő mennyiségek átlagai. A megfigyelés számára főleg ezek a hozzáférhetőek, ezért is észlelünk általában szükségszerű természeti törvényeket. Az átlagok mögött meghúzódó véletlen jellegű hátteret is észlelhetjük azonban egyes kísérletekben; épp ezek mutatnak rá a valóságos viszonyokra.

23. Ideális gázban mi a v. é.-e egy molekula időegység alatti ütközései számának?

Megoldás. A kérdés így is megfogalmazható: Tekintsünk egy molekulát, s vizsgáljuk, hány ütközik hozzá időegység alatt a többi közül — s majd ennek keressük a v. é.-ét. Az egyes molekulák sebességkomponenseit normális eloszlásúaknak tartja a kinetikus gázelmélet (6. § 22. pl.), ha a sebességet *pl. az edény falához* viszonyítjuk. Esetünkben a vizsgált molekulának és a többinek is ilyen jellegűek a sebességkomponensei; nekünk viszont *egymáshoz* viszonyított sebességkomponensekre van szükségünk. Ha a kiszemelt és egy másik molekula sebességkomponensei $\eta_{1x}, \ldots$ illetve $\eta_{2x}, \ldots$ a másiknak az elsőre vonatkoztatott, afelé irányuló sebessége komponensei $\eta_x = \eta_{1x} - \eta_{2x}, \ldots$ é. í. t. Mint felvettük, $\eta_{1x}, \eta_{2x}, \ldots$ ugyanazon $m = 0$ v. é.-ű és σ^2 sz. n.-ű normális eloszlású vsz. v.-k, s így $\eta_x, \ldots$ (= két vsz. v. különbsége) szintén normális eloszlású, $m = 0$ és $2\sigma^2$ v. é.-kel és sz. n.-tel. Következésképp a (η_x, η_y, η_z) vektor abszolút értékének, az η relatív sebességértéknek, mint vsz. v.-nak ugyancsak a Maxwell-féle lesz a s. f.-e, csak σ^2 helyett $2\sigma^2$-tel (vö. 6. § 22. pl.), vagyis $\sqrt{2/\pi}\,x^2\,e^{-x^2/4\sigma^2}/(\sqrt{2}\,\sigma)^3$ ($x \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$ és $\sigma = \sqrt{k\,T/m}$, T az abszolút hőmérséklet, k a Boltzmann-féle állandó, m a molekula tömege). A kiszemelt molekulába időegység alatt azok a $\eta = v$ relatív sebességértékű molekulák fognak ütközni, amelyek középpontja a molekula körüli v sugarú gömbben lesz (a molekula által elfoglalt területet elhanyagoljuk, mert kicsi a v-hez képest) — és amelynek sebességvektora úgy mutat, hogy a molekula eltalálja a kiszemeltet (molekulák egymásba ütközését elhanyagoljuk). Tekintsük a kiszemelt molekula körül az r és $r + \Delta r$ sugarú gömbfelületekkel meghatározott réteget. Magasabbrendű kicsiny tagokat elhanyagolva, ennek térfogata $4\pi\,r^2\,\Delta r$, és annak a vsz., hogy egy molekula beleesik, a molekulák „helyének egyenletes eloszlását" és „sorsuk" függetlenségét feltételezve (ezt a kinetikus gázelmélet megengedi) $4\pi\,r^2\,\Delta r/V$, ahol V a vizsgált gáz térfogata. Legyen a molekulák sugara R. Egy említett rétegbeli molekula akkor ütközik a kiszemelttel, ha a hozzávezető r hosszúságú szakasszal sebességvektora $\vartheta = 2 \arcsin (R/r)$ szöget zár be. Könnyen kiszámítható, hogy ez azt jelenti, hogy a sebességvektornak egy $4\pi(R^2/r^2)$ nagyságú térszögbe kell esnie. A kinetikus gázelmélet szerint egy molekula sebességvektorának iránya az egységgömbön egyenletes eloszlású vsz. v., vagyis annak a vsz., hogy egy (a Δr vastagságú rétegben levő) molekula sebességvektora az ütközésnek megfelelő térszögbe mutasson, R^2/r^2 (a teljes térszög 4π!). A felsorolt eseményeket egyesítve, azt az eseményt kapjuk, hogy az r távolságban levő Δr vastagságú rétegből lesz majd a kiszemelthez ütköző molekula; s ez (magasabbrendű kicsiny tagokat elhanyagolva) $4\pi R^2\,\Delta r/V$

vsz.-ű. Annak a vsz., hogy a szóban forgó v sugarú gömbből is lesz ütköző molekula, nyilván $\approx \int_0^v (4\pi R^2/V)\, dr = 4\pi R^2 v/V = p$ (itt alsó határnak az R helyett 0-t vettünk, és feltételeztük, hogy az egyes Δr vastag rétegekbe egymástól függetlenül eshet molekula — mindez nagyszámú, kisméretű molekulánál megengedhető). Annak a vsz., hogy a v sugarú gömbből épp n, a kiszemelttel ütköző molekula lesz (s amellett összesen N van), a tett feltevések mellett egy N és p paraméretű binomiális eloszlás n-edik tagjával fejezhető ki. Összegezve: mindez azt jelenti, hogy ha az időegység alatti ütközések száma ξ, ξ N és p paraméterű vsz. v., és p is függ az η vsz. v.-tól. Ekkor azonban $\mathrm{M}(\xi) = \mathrm{M}(\mathrm{M}(\xi \mid \eta))$, ahol a külső operáció a η-ra szól. De $M(\xi \mid \eta)$ a binomiális eloszlás folytán $= N\, 4\pi R^2 v/V$ és $\mathrm{M}(\xi) = (N/V)\, 4\pi R^2\, \mathrm{M}(\eta)$, η „Maxwell-eloszlású" vsz. v., σ^2 helyett $2\sigma^2$ paraméterrel (l. fentebb), ennek v. é.-e könnyen kiszámítható $= 2\sigma/\sqrt{\pi}$ —, végül is $\mathrm{M}(\xi) = N_0\, 8R^2 \sqrt{\pi\, k\, T/m}$, ahol $N_0 = N/V$ az átlagos molekulasűrűség. Ha az edény falához viszonyított sebesség átlagát (= v. é.-ét), $\bar{v}_1$-et akarjuk behozni, ennek kiszámítása után (σ^2-es Maxwell-eloszlású vsz. v. v. é.-e !) $\mathrm{M}(\xi)$-re $\sqrt{2}\, N_0\, 4R^2\, \pi\, \bar{v}_1$-ot kapunk (a könyvek legtöbbször ezt közlik).

24. A 6. § 29. fel. feltételei mellett állapítsuk meg a V térfogatból kilépő kolloidrészecskék számának v. é.-ét.

Megoldás. A 6. § 29. fel. jelölései mellett $\mathrm{M}(\xi) = \mathrm{M}(\mathrm{M}(\xi \mid \eta)) = \mathrm{M}(\alpha\, \eta)$ (mert $\mathrm{M}(\xi \mid \eta)$ $\eta = n$ feltétel mellett $= n\alpha$, s n-t újból vsz. v.-nek kell tekintenünk). De $\mathrm{M}(\alpha\, \eta) = \alpha\, \mathrm{M}(\eta) = \alpha\, \lambda\, V$. Ezt a 6. § 29. fel. végeredményéből is megkaphatjuk, a jelenlegi levezetésnél azonban az eloszlás kiszámítására nincs szükség. Éppen ez a feltételes v. é.-re vonatkozó formula nagy előnye.

25. Egy munkás n egyforma munkagépet lát el. A gépek egy sorban, egymástól a távolságra vannak elhelyezve. Tegyük fel, hogy véletlenszerűen hol egyik, hol másik gépet kell ellátni, és a munkás attól a géptől, ahol éppen van, a legközelebbi ellátandó géphez megy át. Mi lesz a gépek ellátásakor a munkás által megtett út v. é.-e és sz. n.-e, ha a fellépő események mind konstans vsz.-űeknek tehetők fel?

26. Legyen ξ vsz. v. $F(x)$ e. f.-nyel, és legyen $a \leqq \xi \leqq b$. Bebizonyítandó, hogy $\mathrm{D}^2(\xi) \leqq [(b-a)/2]^2$.

Megoldás. $\mathrm{D}^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mathrm{M}(\xi)]^2\, dF(x) = \int_a^b [x - \mathrm{M}(\xi)]^2\, dF(x)$. Mivel a $\varphi(y) = \int_a^b [x-y]^2\, dF(x)$ függvénynek $y = \mathrm{M}(\xi)$-nél van minimuma, bármely más y érték legfeljebb növeli az integrál értékét, így *például* $y = (b+a)/2$ is, tehát

$$\int_a^b [x - \mathrm{M}(\xi)]^2\, dF(x) \leqq \int_a^b \left[x - \frac{b+a}{2}\right]^2 dF(x) \leqq \int_a^b \left[b - \frac{b+a}{2}\right]^2 dF(x) =$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \int_a^b dF(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

(minthogy $a \leqq \xi \leqq b$, $F(b) = 1$ és $F(a) = 0$).

27. W. Schottky elektroncsövek anódáram-ingadozásainak („sörétzaj") vizsgálatakor feltételezte, hogy a katódról t idő alatt kilépő elektronok száma POISSON-eloszlású vsz. v. Mi lesz ekkor az anódáram erősségének v. é.-e („átlagáram") és sz.-a?

28. Egy 1470 ohmosnak tervezett ellenállás értéke legyártás után tulajdonképp vsz. v. lesz, amelynek csak v. é.-e az 1470, s ekörül ingadoznak észlelések alapján (feltehetőleg a normális eloszlásnak megfelelően) az egyes darabok ellenállásértékei. Ha a sz. 1,5%, és egy ellenállásrudat selejtesnek tekintünk, ha ohmértéke a tervezettől $\geqq 2\%$-kal többet tér el, mi a vsz.-e selejtes készülésének?

Megoldás. Legyen ξ egy ellenállás valóságos értéke, (és engedjük meg, hogy ξ a $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett normális eloszlású vsz. v., $m = 1470$ és $\sigma^2 = (1470 \cdot 1{,}5/100)^2$ paraméterekkel, $\mathbf{P}(|\xi - m| \geqq 1470 \cdot 2/100)$-at keressük; ez nyilván $1 - \int_{m-1470\cdot 2/100}^{m+1470\cdot 2/100} \frac{\exp\,[-(x-m)^2/2\sigma^2]}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 2\,(1 - \Phi\,(1{,}33)) = 0{,}1836$, azaz a gyártmány kb. 18%-a lesz várhatólag selejtes.

29. Az előző pl.-ban mekkora szórást engedhetünk meg (közelítőleg), ha azt kötjük ki, hogy a selejtszázalék $\leqq 3\%$ legyen?

30. Egy vasfajta korrózióját vizsgálják. Sok kísérletből azt kapják, hogy a korrózió beállásának ideje normális eloszlású vsz. v., a 875 nap átlagérték ($\approx$ v. é.) körül 85 nap szórással. Ebből a vasból készült lemezekből hányat kell megvizsgálni, hogy a megvizsgáltak korróziós idejének átlaga 0,9 vsz.-gel 5%-nál kevesebbel térjen el a 875-től?

Megoldás. A korróziós idő $m = 875$, $\sigma = 85$ paraméterű s. f.-ű ξ vsz. v. Ha n vizsgálatot végzünk a korróziós időre, az egyes ξ_i eredmények ugyanolyan s. f.-ű vsz. v.-k, mint ξ. Azt keressük, hogy milyen n-nél lesz

$$\mathbf{P}(|\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n - 875\,| < 875 \cdot 5/100) = 0{,}9 \quad (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/n$$

nyilván egy 875 v. é.-ű és $85^2/n$ sz. n.-ű normális eloszlású η vsz. v. Azt keressük, hogy milyen n-től kezdve fog η értéke 0,9 vsz.-gel a $875 \pm 43{,}75$ intervallumba esni. Annak a vsz., hogy η oda esik,

$$\int_{875-43{,}75}^{875+43{,}75} \frac{\exp\,[-(x-875)^2/(2\cdot 85^2/n)]}{\sqrt{2\pi}\,(85/\sqrt{n})}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{n}\cdot 43{,}75/85} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx,$$

ez $= 0{,}9$ lesz, ha $\sqrt{n} \cdot 43{,}75/85 = 1{,}65$, azaz $n = 10$-től kezdve lép fel a kívánt eredmény.

31. A 4. § 28. pl. feltételei mellett mi a két egymásra következő hívás közti időtartam ξ hosszának v. é.-e és sz. n.-e?

32. *(A következő feladatokban a rádioaktív bomlás alapjelenségeit tárgyaljuk a vsz. számítás szemszögéből.* Egyes feladatoknak az ún. POISSON-folyamatok szemszögéből való tárgyalását l. a *B)* részben!)

A tapasztalat elfogadhatóvá teszi pl. a következő matematikai modellt *(= I. modell):* Legyen $q(t)$ annak a vsz., hogy egy $t = 0$-kor el nem bomlott rádioaktív atom t idő alatt *nem* bomlik el; $q(t)$ csak t-től függjön. Legyen továbbá annak a vsz., hogy az atom $(t, t + s)$ $(s > 0)$ időtartam alatt elbomlik, független attól, hogy $(0, t)$ alatt nem

bomlott el (csak az intervallum s hosszától függ). — Állapítsuk meg $q(t)$-t. Ha az „élettartam" (el nem bomlás ideje) vsz. v., mi ennek a v. é.-e?

Megoldás. A feltételek ugyanazok, mint az exponenciális eloszlás levezetésénél. Következésképp $q(t) = e^{-\lambda t}$ ($t \geqq 0$; különben $\equiv 0$), ahol $\lambda > 0$ konst, és ha az „élettartam" ξ, $\mathbf{P}(\xi < t) \equiv F(t) = 1 - q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ($t \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$), vagyis ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású vsz. v. Így tehát $\mathbf{M}(\xi) = \int_0^\infty t\, dF(t) = 1/\lambda$. (Ugyanez az első bomlásig eltelt időtartam v. é.-é is.) A vsz. és relatív gyakoriság kapcsolata alapján tehát kimondhatjuk, hogy ha (nagyszámú) N alkalommal vizsgálhatnánk meg ugyanazt a rádioaktív atomot, hogy t idő alatt elbomlik-e és n esetben nem bomlanak el, $n/N \approx q(t)$ volna. Ez nem valósítható meg; ha azonban N darab atomunk van, és ezeket teljesen egyforma „életűeknek" és egymásra hatástalanoknak tesszük fel, *egy atom N-szeri vizsgálata egyenértékű N atom egyszerre való vizsgálatával*; ekkor n az N közül el nem bomlottak száma, és $n/N \approx q(t)$ alapján $n \approx N\, q(t)$, azaz $n \approx N\, e^{-\lambda t}$, vagyis megkaptuk *közelítőleg* az ismert bomlási törvényt. $1/\lambda$, a kísérleti bomlási állandó reciprok értéke nem más, mint az atom „élettartamának" v. é.-e. Az atomfizikai felezési idő, mint tudjuk, $\log 2/\lambda$, vagyis nem azonosítható közvetlenül az „élettartam" v. é.-vel. (Megjegyzés: A rádioaktív bomlás törvényét a $dN = -N\lambda\, dt$ differenciálegyenletből is szokás levezetni. Ennek a vsz. számítási értelmezése azonban következménye az exponenciális eloszlásra vezető modellnek, s ezért nem kell külön tárgyalnunk.)

33. Az előző pl. alapján számítsuk ki, mi a vsz.-e, hogy t időtartam alatt pontosan k ($= 0, 1, \ldots, N$) atom bomlik el az időtartam elején jelenlevő N-ből? Mi lesz a t időtartam végig el nem bomlott atomok számának v. é.-e, rádioaktivitás szempontjából egyformának és egymástól függetlennek tételezve fel az egyes atomokat?

Megoldás. k darab atom elbomlása N-ből feltételeink alapján azzal ekvivalens, mintha egyetlen atomon N-szer végezhetnénk el (mindig újra visszaállítva a kezdeti viszonyokat) *azt a kísérletet,* hogy t idő alatt elbomlik-e, s annak a vsz.-ét keresnénk, hogy az N kísérlet közül k-ban a kívánt elbomlás bekövetkezik. A t idő alatt elbomlottak ξ_t száma vsz. v., amely nyilván binomiális eloszlású. Mivel az előző pl. szerint az elbomlás vsz.-e $1 - q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, a szóban forgó binomiális eloszlás paraméterei N és $1 - e^{-\lambda t}$, és így $\mathbf{P}(\xi_t = k) = \binom{N}{k} (1 - e^{-\lambda t})^k\, e^{-(N-k)\lambda t}$ ($k = 0, \ldots, N$). Általában úgy tekintik, hogy a t idő alatti elbomlások száma POISSON-eloszlást követ. Eddigi modellünkből *exakte* nem ezt kapjuk; igen kicsiny λ t és nem túl nagy k mellett azonban $\mathbf{P}(\xi_t = k)$ jó közelítése lesz az $e^{-N\lambda t}\, (N\lambda\, t)^k/k!$ kifejezés; POISSON-eloszlást tehát *csak* ebben az esetben kapunk és akkor is csak *közelítőleg* (bár ez a közelítés általában jó). Annak a vsz.-ét, hogy t idő alatt egyetlen atom sem bomlik el, könnyű megkapni: ebben az esetben ugyanis csak annak a vsz.-e szerepel, hogy egyetlen bomlás sem történik t idő alatt, itt pedig az előző pl.-beli exponenciális eloszlásra jutunk. Hogy egyetlen atom nem bomlik el, annak a vsz. $e^{-\lambda t}$; hogy N közül egy sem (N számú esemény együttes bekövetkezése) $(e^{-\lambda t})^N$. Ugyanezt kapjuk a $\mathbf{P}(\xi_t = 0)$ kifejezésből is. — Számítsuk ki ξ_t v. é.-ét. Mivel binomiális eloszlásról van szó, $\mathbf{M}(\xi_t) = N(1 - e^{-\lambda t})$, és az el nem bomlottak v. é.-e $\mathbf{M}(N - \xi_t) = N - \mathbf{M}(\xi_t) = N\, e^{-\lambda t}$, vagyis — ahogy a fizikából ismerjük — a „t időtartam végén jelenlevő (még el nem bomlott) rádioaktív atomok száma" itt mint a t időtartam alatt el nem bomlott atomok számának *várható*

értéke jelenik meg (vagyis: igen sok kísérletből állapítva meg a t alatt el nem bomlottak számát, az eredmények *átlaga* jó közelítéssel *valóban* az ismert exponenciális törvényt fogja követni).

34. Az előző pl.-ban láttuk, hogy a t idő alatt elbomlott atomok száma *közelítőleg* POISSON-eloszlású vsz. v. Ha az ott használt matematikai modellre valamivel több kikötést teszünk *(= II. modell), exakte* is megkaphatjuk a POISSON-eloszlást. Tegyük fel tehát, hogy annak a $p_k(t)$ vsz.-e, hogy t idő alatt épp k $(= 0,1,\ldots)$ bomlás történik *a)* csak t-től függ, *b)* annak a vsz., hogy Δt idő alatt pontosan 1 bomlás történik, vagyis $p_1(\Delta t) = \mu\,\Delta t + o(\Delta t)$ $(\mu > 0$ konst), *c)* annak a vsz., hogy Δt alatt egynél több bomlás történik, azaz $p_k(\Delta t) = o(\Delta t)$ $(k > 1)$, *d)* egymást nem fedő időtartamok alatt történő bomlások számai függetlenek egymástól. Igazoljuk, hogy ekkor a t idő alatti bomlások ξ_t száma POISSON-eloszlású vsz. v. Mi lesz a fizikai értelme ξ_t v. é.-ének?

Megoldás. A közölt matematikai modell feltevései azonosak azokkal, amelyek exakte a POISSON-eloszlásra vezetnek, s így $\mathbf{P}(\xi_t = k) = p_k(t) = e^{-\mu t}\,(\mu\,t)^k/k\,!$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Lássuk, hol a megszorítás a 7. § 32. pl.-beli egyszerűbb modellhez képest. Nagy vonalakban azzal jellemezhető a különbség, hogy az első modell kiindulása az el nem bomlás eseménye, s egyetlen atomra is alkalmazható; a második modell burkoltan felteszi, hogy igen nagyszámú ($\approx$ végtelen) sok atom van jelen, hiszen tetszőleges k számú elbomlás vsz.-ét kérdezi, emellett felteszi, hogy bizonyos időtartam alatti elbomlások száma független attól, mennyi bomlott el már előzőleg. Részletezve: Az előző feladatban kapott $\mathbf{P}(\xi_t = k) = \binom{N}{k}\,(1 - e^{-\lambda t})^k\,e^{-(N-k)\lambda t}$ megoldás (könnyen bizonyíthatóan) eleget tesz az itteni *a), b)* és *c)* feltételeknek ($\mu = N\lambda$ paraméterrel), *d)*-nek azonban már nem. *d)* ti. itt azt jelentené: annak a vsz., hogy a t_1-re következő t_2 időtartam alatt valamilyen l számú bomlás történik, független a t_1 alatti bomlások k számától. Ez azonban nem igaz; a mondott vsz. ti.

$$\binom{N-k}{l}\,(1 - e^{-\lambda t_2})^l\,e^{-(N-k-l)\lambda t_2},$$

s ez nem független k-tól. *Első közelítésben* független lesz, ha $\lambda\,t_2$ igen kicsi és l, k is kicsi N-hez képest; ez a közelítés éppen a POISSON-féle eloszlás, $e^{-N\lambda t_2}\,(N\lambda\,t_2)^l/l\,!$ (μ-nek $N\lambda$ felel meg). Itt van tehát az eltérés az első modelltől. Közvetlen meggondolással: a t_2 alatti elbomlások $N - k$ atom közül történnek, s így számuk függ a t_1 alatti bomlások számától, k-tól; ha azonban N igen nagy és k kicsi, $N - k \approx N$, vagyis közelítőleg úgy vehető, mintha a t_2 alatti elbomlások is N atom közül történnének — vagyis függetlenül az előzményektől, s ezzel a második modellre jutottunk, annak megfelelően pedig a t_2 alatti bomlások száma tényleg POISSON-eloszlást követne. A gyakorlatban általában nem kell megkülönböztetni a két modellt (oly kicsiny az eltérés a végeredmények között), s így *a* POISSON-*eloszlás könnyű kezelhetősége figyelembevételével a másodikkal szoktak dolgozni.* Mindenesetre jó *esetenként eldönteni,* alkalmazható-e a II. modell. Annak a vsz., hogy t idő alatt egy atom sem bomlik el, a POISSON-eloszlás feltételezése esetében $e^{-\mu t}$. Az I. modell alkalmazása mellett (N atomot tekintve) ez a vsz. $e^{-N\lambda t}$ volt. μ-nek tehát $N\lambda$-t kell megfeleltetnie, hogy a II. modell is ugyanazt az eredményt szolgáltassa. — Mi lesz a II. modellnél a t idő alatt elbomlott atomok számának, ξ_t-nek a v. é.-e? Mivel ξ_t POISSON-eloszlású, $\mathbf{M}(\xi_t) = \mu\,t$. Ez csak az előbbi $\mu = N\lambda$ megfeleltetéssel és így is csak első közelítésben azonos az I. modellnél talált $\mathbf{M}(\xi_t) = N\,(1 - e^{-\lambda t})$

értékkel. „Végtelen sok" atomot vizsgálva $\mathbf{M}(\xi_t) = \mu\, t$-nek $t \to \infty$-nél is volna értelme, végesnél azonban nyilván nem (itt csak $N(1 - e^{-\lambda t})$-nek van értelme). A v. é.-eknél tehát különösen jól kitűnik, hogy a POISSON-eloszlás „végtelen sok" atomból indul ki (t alatt végtelen sok elbomlásnak is van értelme és vsz.-e !) — Milyen fizikai értelmezést kell adni a POISSON-eloszlás paraméterének? Láttuk, hogy a t idő alatt elbomlott atomok ξ_t számának v. é.-e $\mu\, t$; mondhatjuk tehát, hogy $\mu = \mathbf{M}(\xi_t)/t$ kb. az időegység alatt *átlagban* elbomlott atomok száma. Ha pedig a POISSON-eloszlás $k = 0$ alesetéből indultunk ki, vagyis abból, hogy $e^{-\mu t}$ a vsz., hogy t idő alatt egyetlen bomlás sem történik, s így $1 - e^{-\mu t}$ annak a vsz., hogy két egymásra következő bomlás közti időtartam kisebb t-nél, s ezzel az I. modell exponenciális eloszlására jutunk. η v. é.-e $1/\mu$, vagyis $\mu \approx$ a két egymásra következő bomlás közti időtartam *átlagértékének* reciproka. Mindkét meggondolást használjuk is a fizikában.

35. A 7. § 32. pl.-beli I. modellnél mi lesz *a)* az elbomlás nélkül eltelt idő sz. n.-e; *b)* a t idő alatti bomlások számának sz. n.-e?

Megoldás. a) Az η „élettartam" exponenciális e.-ú vsz. v. $\lambda e^{-\lambda t}$ s. f.-nyel; tudjuk, hogy $\mathbf{D}^2(\eta) = 1/\lambda^2$. Az élettartamok *szórása* tehát azonos a v. é.-kel; a sz. és v. é. méréstechnikai értelmezését figyelembe véve ez elég kedvezőtlen. *b)* Mivel a t idő alatti bomlások száma, ξ_t binomiális eloszlású vsz. v. N és $(1 - e^{-\lambda t})$ paraméterekkel, $\mathbf{M}(\xi_t) = N(1 - e^{-\lambda t})$ és $\mathbf{D}^2(\xi_t) = N(1 - e^{-\lambda t})\, e^{-\lambda t} = \mathbf{M}(\xi_t)\, e^{-\lambda t}$; ez annál kisebb, minél hosszabb a megfigyelés t időtartama. Az észlelt bomlásszám négyzetes középhibájának egyes fizikakönyvek $\mathbf{M}(\xi_t)$-t szokták venni; ha a négyzetes középhibát a sz. n.-tel közelítőleg azonosnak vesszük, $\mathbf{M}(\xi_t)$ nyilván jó felülbecslése a valóságos $\mathbf{M}(\xi_t)\, e^{-\lambda t}$-nek. A szórást magát ilyen alapon $\sqrt{\mathbf{M}(\xi_t)}$-vel becsülhetnénk felül. A gyakorlat ehelyett az éppen észlelt bomlásszám négyzetgyökét veszi; *ez nyilván csak bizonyos vsz.-gel igaz*, és általános elvnek nem fogadható el. — ξ_t sz.-a és v. é.-e hányadosa, amit az ún. „relatív hiba" ideális kifejezésének szoktak tekinteni (négyzetes középhiba: $\approx$ sz. n., mérendő mennyiség valódi értéke: $\approx$ a mennyiség v. é.-e), $1/\sqrt{N(e^{\lambda t} - 1)}$, vagyis *közelítőleg* igaz, hogy a „relatív hiba" annál kisebb, minél nagyobb időtartam alatti bomlásokról van szó. Ez a „relatív hiba" *közelítőleg* $1/\sqrt{N\lambda t}$; ezt a képletet is szokták használni. Mivel a t idő alatt elbomlott atomok számának átlaga $\mathbf{M}(\xi_t) = N(1 - e^{-\lambda t})$ volt, a „relatív hiba" $1/\sqrt{\mathbf{M}(\xi_t)\, e^{\lambda t}}$, vagyis fordítva arányos a t időtartam alatti átlagos bomlásszámmal. — Rádioaktív méréseknél sokszor az a helyzet, hogy bomlások számából kell megállapítani a jelenlevő rádioaktív bomlású atomok számát, illetve egy ezzel arányos mennyiséget. Ehhez elég volna bizonyos t időtartam alatti bomlások száma v. é.-ének $(1 - e^{-\lambda t})$-szerese; valójában azonban legtöbbször csak az előre megállapított t időtartam alatti bomlások n számát mérik, s ezt tekintik arányosnak a rádioaktív atomok számával. Ekkor azt is szokták mondani, hogy a mérés hibája $\sqrt{n}$, relatív hibája $1/\sqrt{n}$. Az előbb kapott kifejezéssel összehasonlítva ezt, látjuk, hogy *a következő közelítéseket engedik meg: a)* az *épp* észlelt n számot azonosítják a t idő alatti bomlások számának v. é.-évei, *b)* λ t-t oly kicsinek veszik, hogy $e^{\lambda t} \approx 1$. Az észlelt n bomlásszámból levont következtetések tehát *csak ezzel a közelítéssel* igazak; mindenesetre annál jobb a közelítés, minél nagyobb a t időtartam és az elbomlott atomok száma. Kiszámítható a p vsz.-e annak is, hogy adott n-nél $|n/N - \mathbf{M}(\xi_t)/N| < \varepsilon$ (ε adott kis szám); ebből ε, p fixálása esetén $\mathbf{M}(\xi_t)$-re is következtethetünk (vö. 8. § 3. pl.).

36. A 7 §. 34. pl. II. modellnél mi lesz a t idő alatti bomlások számának sz. n.-e?

Megoldás. A II. modell esetében a t idő alatt elbomlott atomok η száma μt paraméterű POISSON-eloszlást követ, így tehát $\mathbf{D}^2(\eta) = \mu t$. Mivel $\mathbf{M}(\eta) = \mu t\, \mathbf{D}(\eta) = \sqrt{\mathbf{M}(\eta)}$, és az elbomlott atomok számának „relatív hibája" közelítőleg $\mathbf{D}(\eta)/M(\eta) = 1/\sqrt{\mu t} = 1/\sqrt{\mathbf{M}(\eta)}$. Ennél a modellnél tehát az előző pl.-belinél kevesebb közelítéssel kapjuk azt az általánosan bevett formulát, hogy a t idő alatti bomlások számának sz.-a egyenesen, relatív hibája pedig fordítottan arányos az átlagos bomlásszám négyzetgyökével. A „relatív hiba" mindenesetre csökken, ha a t mérési időtartam nő.

37. Egy rádioaktív anyag sugárzásának megfigyelésekor azt tapasztaljuk, hogy t idő alatt n bomlás történt. Ha az anyag viselkedését a 7. § 32. pl.-beli *I. modell* írja le, mi a vsz., hogy $N\,(= n, n+1, \ldots)$ számú rádioaktív atom van jelen (tegyünk kézenfekvő feltevéseket!). Milyen N érték a legvalószínűbb?

Megoldás. Legyen a jelenlevő atomok száma, ξ, és a bomlások száma, η, vsz. v. Keressük a $\mathbf{P}(\xi = N \mid \eta = n)$ $(n = 0,1, \ldots;\ N = n, n+1, \ldots)$ vsz.-et. A BAYES-tétel szerint

$$\mathbf{P}(\xi = N \mid \eta = n) = \mathbf{P}(\eta = n \mid \xi = N)\, \mathbf{P}(\xi = N) \Big/ \sum_{N} \mathbf{P}(\eta = n \mid \xi = N)\, \mathbf{P}(\xi = N)$$

(A Σ a szóba jövő N-ekre!) Az I. modell szerint

$$\mathbf{P}(\eta = n \mid \xi = N) = \binom{N}{n} (1 - e^{-\lambda t})^n\, e^{-(N-n)\lambda t}$$

$\mathbf{P}(\xi = N)$*-re azonban csak feltevéseket tehetünk.* Nyilvánvaló, hogy $M \geqq N \geqq n$, ahol M igen nagy szám. *Tegyük fel,* hogy $\mathbf{P}(\xi = N)$ bármely szóba jövő N-re ugyanaz, vagyis, *hogy egyenlő vsz.-gel lehet akárhány atom jelen*; ekkor a formulából $\mathbf{P}(\xi = N)$ kiesik (M nagy volta folytán kis hibát jelent csak, ha az M-ig szummázást ∞-ig terjedővel pótoljuk). Ekkor (egy ismert összefüggés alapján) a nevező $=$

$$= \sum_{N=n}^{\infty} \binom{N}{n} (1 - e^{-\lambda t})^n\, e^{-(N-n)\lambda t} = 1/(1 - e^{-\lambda t}),$$

s így közelítőleg

$$\mathbf{P}(\xi = N \mid \eta = n) = \binom{N}{n} (1 - e^{-\lambda t})^{n+1}\, e^{-(N-n)\lambda t}.$$

Vizsgáljuk meg, milyen N a legvalószínűbb, ha $\eta = n$ volt, és mi ekkor a $\mathbf{P}(\xi = N \mid \eta = n)$ értéke. A maximumot illetőleg a megfelelő N_m érték nyilván $\mathbf{P}(\xi = N_m - 1 \mid \eta = n) \leqq \mathbf{P}(\xi = N_m \mid \eta = n) \geqq \mathbf{P}(\xi = N_m + 1 \mid \eta = n)$ egyenlőtlenségekből határozható meg; egyszerű számolás azt adja, hogy $n/(1 - e^{-\lambda t}) - 1 \leqq N_m \leqq n/(1 - e^{-\lambda t})$, vagyis a legvalószínűbb N érték és n között a bomlási törvény áll fenn közelítőleg. $\mathbf{P}(\xi = N_m \mid \eta = n)$-et már közelítőleg is komplikált kiszámítani. Egyedül azt könnyű megállapítani, hogy ha $t \to \infty$, $\mathbf{P}(\xi = N \mid \eta = n)$ $N = n$-nél 1, egyébként 0. Ez a legmegbízhatóbb mérési idő esete, erre közvetlenül is rájöhetünk: végtelen hosszú ideig tartó megfigyelésnél minden atom elbomlik, és így az észlelések száma azonos az elbomlott atomok számával. Megjegyzendő, hogy *a* $\mathbf{P}(\xi = N) =$ $=$ konst *feltevés elég önkényes, és így következtetéseink óvatosan kezelendők!* — Az itt tárgyalt probléma azért is érdekes, mert rádioaktív méréseknél gyakran egy bizonyos idő alatt észlelt bomlások számával exakte arányosnak veszik a jelenlevő rádioaktív atomok számát anélkül, hogy annak jogosultságát megvizsgálnák. Mint látjuk, *ez csak bizonyos vsz.-gel tehető meg.* (L. még a 7. § 32—34. pl.-kat is.)

38. Az előző pl. feltételei mellett tegyük fel, hogy a felezési időn át figyeljük meg a bomlások számát. Ha a felezési idő alatt n bomlást észleltünk, mi lesz a radioaktív atomok N számának legvsz.-bb értéke ?

Megoldás. Ha a felezési idő T, $Ne^{-\lambda T} = N/2$, és így $e^{-\lambda T} = 1/2$, az előző feladatbeli $n(1 - e^{-\lambda t})$ ekkor $= 2n$, és így $N_m = 2n$-nek vagy $2n - 1$-nek vehető. $\mathbf{P}(\xi = N_m \mid \eta = n)$ mindkét esetben $\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$, ez monoton csökken n-nel, s így a szóban forgó valószínűség $n = 0$-nál a legnagyobb ($= 1/2$); ha tehát a felezési idő alatt egyetlen bomlást sem észleltünk, az előző pl. feltételei mellett az a legvalószínűbb (bár csak 1/2 vsz.-ű), hogy nincs is jelen rádioaktív atom.

39. Legyen $1 - e^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$ konst) annak a vsz., hogy egy rádioaktív atom t idő alatt elbomlik, c pedig azé, hogy az elbomlást a regisztráló berendezés jelezni fogja. Ha az atomok mind egyformán viselkednek, és az egyes elbomlások, illetve regisztrálások egymástól függetlenek, mi a vsz., hogy t idő alatt k ($= 0, 1, \ldots N$) regisztrálás történik (ha a t időtartam elején N radioaktív atom van jelen)?

Megoldás. Jelölje a t idő alatt történt elbomlások számát a ξ_t, a regisztrálások számát pedig az η_t vsz. v. A teljes vsz. tétele szerint a keresett vsz. $\mathbf{P}(\eta_t = k) = \sum_{l=k}^{N} \mathbf{P}(\eta_t = k \mid \xi_t = l)\,\mathbf{P}(\xi_t = l)$ $(k = 0, \ldots, N)$. Feltevéseink alapján *annak a megfigyelését, hogy N egymástól független atom közül t idő alatt hány bomlik el, egymástól függetlenül, úgy is felfoghatjuk, mintha egyetlen atomot N-szer újból és újból megfigyelhetnénk, elbomlik-e t idő alatt vagy sem*; így $\mathbf{P}(\xi_t = l)$ annak a vsz.-ként tekinthető, hogy N független kísérlet közül l-ben bizonyos esemény (az elbomlás) bekövetkezik; ekkor azonban ξ_t binomiális eloszlású, és $\mathbf{P}(\xi_t = l) = \binom{N}{l}(1 - e^{-\lambda t})^l\, e^{-\lambda t(N-l)}$. $\mathbf{P}(\eta_t = k \mid \xi_t = l)$ annak a vsz., hogy l elbomlás mellett k-szor következik be regisztrálás. Feltevéseink szerint tehát η_t is binomiális eloszlású, és értéke $\binom{l}{k} c^k (1 - c)^{l-k}$. $\mathbf{P}(\eta_t = k)$ *tulajdonképpen két binomiális eloszlás keveréke, és*

$$\mathbf{P}(\eta_t = k) = \sum_{l=k}^{N} \binom{l}{k} c^k (1 - c)^{l-k} \binom{N}{l} (1 - e^{-\lambda t})^l\, e^{-\lambda t(N-l)} =$$

$$= \binom{N}{k} c^k (1 - e^{-\lambda t})^k \sum_{l=k}^{N} \binom{N-k}{l-k} (1 - c)^{l-k} (1 - e^{-\lambda t})^{l-k}\, e^{-\lambda t(N-l)} =$$

$$= \binom{N}{k} [c(1 - e^{-\lambda t})]^k\, [1 - c(1 - e^{-\lambda t})]^{N-k},$$

vagyis η_t szintén binomiális eloszlású, N és $c(1 - e^{-\lambda t})$ paraméterekkel.

40. Tegyük fel, hogy egy rádioaktív anyag elbomlását a 7. § 32. pl. *I. modell* írja le, a regisztráló berendezés azonban csak c vsz.-gel regisztrál egy bomlást. Számítsuk ki a t idő alatt elbomlott atomok ξ_t számának v. é.-ét és sz. n.-ét, a *regisztrált* η_t elbomlásszám segítségével.

Megoldás. Az előző pl.-ban már kiszámítottuk η_t eloszlását: $\mathbf{P}(\eta_t = k) = \binom{N}{k} [c\,(1 - e^{-\lambda t})]^k\,[1 - c\,(1 - e^{-\lambda t})]^{N-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$. Mivel ez binomiális eloszlás, $\mathbf{M}(\eta_t) = N\,c\,(1 - e^{-\lambda t})$ és $\mathbf{D}^2(\eta_t) = N\,c\,(1 - e^{-\lambda t})\,[1 - c\,(1 - e^{-\lambda t})]$.

A 7. § 33. pl.-ból láttuk, hogy $\mathbf{M}(\xi_t) = N\,(1 - e^{-\lambda t})$, hasonlóan $\mathbf{D}^2(\xi_t) = N\,(1 - e^{-\lambda t})\,e^{-\lambda t}$. Ezekből $\mathbf{M}(\xi_t) = (1/c)\,\mathbf{M}(\eta_t)$ és $\mathbf{D}^2(\xi_t) = [\mathbf{D}^2(\eta_t) - (1 - c)\cdot \mathbf{M}(\eta\,t)]/c^2$, ez csak $c \approx 1$-nél lesz közelítőleg $\mathbf{D}^2(\eta\,t)$. A $\mathbf{D}(\xi_t)/\mathbf{M}(\xi_t)$-vel definiált relatív hiba $\sqrt{\mathbf{D}^2(\eta_t)/\mathbf{M}^2(\eta_t) - (1 - c)/\mathbf{M}(\eta_t)}$, ami ugyancsak $c \approx 1$-nél lesz közelítőleg $\mathbf{D}(\eta_t)/\mathbf{M}(\eta_t)$. Egyes kísérletezők ezekre nem gondolnak, és azonosítják ξ_t és η_t sz.-ait, illetve relatív hibáit. Az itteni mennyiségek megállapításához tehát ismernünk kell elvileg a t idő alatt regisztrált bomlások v. é.-ét és sz. n.-ét. Egyetlen mérés ezeket nem szolgáltathatja, s a „kísérlet" sem ismételhető meg: ha azonban az atomok száma nagy és $\lambda\,t$ igen kicsi, vagyis a t idő alatti elbomlások száma közel Poisson-eloszlást követ, a viszonyok igen sok, a t időtartam után következő, ugyanilyen hosszú időtartam alatt ugyanolyanok, mint a legelső megfigyelésnél, *s így a „kísérlet" megismétlése egyenértékű sok egymás után következő t hosszúságú időintervallum alatt bekövetkező bomlások számának megfigyelésével.* Az ekkor kapott adatokból már közelítő értékeket kaphatunk $\mathbf{M}(\eta_t)$-re és $\mathbf{D}(\eta_t)$-re, s így a tényleges elbomlásszám „relatív hibájára" is, *ha c-t is ismerjük.* λ-t itt nem kell ismernünk. $\mathbf{D}(\xi_t)$, illetve $\mathbf{D}(\xi_t)/\mathbf{M}(\xi_t)$ különben $\sqrt{\mathbf{M}(\xi_t)\,e^{-\lambda t}}$-vel, illetve $1/\sqrt{\mathbf{M}(\xi_t)\,e^{\lambda t}}$-vel volt egyenlő; a regisztrált mennyiségek segítségével kifejezve ez $\sqrt{(1/c)\,\mathbf{M}(\eta_t)\,e^{-\lambda t}}$, illetve $\sqrt{c/\mathbf{M}(\eta_t)\,e^{\lambda t}}$, vagyis c-n kívül λ-t is ismernünk kell, ha csak $\mathbf{M}(\eta_t)$-re akarunk támaszkodni (ha $\mathbf{M}(\eta_t)$ helyett közelítésként egyetlen mérés adatát használjuk, még fontosabb ismerni λ-t és c-t). Vegyük észre, hogy $1/\sqrt{\mathbf{M}(\eta_t)}$ mindenesetre *felülbecsüli* ξ_t relatív hibáját; ha c-t és λ-t nem ismerjük, ezt az értéket használhatjuk a relatív hiba *felső* közelítéseként. Ez a tény tehát *biztosítéka* annak a szokásnak, hogy a regisztrált bomlásszám *négyzetgyöke reciprokát veszik a tényleges bomlásszám relatív* hibájának. $\mathbf{D}(\xi_t)$-t azonban általában nem becsülhetjük felül $\sqrt{\mathbf{M}(\eta_t)}$-vel (ahogy azt egyes szerzők teszik).

41. Homogén, rádioaktív készítményből kibocsátott korpuszkulákat úgy regisztrálunk, hogy egy számlálócsőbe juttatjuk őket, az ebből jövő áramimpulzusokat pedig egy számoló szerkezetbe vezetjük. A számoló szerkezet olyan, hogy egy, a számlálás utáni bizonyos fix τ időtartam alatt befutó újabb áramimpulzust nem képes regisztrálni, és ha mégis jön újabb áramimpulzus, ez megnyújtja a regisztrálásra képtelen állapot tartamát (olyan hosszúra, mintha a két impulzushoz külön-külön rendelhető τ időtartamok, részben egymást fedve, egymásra volnának dobva). Esetleges harmadik impulzus, amely az említett szuperpozíció eredményeként előállott időtartam alatt fut be, analóg módon tovább nyújtja azt é. i. t. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a számoló szerkezet eredeti fix τ „holt idejét" az alatta befutó új impulzus megnyújtja, belőle változó „holt időt" csinál. — Egy ilyen körülmények közt lefolyó számlálás eredményéből akarjuk a készítmény bomlási állandóját kiszámítani. A bizonyos idő alatt számlált átlagos korpuszkulaszám, n, nyilván kisebb a készítményből (a számláló felé átlagban) kibocsátottnál. Határozzuk meg n-t, ha a (T_1, T_2) időtartamon át számlálunk, s a készítmény bomlási állandója λ, a nulleffektusból (kizárhatatlan sugárzásból) származó impulzusok (= korpuszkulaszám) átlaga időegység alatt β, a $t = 0$-kor jelenlevő atomok száma M, és valamely időtartam alatt érkező rádioaktív anyagbeli korpuszkulák száma binomiális, a nulleffektusból származóké pedig Poisson-eloszlást követ (az átlagokat mindenütt fogjuk fel v. é.-ként).

Megoldás. Állapítsuk meg először a $(t, t + \Delta t)$ intervallumban számlált korpuszkulák számának v. é.-ét (ez $\approx$ az átlagos számuk). Feltehető, hogy Δt alatt 1-nél több korpuszkula érkezésének vsz.-e elhanyagolható 0 vagy 1 érkezési vsz.-éhez képest (ez abból látszik, hogy a POISSON-eloszlást mutató nulleffektus, illetve a binomiális eloszlást mutató rádioaktív anyagsugárzás esetében > 1 korpuszkula érkezésének vsz.-e Δt alatt $o(\Delta t)$. Legyen: A_k: [$(t, t + \Delta t)$ alatt k korpuszkula jön be], B: [a $(t, t + \Delta t)$ alatt bejött korpuszkulákat a készülék mind regisztrálja]. Ekkor $\mathbf{P}(A_k B) = \mathbf{P}(B \mid A_k)\, \mathbf{P}(A_k)$. Előbbi feltevésünk szerint azonban $\mathbf{P}(A_k) \approx 0$, ha $k > 1$, és így a $(t, t + \Delta t)$ alatt bejött és regisztrált korpuszkulák számának v. é.-e $(\approx n) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mathbf{P}(A_k B) = \mathbf{P}(A_1 B) = \mathbf{P}(B \mid A_1)\, \mathbf{P}(A_1)$. $\mathbf{P}(B \mid A_1)$ annak a vsz.-e, hogy egy $(t, t + \Delta t)$ alatt bejött korpuszkulát a készülék regisztrál. Ez akkor történhetik meg, ha t-kor nem tart még előző korpuszkula által okozott fix τ hosszú holt idő (vö. a használt modellel) — más szóval, ha $(t - \tau, t)$ alatt nem jött be korpuszkula. Ez az esemény akkor lép fel, ha $(t - \tau, t)$ alatt sem a nulleffektusból, sem a rádioaktív anyagból nem jön korpuszkula. Mivel az ezen forrásokból (t_1, t_2) idő alatt jövő korpuszkulaszám feltételeink értelmében $\beta\,(t_2 - t_1)$ paraméterű POISSON, illetve M_{t_1}; $(1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)})$ paraméterű binomiális eloszlású vsz. v. (M_{t_1} a (t_1, t_2) intervallum kezdetén meglevő rádioaktív anyagmennyiség) az előbbi esemény vsz.-e $= \mathbf{P}[(t-\tau, t)$ alatt 0 jön a nulleffektusból$]$. $\mathbf{P}[(t - \tau, t)$ alatt 0 rádioaktív atom bomlik el$] = e^{-\beta\tau} \left(\sum_{k=0}^{M} e^{-\lambda\tau k}\, \mathbf{P}(M_{t-\tau} = k)\right)$ (POISSON-eloszlásnál csak a szóban forgó intervallum *hosszának* van szerepe, kezdete időpontjának nem!); a második faktor azt veszi figyelembe, hogy a 0 elbomlás előállhat úgy, hogy a $(t - \tau, t)$ elején $M_{t-\tau} = 0, 1, \ldots, M$ rádioaktív atom volt meg a $t = 0$-beli M-ből, s ugyanakkor τ időn át a jelen volt $0, \ldots, M$ atomból egy sem bomlott el. Mivel $\mathbf{P}(M_{t-\tau} = k) = \binom{M}{M-k} 1 - e^{-\lambda(t-\tau)})^{M-k}\, e^{-\lambda(t-\tau)k}$ végül is $\mathbf{P}(B \mid A_1) = e^{-\beta\tau}\,[1 + e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t-\tau)}]^M$. $\mathbf{P}(A_1)$ annak a vsz., hogy $(t, t + \Delta t)$ alatt 1 korpuszkula jön be. Ez így állhat elő: vagy 1 korpuszkula a nulleffektusból és 0 a rádioaktív anyagból, vagy ennek fordítottja. Ennek vsz.-e: a $\mathbf{P}(B \mid A_1)$ kiszámításánál követetthez hasonló gondolatmenettel:

$$e^{-\beta\Delta t}\beta\ \Delta t \sum_{k=0}^{M} e^{-\lambda\Delta t k} \binom{M}{M-k} (1 - e^{-\lambda t})^{M-k}\, e^{-\lambda t k} +$$

$$+ e^{-\beta\Delta t} \sum_{k=0}^{M} \binom{k}{1} (1 - e^{-\lambda\Delta t})\, e^{-\lambda\Delta t(k-1)} \binom{M}{M-k} (1 - e^{-\lambda t})^{M-k}\, e^{-\lambda t k},$$

ami az $o(\Delta t)$ tagok elhanyagolásával $= \beta\,\Delta t + M\lambda\, e^{-\lambda t}\,\Delta t$. Így tehát $n = (\beta + M\lambda\, e^{-\lambda t})\, e^{-\beta\tau}\,[1 + e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t-\tau)}]^M\,\Delta t$; ($o(\Delta t)$ tagoktól eltekintve!) A (T_1, T_2) időtartamon át számlált korpuszkulák számának v. é.-ét az itt szereplő függvényt T_1-től T_2-ig integrálva kapjuk meg. Az ekkor kapott képletet fel szokták használni λ (a bomlási állandó) kísérleti meghatározására, miután n-t már megállapították. λ-t explicite kifejezni nem tudjuk a formulából; pl. fokozatos közelítéssel vagy grafikus úton azonban meghatározhatjuk.

42. Részecskeszámlálásnál gyakran alkalmaznak ún. lökésszámosztót *(scaler)*. Ez a berendezés azt eredményezi, hogy a számlálócsőről jövő impulzusok közül csak minden k-adik ($k = 1, 2, \ldots$) kerül egy számolószerkezetbe. Ha a számlálócső minden

részecskére impulzust ad, és a scaler is abszolút biztosan működik, ha a bizonyos T idő alatt beérkező részecskék ξ_T száma (és így feltevéseink szerint a scalerbe jutó impulzusok száma is) POISSON-eloszlást követ, mi lesz a T idő alatt a számolóba jutott „k-adik impulzusok" számának eloszlása, v. é.-e, és hogy fog függeni ez utóbbitól ξ_T v. é.-e? (A v. é.-ek $\approx T$ alatti átlagos (megfelelő) részecskeszámnak is vehetők!)

Megoldás. A számlálócsőbe T idő alatt bejutó részecskék ξ_T számára feltevés szerint fennáll, hogy $\mathbf{P}(\xi_T = k) = e^{-\lambda T}(\lambda T)^k/k!$ $(k = 0, 1, \ldots;\ \lambda > 0,$ konst). Ezen feltétel mellett határozzuk meg, mi lesz a scalerből T idő alatt jövő „k-adik impulzusok" η_T számának eloszlása, vagyis $\mathbf{P}(\eta_T = m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Nyilván akkor lesz T idő alatt m darab „k-adik impulzus", ha a számlálócsőbe T idő alatt vagy mk, vagy $mk + 1, \ldots,$ vagy $mk + k - 1$ részecske jött be; utóbbiak számának POISSON-eloszlása folytán tehát az előbbi esemény vsz.-e a keresett $\mathbf{P}(\eta_T = m) = \sum_{n=mk}^{mk+k-1} e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!$ Most $\mathbf{M}(\eta_T)$-t kell kiszámítanunk. Definíció szerint

$$\mathbf{M}(\eta_T) = \sum_{m=0}^{\infty} m \sum_{n=mk}^{mk+k-1} e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n! = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=mk}^{\infty} e^{-\lambda T}(\lambda T)^r/r!$$

és ez a

$$\sum_{t=a}^{\infty} e^{-\mu}\mu^t/t! = \frac{1}{(a-1)!}\int_0^{\mu} t^{a-1}e^{-t}\,dt$$

összefüggés alapján (l. 4. §) $= \int_0^{\lambda T} e^{-t}\left(\sum_{m=1}^{\infty} t^{mk-1}/(mk-1)!\right)dt.$

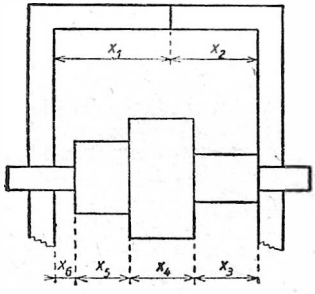
Szükségessé válik tehát kiszámítani $\sum_{m=1}^{\infty} t^{mk-1}/(mk-1)!$-t $(k = 1, 2, \ldots)$. *Ez a következő fogással sikerül:* Vegyük észre, hogy ez e^t MACLAURIN-sora k, $2k$, ...-adik tagjainak összege. Írjuk fel most kifejtve $\sum_{b=0}^{r} \varepsilon_b e^{\varepsilon_b t}$-t, ahol az ε_b-k és r *egyelőre határozatlan* mennyiségek. Ez $\sum_{b=0}^{r} \varepsilon_b \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varepsilon_b t)^\nu/\nu! = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r} \varepsilon_b^{\nu+1}\right) t^\nu/\nu!$ Határozzuk meg úgy ε_b-t és r-t, hogy $\sum_{b=0}^{r} \varepsilon_b^{\nu+1} \equiv 0$ legyen, ha $\nu = mk - 1$, egyébként valamilyen konstans. Ekkor ti. a kívánt Σ-t kapnánk. Mindjárt látható, hogy az $\varepsilon_b = \exp[2\pi ib/k]$ mennyiségek (a k-adik egységgyökök!) és $r = k - 1$ megfelelnek, mert ekkor a szóban forgó $\Sigma = 0$, ha $\nu \neq mk - 1$ és $= k$, ha $\nu = mk - 1$. *Így tehát* $\sum_{m=1}^{\infty} t^{mk-1}/(mk-1)! = (1/k)\sum_{b=0}^{k-1} \varepsilon_b e^{\varepsilon_b t}$. *(Ez a módszer nemcsak e^t segítségével előállított natványsorok „rejtkításánál" alkalmazható, hanem más függvényekből kiindulva is!)* Ezzel $\mathbf{M}(\eta_T) = \frac{1}{k}\int_0^{\lambda T}\left(\sum_{b=0}^{k-1} \varepsilon_b e^{(\varepsilon_b - 1)t}\right)dt = (1/k)\sum_{b=0}^{k-1} \varepsilon_b (e^{(\varepsilon_b-1)\lambda T} - 1)/(\varepsilon_b - 1)$. Mivel ez a v. é. valós,

az itt szereplő komplex szám imaginárius része 0, és így $M(\eta_T)$-re vehetjük mindjárt a valós részt; ez gépiesen kiszámítható, bonyolultsága folytán azonban itt nem foglalkozunk vele tovább. — Az említett módon nyert végső megoldást jelöljük $(1/k)\,E(\lambda\,T)$-vel; mivel $M(\xi_T) = \lambda\,T$ végül is azt kapjuk, hogy $M(\eta_T) = E\,[M(\xi_T)]/k$. Ha azt a függvényt, amelyben itt $M(\xi_T)$ szerepel, külön tabellázzuk, a táblázatok segítségével adott (észlelt) $M(\eta_T)$, T és k esetén meghatározhatjuk a keresett $M(\xi_T)$-t (vagyis λ-t is, ami meg a bomlási állandóval függ össze). $k = 1$-nél az eredmény természetszerűleg λT. Ha T igen nagy, $M(\eta_T)$ integrálos kifejezésében $\sum_{b=0}^{k-1} \varepsilon_b\, e^{(\varepsilon_b-1)t} = \varepsilon_0 + \sum_{b=1}^{k-1} \varepsilon_b\, e^{(\varepsilon_b-1)t} \approx 1$ [mert $\mathrm{Re}\,(\varepsilon_b - 1) < 0$, ha $b = 0$, s így az exponenciális függvényű tagok ≈ 0, ha T igen nagy, ε_0 pedig $= 1$]. Nagy T-nél tehát (ami stacionárius állapotot jelent) $M(\eta_T) \approx \lambda\,T/k = M(\xi_T)/k$, ahogy az szemléletes meggondolásból is már következik (hosszú idő alatt a „k-adik impulzusok" számának v. é.-e kb. k-ad része az összes impulzusok száma v. é.-ének). — Eredményünknek pl. akkor van szerepe, ha bomlási állandót akarunk meghatározni, de a sugárzás oly bőséges, hogy csak scaler közbeiktatásával tudjuk számolni az impulzusokat.

43. Egy csiszolatlan gyémántdarab $k \geqq 2$ részre hasadt szét. Ha egy csiszolatlan gyémántdarab értéke súlyának négyzetével arányos, mi lesz a k darab összértékének v. é.-e, feltéve, hogy a gyémánt egyenlő vsz.-gel hasadhatott szét bármilyen súlyú darabokra?

44. Egy feszültség-leosztólánc egy tagja egy 1000 és egy 470 ohmos ellenállás sorbakapcsolásából áll. A felhasznált ellenállások értékei a valóságban vsz. v.-k; a gyári adatokból tudjuk, hogy szórásuk 2%. Mekkora lesz az eredő ellenállás százalékos szórása, ha a kísérletileg nyert szórásokat a szereplő vsz. v.-k szórásaival, a hivatalos ellenállásértékeket pedig v. é.-eivel azonosíthatjuk? (Tudjuk, hogy ez nagyszámú mérésnél jó közelítéssel igaz is.)

45. Egy *GM* csővel T időn keresztül számoljuk a kozmikus sugárzásból származó (kizárhatatlan) korpuszkulákat. Utána egy homogén rádioaktív preparátumot hozunk a *GM* cső közelébe, s ismét T időn át számoljuk az impulzusokat. Ha az egyes okokból származó korpuszkulák száma egymástól független, és T idő alatt Poisson-eloszlású, a mérési adatokból hogyan határozható meg közelítőleg a tisztán a rádioaktív anyagból származó korpuszkulák számának eloszlása, v. é. és sz. n.-e?



28. ábra

46. Géprajzokon szerepelnek az ún. *„méretláncok"*; egymáshoz csatlakozó alkatrészek stb. méretei közti összefüggések. Például: Aljból és fedélből álló fémdobozon 3 részből álló rúd vezet keresztül (l. 28. ábra; a viszonyokat leegyszerűsítettük). Az egyes X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ hosszakat, „méreteket" a köztük fennálló $(X_1 + X_2) - (X_3 + X_4 + X_5 + X_6)$ összefüggés alapján „láncba" sorolhatjuk; ez példánkban a méretlánc. Az egyes alkatrészek mérete $(X_1, X_2, \ldots, X_5)$ a gyártás folytán vsz. v. lesz, bizonyos szórással a v. é.-ként tekintett előírt méret körül. Állapítsuk meg, mi lesz példánkban a rúd „lötyögését" jellemző X_6 távolság (szintén vsz. v.) v. é. és sz. n.-e.

47. Egy relé akkor kapcsol, ha a rajta átmenő áram ξ_1 sec-on át tart. ξ_1 általában vsz. v.; tegyük fel, hogy normális eloszlású [egyszerűség kedvéért: $(-\infty, \infty)$-en]. Egy másik, az előzővel sorbakapcsolt relé $\xi_2 > \xi_1$ ideig tartó áram hatására kapcsol; legyen ξ_2 is normális eloszlású vsz. v. $(-\infty, \infty)$-en. Bizonyos okokból fontos, hogy a $\xi_2 - \xi_1$ időkülönbség a lehető legkisebb legyen, viszont az nem kívánatos, hogy a második relé gyakran hamarabb zárjon az elsőnél. Mekkora legyen a különbség a ξ_2 és ξ_1 időtartamok v. é.-ei ($\approx \xi_1$ és ξ_2 gyárilag előírt értékei) között, hogy átlagban 1000 eset közül egyben forduljon csak elő, hogy a második relé hamarabb zár, mint az első?

48. Valamilyen vegyszert egy gép kiadagol és zacskókba csomagol. Egy adag súlya jó közelítéssel $(-\infty, \infty)$-en értelmezett normális eloszlású vsz. v.-nak tehető fel, 25 g v. é.-kel (= „elméleti" adag) és 0,4 g sz.-sal. Az üres zacskó súlyát is hasonló jellegű normális eloszlású vsz. v.-nak tekinthetjük, 5 g v. é.-kel és 0,2 sz.-sal. Mi lesz egy csomag súlyának v. é.-e és sz.-a? Milyen, a v. é. körül szimmetrikus határok közt lesz egy csomag súlya 0,95 vsz.-gel? — A gyár a zacskóba csomagolt vegyszert 10-enként dobozba csomagolva hozza forgalomba. Egyszerűség kedvéért a dobozok súlyát is $(-\infty, \infty)$-en normális eloszlású vsz. v.-nak tételezzük fel, amelynek v. é.-e 30 g, sz.-a 1 g. Mi lesz a megtöltött dobozok súlyának v. é.-e és sz.-a? Milyen határok közt lesz 0,9997 vsz.-gel a megtöltött dobozok súlya?

49. Egy egyenáramú generátorral táplált készülék áramkörét biztosítani akarjuk. Számítsuk a szereplő áramerősségeket A-ekben. Legyen a készülék áramfelvétele elméletileg 1 A, ha a generátorfeszültség az elméleti V_0; valójában azonban mind a készülékben fix generátorfeszültség mellett folyó áram, mind a generátorfeszültség vsz. v. (a készülék fogyasztása véletlenszerűen ingadozik stb.). Tegyük fel, hogy rögzített generátorfeszültségnél a készülékben folyó áram, illetve a generátorfeszültség (számolási könnyebbség kedvéért végtelen intervallumon értelmezett) normális eloszlású vsz. v.-k, amelyek szórása 0, 1, illetve 5% a pillanatnyi generátorfeszültségnek megfelelő áram értéke, illetve a V_0 érték ($\approx$ a generátorfeszültség v. é.-e) körül. Az áramkörbe bekapcsolt biztosíték elvileg I_0 áramnál olvad ki; valójában a kiolvasztó áram értéke is vsz. v.; tegyük fel, hogy I_0 ($\approx$ az áram v. é.-e) körül normális eloszlású 20% szórással. (A végtelen intervallumot itt is megengedjük.) — Milyen I_0-ra tervezett biztosítékot kell alkalmazni, ha azt akarjuk, hogy a készülék árama 10^{-4} vsz.-gel legyen nagyobb vagy egyenlő annál, amely az éppen szereplő biztosítékot kiégetné (vagyis, hogy — ahogy erre is mondani szokták — „gyakorlatilag biztos" legyen, hogy a biztosíték a várható ingadozások ellenére sem ég ki)? (A szereplő vsz. v.-k egymástól függetleneknek tekinthetők, a pillanatnyi áramerősség pedig legyen a pillanatnyi generátorfeszültséggel arányos.)

Megoldás. Legyen a készülékben folyó áram ξ_1, a biztosítékot kiégető áram ξ_2. A követelmény: $\mathbf{P}(\xi_1 \geqq \xi_2) = 10^{-4}$, vagy: $\mathbf{P}(\xi_1 - \xi_2 \geqq 0) = 1 - \mathbf{P}(\xi_1 - \xi_2 < 0) = 10^{-4}$ legyen. Így tehát $\xi_1 - \xi_2$ e. f.-ét kell meghatároznunk; ξ_1 és ξ_2 feltevés szerint függetlenek. Nézzük külön-külön ξ_1, illetve ξ_2 e. f.-ét, illetve s. f.-ét. Feltevés szerint ξ_2 s. f.-e $f_2(y) = \exp\left[-(I - I_0)^2/2\,c^2\right]/\sqrt{2\pi}\,c$, ahol $c = I_0 \cdot 20/100 = 0{,}2 \cdot I_0$. ξ_1 s. f.-ét azon feltétel mellett ismerjük, hogy a hálózati feszültség, η, épp a V értéket veszi fel [jelöljük is $f_1(i\,|\,V)$-vel], feltevés szerint ti. $f_1(i\,|\,V) = \exp\left[-(i - i(V))^2/2a^2\right]/\sqrt{2\pi}\,a$, ahol $i(V)$ a pillanatnyi V-nek megfelelő áramerősség, és $a = 0{,}1$. Feltevés szerint η is normális eloszlású, és s. f.-e $f_2(V) = \exp\left[-(V - V_0)/2\,b^2\right]/\sqrt{2\pi}\,b$, ahol $b = V_0 \cdot 5/100 = 0{,}05\,V_0$. Azt is tudjuk, hogy

$\eta = V_0$ esetén $i(V_0) = 1\,A$, és feltevés szerint az $i(V)$ függvény alakja: $i(V) = k\,V$ (k konst), és így $i(V_0) = k\,V_0 = 1$, azaz $k = 1/V_0$. Ezek után ξ_1 feltétel nélküli s. f.-e az ismert összefüggés alapján

$$f_4(i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(i \mid V)\, f_2(V)\, dV =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-(i - k\,V)^2/2\,a^2 \right]/\sqrt{2\pi}\,a \right\} \cdot \left\{ \exp\left[-(V - V_0)^2/2\,b^2 \right]/\sqrt{2\pi}\,b \right\} dV =$$

$$= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-(i/k - V)^2/2(a/k)^2 \right]/\sqrt{2\pi}\,(a/k) \right\} \left\{ \exp\left[-(V - V)^2/2\,b^2 \right]/\sqrt{2\pi}\,b \right\} dV,$$

ami nem más, mint a $(0, a/k)$, illetve (V_0, b) paraméterű normális s. f.-ek konvolúciója a $z = i/k$ helyen, azaz (a 6. § 8. pl. egy megjegyzése alapján):
$(1/k) \exp\{-(i/k - V_0)^2/2\,[(a/k)^2 + b^2]\}/\sqrt{2\pi[(a/k)^2 + b^2]} = \exp[-(i - k\,V_0)]^2/2\,(a^2 + k^2\,b^2)\,]/\sqrt{2\pi\,(a^2 + k^2\,b^2)}$, ami ismét normális s. f. Számítsuk ki most $\xi_1 - \xi_2$ s. f.-ét, $h(z)$-t. A 6. § 20. pl. szerint ez $h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_4(x)\, f_3(x - z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-(x - k\,V_0)^2/2(a^2 + k^2\,b^2)\,\right]/\sqrt{2\pi\,(a^2 + k^2\,b^2)} \right\} \left\{ \exp\left[-(x - z - I_0)^2/2\,c^2 \right]/\sqrt{2\pi}\,c \right\} dx$. Ez is konvolúciós integrálra vezethető vissza. A végeredmény $h(z) =$
$\exp\left[-(z - k\,V_0 + I_0)^2/2\,(a^2 + k^2\,b^2 + c^2)\,\right]/\sqrt{2\pi\,(a^2 + k^2\,b^2 + c^2)}$. Beírva a konstansokat
$h(z) = \exp\left[-(z - 1 + I_0)^2/2\,(0{,}1^2 + 0{,}05^2 + 0{,}2 \cdot I_0)^2)\,\right]/\sqrt{2\pi\,(0{,}1^2 + 0{,}5^2 + (0{,}2\,I_0)^2}$.

Így tehát $P(\xi_1 - \xi_2 < 0) = \int_{-\infty}^{0} h(z)\, dz$; feladatunk szerint azt kell meghatároznunk, milyen I_0 mellett lesz $1 - P(\xi_1 - \xi_2 < 0) = 1 - \int_{-\infty}^{0} h(z)\, dz = 10^{-4}$, vagyis

$$\int_{-\infty}^{0} \left\{ \exp\left[-(z - 1 + I)^2/2\,(0{,}04 \cdot I_0^2 + 0{,}0125)\,\right]/\sqrt{2\pi\,(0{,}04\,I_0^2 + 0{,}0125)}\, dz \right\} = 0{,}9999.$$

Az I_0-t integrálhatárba víve be, a normális e. f.-re jutunk: $\int_{-\infty}^{(I_0 - 1)/\sqrt{0{,}04 \cdot I_0^2 + 0{,}0125}} \left\{ \exp\left[-v^2/2\,\right]/\sqrt{2\pi} \right\} dv =$

$= 0{,}9999$. A felső határ tehát azzal az értékkel egyenlő, amelynél a normális e. f. értéke 0,9999; ez 3,8 (l. táblázatot!). Vagyis $(I_0 - 1)/\sqrt{0{,}04 \cdot I_0^2 + 0{,}0125} = 3{,}8$, s ebből $I_0 = 4{,}28$ (a másik gyök < 1, s így eleve elesik, hiszen a biztosítékot legalább 1 A-ra kell méretezni). Elméletileg 4,28 kiolvadási áramra készített biztosíték mellett tehát „gyakorlatilag biztos", hogy a véletlen ingadozások következtében nem fog kiolvadni a biztosíték. (A „gyakorlatilag biztos"-sal részletesen foglalkozik majd a 8. §).

50. A vsz. v.-k összege v. é.-ének és sz. n.-ének tétele alapján számítsuk ki az ***n*-edrendű Γ eloszlás v. é.-ét sz. n.-ét.**

Megoldás. A 6. § 19. pl.-ban láttuk, hogy n darab független, egyforma λ paraméterű exponenciális eloszlású vsz. v. — $\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$ — összege n-edrendű

(λ paraméterű) Γ eloszlású ξ_n vsz. v.; következésképp $\mathbf{M}(\xi_n) = \mathbf{M}(\tau_1) + \mathbf{M}(\tau_2) + \ldots + \mathbf{M}(\tau_n)$. De $\mathbf{M}(\tau_i) = 1/\lambda$, s így

$$\mathbf{M}(\xi_n) = n/\lambda.$$

Hasonló okoskodással: $\mathbf{D}^2(\xi_n) = \mathbf{D}^2(\tau_1) + \mathbf{D}^2(\tau_2) + \ldots + \mathbf{D}^2(\tau_n) = n/\lambda^2$ ($\mathbf{D}^2(\tau_n) = 1/\lambda^2$; $i = 1, \ldots, n$), azaz

$$\mathbf{D}^2(\xi_n) = n/\lambda^2.$$

51. Legyen η vsz. v., amelynek adva van az A feltétel mellett a feltételes e. f.-e. (A-t pl. úgy is kifejezhetjük, hogy valamilyen ξ vsz. v. az x értéket veszi fel; az x-ek diszkrétek is lehetnek.) Határozzuk meg $\mathbf{D}^2(\eta)$-t feltételes v. é.-ek és sz. n.-ek segítségével.

Megoldás. Definíció szerint $\mathbf{D}^2(\eta) = \mathbf{M}(\eta^2) - [\mathbf{M}(\eta)]^2$ (ez feltétel mellett is igaz !), és a feltételes v. é.-re vonatkozó $\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{M}[\mathbf{M}(\xi \mid \alpha)]$ (ξ, α vsz. v.-k) összefüggés szerint $\mathbf{M}(\eta^2) = \mathbf{M}[\mathbf{M}(\eta^2 \mid \xi)]$, $\mathbf{M}(\eta) = \mathbf{M}[\mathbf{M}(\eta \mid \xi)]$. Mivel az alapösszefüggés szerint $\mathbf{M}(\eta^2 \mid \xi) = \mathbf{D}^2(\eta \mid \xi) + [\mathbf{M}(\eta \mid \xi)]^2$, $\mathbf{M}[\mathbf{M}(\eta^2 \mid \xi)] = \mathbf{M}[\mathbf{D}^2(\eta \mid \xi)] + \mathbf{M}[(\mathbf{M}(\eta \mid \xi)^2]$. Ugyancsak a sz. n. definíciója szerint: $\mathbf{M}[(\mathbf{M}(\eta \mid \xi)^2] = \mathbf{D}^2[\mathbf{M}(\eta \mid \xi)] + \mathbf{M}[\mathbf{M}(\eta \mid \xi)]$. Mindezekből

$$\mathbf{D}^2(\eta) = \mathbf{M}[\mathbf{D}^2(\eta \mid \xi)] + \mathbf{D}^2[\mathbf{M}(\eta \mid \xi)].$$

52. Bizonyos területen élő rovarokat vizsgálnak; a vizsgálatot sokszor megismétlik. Legyen a nőstényrovarok egy vizsgálat alkalmával észlelt száma vsz. v., amelyről egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy m paraméterű POISSON-eloszlást követ. Tegyük fel, hogy egy nőstény által a vizsgálat ideje alatt lerakott peték száma is POISSON-eloszlást követ, λ paraméterrel. Mi lesz a peték vizsgálat alatt észlelhető számának vsz. eloszlása, v. é.-e és sz. n.-e, ha az egyes nőstények által lerakott peték számai független vsz. v.-k?

Megoldás. Legyen az i-edik nőstény által lerakott peték száma ξ_i ($i = 1, 2, \ldots$), a nőstények száma ν, az összes peték száma η (ezek vsz. v.-k). Nyilván $\mathbf{P}(\eta = n)$ ($n = 0, 1, \ldots$)-t keressük, annak alapján, hogy $\mathbf{P}(\nu = k) = e^{-m} m^k/k!$ ($k = 0, 1, \ldots$) és $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$, valamint $\mathbf{P}(\xi_i = l) = e^{-\lambda} \lambda^l/l!$ ($l = 0, 1, \ldots$). Véletlen számú tagból álló összeg eloszlásáról van szó, de a teljes vsz. tétele alapján is írhatjuk, hogy $\mathbf{P}(\eta = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\eta = n \mid \nu = k)\, \mathbf{P}(\nu = k)$ (keveréket kapunk). $\mathbf{P}(\eta = n \mid \nu = k)$ azonban a $\xi_1 + \ldots + \xi_k$ összeg vsz. eloszlása. Ez k darab független POISSON-eloszlású vsz. v. összege; mint tudjuk, két ilyen összegének eloszlása szintén POISSON-eloszlás, amelynek paramétere az egyes összeadandók POISSON-eloszlása paramétereinek összege, és ez teljes indukcióval akárhány összegére is kiterjeszthető, vagyis a szereplő összeg POISSON-eloszlású vsz. v., amelynek paramétere $k\lambda$. Így tehát

$$\mathbf{P}(\eta = n \mid \nu = k) = e^{-k\lambda}(k\lambda)^n/n! \quad \mathbf{P}(\eta = n) = \sum_{\eta=0}^{\infty} [e^{-k\lambda}(k\lambda)^n/n!]\,(e^{-m} m^k/k!) =$$

$$(e^{-m}\lambda^n/n!) \sum_{k=0}^{\infty} (me^{-\lambda})^k k^n/k!$$ (ez előállítható véges, de bonyolult összeg alakjában is).

Feltételeink mellett az idevágó tételből kifolyólag $\mathbf{M}(\eta) = \mathbf{M}[\mathbf{M}(\eta \mid \nu)]$, $\mathbf{M}(\eta \mid \nu)$, azonban η v. é.-e, amidőn ν valamelyik szóba jövő értékét, pl. k-t felveszi; de ekkor a $k\lambda$ paraméterű POISSON-eloszlás v. é.-éről, $k\lambda$-ról van szó. $\mathbf{M}[\mathbf{M}(\eta \mid \nu)]$ azt jelenti, hogy $\mathbf{M}(\eta \mid \nu)$-ben k-t vsz. v.-nak tekintjük, és v. é.-ét vesszük; $\mathbf{M}[\mathbf{M}(\eta \mid \nu)] = \mathbf{M}(\nu\lambda) = \lambda\, \mathbf{M}(\nu) = \lambda m$, mert ν m paraméterű POISSON-eloszlású vsz. v. A szórás-

négyzeteket a 7. § 51. pl. alapján a $D^2(\eta) = M[D^2(\eta|\xi)] + D^2[M(\eta|\xi)]$ összefüggés segítségével számítjuk ki. Esetünkben ξ-nek ν felel meg, $M(\eta|\nu)$ (mint újabb vsz. v.) $\nu\lambda$ volt; képezzük $D^2(\nu\lambda)$-t; ez azonban $\lambda^2 D^2(\nu)$; ν POISSON-eloszlású, m paraméterrel, ezért $D^2(\nu) = m$ és $D^2[M(\eta|\nu)] = \lambda^2 m$. Hasonlóan $D^2(\eta|\nu)$ mint újabb vsz. v. úgy kapható, hogy a $k\lambda$ paraméterű POISSON-eloszlás sz. n.-ében, $k\lambda$-ban k-t ismét vsz. v.-nak tekintve és ν-vel jelölve képezzük $M[D^2(\eta|\nu)] = M(\nu\lambda) = \lambda M(\nu)$-t (ami a fentiek szerint $= \lambda m$). Végül is $D^2(\eta) = \lambda m + \lambda^2 m = m\lambda(\lambda+1)$.

53. Folyómederben sodródó kavicsok mozgása pl. így írható le: Egy kavics t idő alatt ν számú lökést kap (ν vsz. v.), melyek hatása alatt sorjában $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$-vel mozdul el ($\xi_i$ is valószínűségi változó; $i = 1, \ldots, \nu$). Ha ν POISSON-eloszlású vsz. v., λt paraméterrel (λ konst), a ξ_i-k pedig egyformán $1 - e^{-\mu x}$ exponenciális eloszlásúak, mi lesz egy kavics által t idő alatt megtett összes út v. é.-e és sz. n.-e, ha a szereplő vsz. v.-k függetlenek?

Megoldás. A megtett út, $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$, ahol ν vsz. v. Így tehát $M(\xi) = M[M(\xi|\nu)]$. Ha $\nu = n$, $M(\xi|\nu) = M(\xi_1) + \ldots + M(\xi_n)$. Mivel ξ_i exponenciális eloszlású vsz. v., $M(\xi_i) = 1/\mu$, és így $M(\xi|\nu)$ ($\nu = n$ a feltétel!) $= n/\mu$. Legyen most n ismét a ν vsz. v., amely λt paraméterű POISSON-eloszlású; ekkor $M(\xi) = \lambda t/\mu$. Hasonlóan: $D^2(\xi) = M[D^2(\xi|\eta)] + D^2[M(\xi|\eta)]$ alapján, $D^2(\xi|\eta) = n/\mu^2$-tel, $D^2(\xi) = \lambda t/\mu^2 + \lambda t/\mu^2$, ξ e.f.-e $F(x) = P(\xi < x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi < x|\nu = n)\, P(\nu = n) =$

$= P(\nu = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi < x|\nu = n)\, P(\nu = n)$ ti. $P(\xi < x|\nu = 0)$ nyilván 1, mert $\nu = 0$-nál 0 az elmozdulás. Mivel a $\nu = n$ feltétel esetén ξ n darab független, exponenciális eloszlású vsz. v. összege feltételes e. f.-e, $P(\xi < x|\nu = n)$ n-edrendű Γ e. f. lesz (l. 6. § 19. pl.), vagyis itt ($n \geqq 1$!)

$$P(\xi < x|\nu = n) = \int_0^x \frac{\mu^n y^{n-1} e^{-\mu y}}{(n-1)!}\, dy$$

(ha $x > 0$; egyébként $\equiv 0$). $P(\nu = n) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$ ($n = 0, 1, \ldots$), és így

$$F(x) = e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \int_0^x \frac{\mu^n y^{n-1} e^{-\mu y}}{(n-1)!}\, dy$$

(ha $x > 0$; egyébként $\equiv 0$). Ez a $J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{2r}}{r!\,(r+1)!}$ 1-indexű Bessel-függvény felhasználásával az $F(x) = e^{-\lambda t} - i e^{-\lambda t} \sqrt{\lambda\mu t} \int_0^x e^{-\mu y} J_1(2i\sqrt{\lambda\mu t y}) \frac{dy}{\sqrt{y}}$

(ha $x > 0$; egyébként $\equiv 0$) alakra hozható ($i = \sqrt{-1}$). Míg ebből nagyon nehéz lett volna pl. $D(\xi)$-t kiszámítani, addig a fenti módon könnyen megkaphattuk. Az itt közölteknek folyók hordalékmozgásának elméletében van fontos szerepük. Jelentős vizsgálatokat végzett e téren PÓLYA GYÖRGY.* A feladattal még találkozunk a *B)* részben.

* *Pólya György* (1887—) külföldön élő magyar matematikus.

54. A 3. § 14. fel. feltételei alapján számítsuk ki $\mathbf{M}(\xi)$ és $\mathbf{M}(\eta)$-t, $\mathbf{D}^2(\xi)$ és $\mathbf{D}^2(\eta)$-t.

Megoldás. Definíció szerint $\mathbf{M}(\xi)=\sum_{i=1}^{3} x_i\ \mathbf{P}(\xi=x_i)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_i\,\mathbf{P}(\xi=x_i,\ \eta=y_k)$; hasonlóan $\mathbf{M}(\eta)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} y_k\ \mathbf{P}(\xi=x_i,\ \eta=y_k)$; a sz. n.-ekhez csak az $\mathbf{M}(\xi^2)$, illetve $\mathbf{M}(\eta^2)$-et írjunk fel, mivel $\mathbf{D}^2(\xi)=\mathbf{M}(\xi^2)-[\mathbf{M}(\xi)]^2$ és í. t. Ezek $\mathbf{M}(\xi^2)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_i^2\,\mathbf{P}(\xi=x_i,\ \eta=y_k)$ és $\mathbf{M}(\eta^2)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} y^2{}_k\ \mathbf{P}(\xi=x_i,\ \eta=y_k)$. A számértékek a vsz.-ek táblázatából helyettesíthetők be.

55. Számítsuk ki a $(\xi_1,\ \xi_2)$ **normális eloszlású vsz. vektor komponenseinek v. é.-eit és a vektor szórásmatrixát.**

Megoldás. A s. f.-t vegyük fel az $f(x_1, x_2)=$

$$=\frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\,(1-r^2)}\left\{\frac{(x_1-a)}{\sigma_1^2}-\frac{2r\,(x_1-a)\,(x_2-b)}{\sigma_1\,\sigma_2}+\frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

alakban. Ekkor, definíció szerint

$$\mathbf{M}(\xi_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2=a,\qquad \mathbf{M}(\xi_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2=b.$$

A szórásmatrix elemei: $\sigma_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\xi_i-\mathbf{M}(\xi_i)]\,[\xi_j-\mathbf{M}(\xi_j)]\,f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2\ (i, j=1,2)$.

Ezek itt: $\sigma_{11}=\sigma_1^2,\ \sigma_{22}=\sigma_2^2,\ \sigma_{12}=\sigma_{21}=r\,\sigma_1\,\sigma_2$.

Ismételten megjegyezzük, hogy mindig található a ξ_1, ξ_2-re olyan ortogonális transzformáció, hogy $f(x_1, x_2)$ valamilyen $g(y_1, y_2)$-be menjen át, amely kétdimenziós normális s. f. ugyan, de az exponensben vegyes tag nincs, ami azt jelenti, hogy azok az η_1, η_2 vsz. v.-k, amelyeknek $g(y_1, y_2)$ s. f.-e, függetlenek. Két, nem független, normális együttes eloszlású vsz. v. tehát mindig átranszformálható független-ekbe. (Ez n vsz. v.-ra is igaz!) — Az ilyen transzformáció után kapott vsz. v.-k által képviselt vsz. vektor szórásmatrixában csak a diagonálisba eső elemek nem 0-ok.

56. Számítsuk ki egy ξ **egydimenziós normális eloszlású vsz. v. centrális momentumait,** ha ξ v. é.-e m, sz. n.-e pedig σ^2.

Megoldás. A definíció szerint

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^k\,\frac{\exp\,[-(x-m)^2/2\sigma^2]}{\sqrt{2\pi\sigma}}\,dx$$

és így $\mu_k=0,$ (ha k páratlan,)

és $\mu_k=\sigma^k\,k\,!/2^{k/2}\,(k/2)\,!,$ (ha k páros.)

57. K. PEARSON, mint már említettük, egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletbe tudta foglalni a gyakorlatban szóba jövő összes s. f. típusokat. Ezen az alapon — ha egy vsz. v. által felvett egyes értékeket és relatív gyakoriságukat ismerjük — megoldhatjuk a tapasztalati e. f.-ekből levezetett (a relatív gyakoriságok felrakásából keletkezett) s. f.-ek formulába öntésének fontos feladatát, ti. a relatív gyakoriságokkal

közelített *s. f.-t általában meg tudjuk közelíteni valamelyik* PEARSON*-típusú görbével* a következő elv alapján: PEARSON differenciálegyenletében 4 állandó szerepel. Kimutatható, hogy bizonyos feltételek mellett a differenciálegyenlettel meghatározott s. f. első négy kezdeti momentumából *(ha van)* az összes konstansok meghatározhatók (3-ból pedig az első 3 konstans é. i. t. lefelé). — Ha tehát (a feltételek fennállása mellett) kikötjük, hogy i ($i = 1, 2, 3, 4$) számú kezdeti momentumnak kell egyeznie, a momentumokat az adatokból meghatározzuk, értékükből pedig kiszámítjuk az első i konstansot a PEARSON-féle differenciálegyenletben; a fennmaradó konstansokat 0-nak vesszük (ez az első i kezdeti momentum egyezését nem befolyásolja). Az így kapott differenciálegyenletet megoldjuk; a megoldás adatainak olyan közelítése lesz, amelynek a kívánt első i momentuma az adatokból számítottakkal megegyezik. — A függvényközelítés közismerten fontos problémakör. Az említett közelítések általában igen jók, és mindig pozitív értékeket adnak (ami s. f.-eknél szükséges is.) (A közelítés egycsúcsú, de a differenciálegyenlet általánosításával többcsúcsú függvényeket is előállíthatunk.) — Igazoljuk a kezdeti momentumok és együtthatók említett összefüggését, megállapítva a PEARSON-féle differenciálegyenlettel definiált s. f.-re teendő megkötéseket is.

Megoldás. Írjuk az $f(x)$ s. f.-re szóló PEARSON-féle differenciálegyenletet $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \equiv \frac{x-a}{g(x)}$ alakban. Az $f(x)$ s. f. általában valamilyen (α, β) intervallumon van értelmezve, azon kívül $\equiv 0$. $f(x)$ kezdeti momentumai $m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^r f(x)\,dx$ $(r = 0, 1, \ldots, 4)$. *Tegyük fel,* hogy ezek léteznek, és számítsuk ki őket a differenciálegyenlet felhasználásával. A differenciálegyenletből $f'(x)\,g(x) = f(x)\,(x-a)$. Szorozzuk mindkét oldalt x^s-sel $(s = 0, \ldots, 3)$ és integráljunk α-tól β-ig:

$\int_{\alpha}^{\beta} x^s f'(x)\,g(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^s f(x)\,(x-a)\,dx$. Parciális integrálás után ebből azt kapjuk, hogy $\left[x^s f(x) g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \frac{d}{dx}\left(x^s g(x)\right) dx = m_{s+1} - a\, m_s$. *Tegyük fel,* hogy a bal oldali konstans tag 0; a második tagot kiintegrálva, végül is az $s b_0 m_{s-1} + (s+1)\, b_1 m_s + (s+2)\, b_2 m_{s-1} = a m_s - m_{s+1}$ rekurzív formulát kapjuk az m_s-ekre.

A kiindulás $m_0 = 1$, és hogy negatív indexekre az m_s-ek $\equiv 0$-ok, valamint, hogy az origó eltolásával mindig elérhető, hogy $m_1 = 0$ legyen (az eltolás a görbealak szempontjából közömbös!) Ebből nemcsak az m_s-ek számíthatók ki adott a és b_i-k $(i = 0, 1, 2)$ esetén, mint (a, b_i) függvényei, hanem ezen függvények alapján elegendő m_s ismeretében az a, b_i-k is. Ha tehát az m_s-eket az adott függvény kezdeti momentumaival azonosítjuk, és utóbbiakat (az integrált téglalapösszeggel közelítve) az adott függvény adataiból kiszámítjuk, meghatározhatunk a, b_i-ket, amelyekkel aztán $f(x)$-re megoldjuk a differenciálegyenletet. A megoldás kezdeti momentumai a kísérleti adatokból számítottakkal megegyeznek. Nyilván 4 kezdeti momentum ismerete elég; ha kevesebb egyezése is elegendő, az a, b_i-k közül azokat, amelyekre már nincs egyenletünk, 0-oknak lehet venni: ekkor a differenciálegyenlet is egyszerűsödik. — A differenciálegyenlet megoldása konstansainak stb. megállapításánál persze figyelembe kell

venni, hogy s. f.-ről van szó és a többi körülményt is. — Látjuk, hogy a feltételek a kívánt számú kezdeti momentum létezése és $[x^s f(x)\, g(x)]_\alpha^\beta = 0$. Ezeket persze csak akkor ellenőrizhetjük, ha már megvan a differenciálegyenlet és megoldása. Ezen ellenőrzés nélkül viszont az eljárás végrehajtásának lehetősége nem tekinthető biztosítottnak. — *Példa.* Legyen adva egy tapasztalati s. f., $h^*(x)$ és első kezdeti momentuma, $M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\, h^*(x)\, dx$. Toljuk el a koordinátarendszert úgy, hogy az origó M_1-be kerüljön; ekkor a s. f. $h(x) = h^*(x + M_1)$ lesz. $h(x)$ első kezdeti momentuma, m_1 már 0, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_1)\, h^*(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x h^*(x)\, dx - M_1 \int_{-\infty}^{\infty} h^*(x)\, dx = M_1 - M_1 = 0.$$

Határozzuk meg $h(x)$ második kezdeti momentumát, m_2-t is. $m_1 = 0$ és m_2 alapján rendeljünk PEARSON-féle s. f.-t $h(x)$-hez. — A rekurzív formulából, $s = 0$ és $s = 1$-re felírva: $b_1 m_0 + 2 b_2 m_1 = a m_0 - m_1$ és $b_0 m_0 + 2 b_1 m_1 + 3 b_2 m_2 = a m_1 - m_2$. Mivel $m_1 = 0$, az egyetlen nem fixált kezdeti momentum, m_2 a második egyenlet segítségével már akkor is meg van határozva, ha csak $b_0 \neq 0$ és a többi paraméter 0. Vegyük tehát az utóbbiakat 0-nak; ezzel egyszersmind elértük a differenciálegyenlet legegyszerűbb alakját is, amely mellett a kezdeti momentumok az előírtak; s amelyet úgy kapunk meg, hogy az általános alakban felírt differenciálegyenletben $a = 0$, $b_0 = -m_2$, $b_1 = b_2 = 0$-t teszünk. A differenciálegyenlet tehát $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{m_2}$, vagyis $f(x) = c\, e^{-x^2/2m_2}$ (c konst). Ez tehát a megadott kezdeti momentumoknak megfelelő közelítés. Mivel $f(x)$ s. f., $c = 1/\sqrt{2\pi}\, m_2$. $f(x)$ a $(-\infty, \infty)$-en van értelmezve. A rekurzív formula használhatóságának feltételei nyilván teljesülnek.

58. Ha (statisztikai adatok szerint) annak a vsz.-e, hogy valamely családban ikerszületéskor mindkét gyermek fiú, 0,32, s azé, hogy mindkettő leány, 0,28, mekkorák lesznek itt a k. e.-k a fiú-fiú, fiú-lány, lány-lány események közt?

Megoldás. Legyen A: (az első iker fiú); B: (a második iker fiú) ($AB \neq 0$, A és B nem függetlenek !). Ekkor feltételeink alapján $\mathrm{P}(AB) = 0{,}32$, $\mathrm{P}(\bar{A}\bar{B}) = 0{,}28$. A k. e.-hoz szükségünk van még $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(\bar{A})$, $\mathrm{P}(\bar{B})$-ra. Az $(A + \bar{A})(B + \bar{B}) = I$ azonosságot kiszorozva, az egyes tagok egymást kizárják, és így $\mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\bar{A}B) + \mathrm{P}(A\bar{B}) + \mathrm{P}(\bar{A}\bar{B}) = 1$. Magától értetődik feltenni, hogy $\mathrm{P}(A\bar{B}) = \mathrm{P}(\bar{A}B)$; akkor adatainkból $\mathrm{P}(AB) = 0{,}20$. Továbbá $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\bar{B})$; utóbbiakat ismerjük, s így $\mathrm{P}(A) = 0{,}52$. Hasonló meggondolással $\mathrm{P}(B) = 0{,}52$. Ezzel a k. e.-khoz szükséges minden adatunk megvan már; a k. e. formulájába behelyettesítve a keresett k. e.-k végül is: $\mathrm{R}(A, B) = 0{,}1987$, $\mathrm{R}(\bar{A}, \bar{B}) = 0{,}1987$, $\mathrm{R}(A, \bar{B}) = \mathrm{R}(\bar{A}, B) = -0{,}1987$, vagyis az egyes események nem tekinthetők függetleneknek.

59. Számítsuk ki a (ξ, η) **kétdimenziós normális eloszlású vsz. vektor komponenseinek k. e.-ját.**

Megoldás. Vegyük fel az általános kétdimenziós normális s. f.-t,

$$f(x, y) = D \exp\{-[A(x - M_1)^2 + 2B(x - M_1)(y - M_2) + C(y - M_2)^2]\}$$

($D = \sqrt{AC - B^2}/2\pi$) alakban. A k. e.-ban szereplő integrálokat ismert típusúakra hozhatjuk és kiszámíthatjuk; végül is az

$$R(\xi, \eta) = -B/\sqrt{AC}$$

értéket kapjuk. Ha a m_1, m_2 v. é. és σ_1, σ_2 sz. n.-eket feltüntető

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$$

alakot használjuk, $\quad R(\xi, \eta) = r$

lesz. Látjuk, hogy $B = 0$ (vagy $r = 0$) esetén, amidőn tehát ξ és η korrelálatlanok, $f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$ alakúvá lesz, vagyis ξ és η függetlenek. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy ha a (ξ, η) vsz. vektorváltozóra sok adatunk van, és az ezekből (v. é.-ek közelítő kiszámítására visszavezetve) számított k. e.-közelítő érték ≈ 0, valamint feltehető, hogy (ξ, η) s. f.-e normális, jó közelítéssel mondhatjuk, hogy ξ és η függetlenek. ($R(\xi, \eta) \neq 0$ viszont bizonyos fokig a függőség mértékének tekinthető.)

60. Határozzuk meg egy (ξ, η) kétdimenziós normális eloszlású vsz. vektor komponenseihez rendelhető regressziós görbék, illetve egyenesek egyenleteit.

Megoldás. Legyen (ξ, η) s. f.-e

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left\{\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\varrho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

(m_1, m_2, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, ϱ konst; $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$) alakú. A regressziós egyenesek egyenleteit úgy kapjuk meg, hogy $\xi = x$, illetve $\eta = y$ feltétel mellett kiszámítjuk η, ill. ξ v. é.-ét. Ehhez szükség van η, illetve ξ $g(y|x)$, ill. $h(x|y)$ feltételes s. f.-eire.

Ezeket a $g(y|x) = f(x, y)/\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$ stb. összefüggések segítségével kiszámítva s azután a v. é.-eket kiszámítva, végül is a regressziós görbékre a következő egyenleteket kapjuk: $(y - m_2)/\sigma_2 = \varrho\,[(x - m_1)/\sigma_1]$, illetve $(y - m_2)/\sigma_2 = (1/\varrho)\,[(x - m_1)/\sigma_1]$. A 7. § 55., illetve 59. pl. adatait felhasználva, $M(\xi) = m_1$, $M(\eta) = m_2$, $D^2(\xi) = \sigma_1^2$, $D^2(\eta) = \sigma_2^2$, $R(\xi, \eta) = \varrho$, a regressziós egyenesekre ugyanezeket az egyenleteket kapjuk. — Ha tehát két vsz. v. együttes s. f.-e kétdimenziós normális s. f., a vsz. v.-khoz tartozó regressziós görbék azonosak a regressziós egyenesekkel. — Az origót az (m_1, m_2) pontba tolva el, az így kapott új (x^*, y^*) koordinátarendszerben az előbbiekben szereplő eset regressziós egyenesei egyenleteinek alakja $y^* = \varrho\, x^*$, illetve $y^* = (1/\varrho)\, x^*$ lesz. — Érdekes geometriai értelmezést adhatunk ezeknek: Ha az (x^*, y^*) koordinátarendszerben $f(x, y)$-nak valamilyen $g(x^*, y^*)$ függvény felel meg, (könnyen kimutathatóan) a $g(x^*, y^*) = C$ (konst) görbék ellipszisek, amelyek középpontja az origóban van. Tekintsük a $C = 0$-hoz tartozó ellipszist. Kimutatható, hogy ezen ellipszisnek az x^*, illetve y^* tengellyel párhuzamos érintői érintési pontjaiból az origóba húzott egyenesek épp a fenti regressziós egyenesek. — Ha tehát ϱ abszolút értékben nagy, és így a két egyenes kis szöget zár be egymással, az említett ellipszis hosszú és keskeny. Következésképp a $C \neq 0$ értékekhez tartozók is ilyenek; az egész

s. f. felület tehát oldalról lapított, ami azt jelenti, hogy ha az egyik vsz. v. értéke erősen a $C = 0$-hoz tartozó ellipszis nagy tengelye vége felé fekszik, a másik vsz. v. értéke csak aránylag kis határok közt mozoghat; normális együttes s. f.-ű vsz. v. esetén tehát a hozzájuk tartozó k. e. abszolút értékben nagy voltából az következik, hogy a két vsz. v. között igen erős a kapcsolat (bár csak sztohasztikus). — Ez már a k. e.-nál is említettük; most szemléletes, kvalitatív bizonyítását is láthatjuk.

61. 330 db három-négy éves fenyőfa magasságára (η) és csúcshajtásának hosszára (ξ) vonatkozó 330 mérés eredményeit a következő táblázat mutatja: az egységek feltüntetését mellőztük; a mérési eredmények tabellázási módja tipikus!):

η \ ξ		(0,5, 4,5]	(4,5, 8,5]	(8,5, 12,5]	(12,5, 16,5]	(16,5, 20,5]	(20,5, 24,5]	(24,5, 28,5]	
		intervallumba esik							
(0,5, 10,5]	intervallumba esik	5	3						5,5
(10,5, 20,5]		7	15	1	2				15,5
(20,5, 30,5]		2	21	17	2				25,5
(30,5, 40,5]			15	37	20	3			35,5
(40,5, 50,5]			1	31	26	4			45,5
(50,5, 60,5]			2	8	27	12	1		55,5
(60,5, 70,5]				2	9	24	4	2	65,5
(70,5, 80,5]				1	4	7	6	2	75,5
(80,5, 90,5]					1		3		85,5
(90,5, 100,5]							1	2	95,5
		2,5	6,5	10,5	14,5	18,5	22,5	26,5	x_i \ y_k

mérés a 330-ból. ξ, η vsz. v.-k; ezzel a táblázattal tulajdonképp (ξ, η) kétdimenziós $f(x, y)$ s. f.-e felületét adjuk meg közelítőleg. Ha tudniillik ξ egyes $(a_i, b_i]$ intervallumainak közepét x_i ($i = 1, \ldots, 7$), η egyes $(A_k, B_k]$ intervallumainak közepét y_k ($k = 1, \ldots, 10$) jelöli, továbbá $b_i - a_i \equiv \Delta x_i$, $B_k - A_k \equiv \Delta y_k$, és az i-edik oszlop és k-adik sor metszéspontjában az m_{ik} érték áll, a vsz. és relatív gyakoriság kapcsolata alapján $f(x_i, y_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_k \approx m_{ik}/330$, vagyis a Δx_i, Δy_k oldalakkal bíró paralelogramma fölé $m_{ik}/330$ magassággal szerkesztett hasáb fedőlapja „megközelíti" az $f(x, y)$ felületet az x_i, y_k pont környezetében [$f(x, y)$ explicit alakját adataink alapján persze nem tudjuk megmondani]. Az előbbi összefüggés alapján minden olyan kifejezésnél, amelyben $f(x, y)$ integráljel alatt áll, a szereplő integrál közelítő Riemann-féle összege az m_{ik}-k segítségével kifejezhető. — Ezek alapján határozzuk meg (közelítőleg) a ξ-hez és η-hoz tartozó regressziós egyeneseket és értelmezzük eredményeinket.

Megoldás. Esetünkben $\Delta x_i = 4$, $\Delta y_k = 10$ (tetszőleges i, k-ra). Hasonló feladatokban is arra törekszünk, hogy $\Delta x_i = h$ (const) és $\Delta y_k = l$ (const) legyen, mert akkor a következő, a számolást leegyszerűsítő eljárással élhetünk: Keressük ki az x_i, illetve y_k sorozatában a középső, illetve ehhez legközelebbi tagot; legyen ez x_0, illetve y_0. ξ és η helyett vezessük be a $\xi^* = (\xi - x_0)/h$, $\eta^* = (\eta - y_0)/l$ új vsz. v.-kat. Ekkor a ξ, illetve η x_i, illetve y_k értékei olyan x_i^*, illetve y_k^* értékekbe mennek át, amelyek 0 körül elhelyezkedő kis pozitív vagy negatív egész számok [(x_i^*, y_k^*)-hoz ugyanaz az m_{ik} tartozik, mint (x_i, y_k)-hoz; a h, illetve l-nek pedig egyaránt 1 felel meg]. Feladatunk megoldásához lényegében véve az $\mathbf{M}(\xi)$, $\mathbf{M}(\eta)$, $\mathbf{M}(\xi\eta)$, $\mathbf{M}(\xi^2)$, $\mathbf{M}(\eta^2)$

v. é.-keket kell adataink alapján (közelítőleg) kiszámítanunk. Ezek azonban egyszerű összefüggésben állanak $M(\xi^*)$ stb.-vel [pl. $M(\xi) = h \cdot M(\xi^*) + x_0$ és így tovább], ez utóbbiakat pedig — az integrálokat közelítő Riemann-féle összegekkel pótolva, vagyis az m_{ik}-ok segítségével — az említett transzformáció elvégzése után igen könnyű kiszámítani, hisz csupa egész számmal kell csak dolgoznunk. — Írjuk fel tehát esetünkben az x_i^*, y_k^* értékek táblázatát, x_0-nak 14,5-et, y_0-nak 45,5-et, h-nak 4-et és l-nek 10-et véve:

$y_k^* \backslash x_i^*$	−3	−2	−1	0	1	2	3
−4	5	3					
−3	7	15	1	2			
−2	2	21	17	2			
−1		15	37	20	3		
0		1	31	26	4		
1		2	8	27	12	1	
2			2	9	24	4	2
3			1	4	7	6	2
4				1		3	
5						1	2

Mint vártuk is, x_i^* és y_k^* értékei 0, illetve kis (pozitív vagy negatív) egész számok. Számítsuk ki ezekkel $M(\xi^*)$ stb. közelítő értékét azon az alapon, hogy pl. $M(\xi^*) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1}^{7}\sum_{k=1}^{10} x_i^* f(x_i^*, y_k^*)\,\Delta x_i^*\,\Delta y_k^*$ ($\Delta x_i^*, \Delta y_k^*$ itt a közelítő Riemann-féle összeg képzésénél az integrálás tartományát felosztó paralellogrammák oldalhosszai). De ez a mondottak értelmében $\approx \sum_{i=1}^{7}\sum_{k=1}^{10} x_i^* (m_{ik}/330)$. Hasonlóan közelíthetők a többi v. é.-ek. A végeredmények: $M(\xi^*) \approx -0{,}47$, $M(\eta^*) \approx -0{,}13$, $M(\xi^{*2}) = 3{,}42$, $M(\eta^{*2}) = 1{,}86$, $M(\xi^*\eta^*) = 1{,}95$ és $R(\xi^*, \eta^*) \approx 0{,}83$. $D^2(\xi^*)$, $D^2(\eta^*)$ ezekből kiszámítható. A * nélküli vsz. v.-kra szóló egyes jellemzőket az $M(\xi) = h\,M(\xi^*) + x_0$, $M(\eta) = l\,M(\eta^*) + y_0$, $D^2(\xi) = h^2\,D^2(\xi^*)$, $D^2(\eta) = l^2\,D^2(\eta^*)$; $R(\xi, \eta) = R(\xi^*, \eta^*)$ nyilvánvaló összefüggések alapján számíthatjuk ki; ezek értékeivel végül is a regressziós egyenesek egyenletei: $y = 2{,}97\,x + 6{,}77$, illetve $y = 4{,}35\,x - 10{,}56$. A ξ és η egymásnak megfelelő értékeivel egy (x, y) koordinátarendszerben megadott pontok tehát nagyjából ezen egyenesek mentén helyezkednek el; az egyenesek elég kis szöget zárnak be egymással, hisz a k. e. elég nagy. Mindez megegyezésben van azzal, hogy a ξ és η-ra szóló adatok (a táblázatból jól látható) egy oldalról eléggé ellaposodó s. f. felületet határoznak meg, vagyis ξ értékei eléggé megkötik η értékét; „a ξ és η közti korreláció erős", és összefüggésük durván lineáris. (Azt is látjuk, hogy ξ és η egyazon értelemben változnak). A jelen példában persze sok a közelítés; eredményeit is így kell értékelni; ha több adatunk volna, sokkal megbízhatóbb tájékoztatást meríthetnénk belőlük. Ha lehet, mindig is nagyobb adatkészlettel igyekszünk dolgozni: szükséges terjedelméről a matematikai statisztika eszközeivel kaphatunk tájékoztatást.

8. §. A NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYEI

a) **A valószínűség és relatív gyakoriság kapcsolata**

A 2. §-ban sokszor volt szó arról, hogy ha egy kísérletet tekintünk, amelynek kimenetelei véletlen események $(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$, az e kísérlet megismétléseiből álló kísérletsorozatban (pl. pénzdobálás és a leeső oldal megfigyelése) valamelyik A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ esemény (pl. „fej") felléptének relatív gyakorisága tapasztalat szerint hosszú kísérletsorozatnál egy számérték körül ingadozik, amelyet a vizsgált esemény vsz.-ének nevezünk el. Ott azonban csak kvalitatíve jellemeztük ezt a tényt. Ebben a fejezetben pontosabban meg fogjuk mondani, milyen ez az ingadozás.

Ehhez a következőket vesszük figyelembe:

A tapasztalat alapján a 2. §-ban kimondtuk posztulátumként: ha egy kísérlet egyik kimenetelét képviselő E véletlen esemény bizonyos elemi eseményekből van összetéve, és az utóbbiak vsz.-ei ismeretében kiszámítjuk E vsz.-ét (legyen ez p), akkor a kísérlet megismétléseivel létesített kísérletsorozatban E relatív gyakorisága p körül fog ingadozni.

Ha tehát p-re pl. közel 0-t kapunk, posztulátumunk alapján E relatív gyakoriságára is 0-hoz közeli értéket várunk, vagyis azt várjuk, hogy kísérletsorozatunkban túlnyomórészt nem fog fellépni a szóban forgó esemény.

Ezt a „túlnyomórészt" fogalmat akarjuk tisztázni. Ehhez **újabb tapasztalati tényeket** használunk fel:

Sok olyan véletlen esemény van, amelynek relatív gyakorisága annak a kísérletnek, amelynek következménye lehet, akárhányszori (de legalább néhány 10) megismétléséből álló kísérletsorozatban *megadott* ω-nál kisebb, vagy vele egyenlő. Ha ω igen kicsi, ez azt jelenti, hogy az esemény igen kis kivétellel a kísérlet (említett sorozatbeli) egyik megismétlésekor sem következik be.

Miután az előbbiekben említett jelenségre számos adat van, jogosult természeti törvényként fogni fel, és ennek következtében posztulálni, hogy ha bizonyos kísérletszámig fennállását tapasztaltuk, a kísérletszám további növelésekor is tapasztalnánk fennállását.

Mivel általában az a döntő, mi a helyzet a megismételt kísérletek javarészénél, *megállapodnak abban, hogy ha a relatív gyakoriság bizonyos igen kis, a kísérlettől független fix* ω_0*-nál is kisebb (vagy vele egyenlő), az eseményt úgy kezelik, mintha egyáltalán nem is következne be sohase (bár elvileg nem lehetetlen — az esetleges igen ritka előfordulásokat lényegtelennek minősítik). Ekkor az eseményt a* **gyakorlatilag lehetetlennek** *nevezik. (Ezt — posztulátumunk értelmében — a kísérletsorozat tetszőleges, még nem vizsgált meghosszabbításaira is vonatkoztatjuk.)*

ω_0-t a vizsgált esemény körülményeinek ismeretében *mi* állapítjuk meg, tudva azt, hogy a szóban forgó kísérlet szempontjából mit jelent az esemény ilyen és ilyen százalékban való bekövetkezése. Persze *„kvalitatív"* támpontok vannak; ha az esemény nem kívánatos, $\omega_0 = 0$ volna az ideális; máskor véges értékeket is elfogadhatónak tartunk. A gyakorlat persze egyes ω_0-kat „kiemel".

Találunk sok olyan véletlen **összetett** *eseményt is, amelynek a fent említettekhez hasonló körülmények között megállapított relatív gyakorisága kisebb a „gyakorlatilag lehetetlen"-t definiáló ω_0-nál,* **ugyanakkor** *pedig vsz.-ének az őt alkotó elemi események vsz.-ei ismeretében kiszámított értéke,* illetőleg, ha ugyanezen elemi események vsz.-eit csak közelítőleg (korlátok közé szorítva) adhatjuk meg, vsz.-e értékének ezen korlátok segítségével kiszámított felső korlátja *bizonyos igen kis ε_0 alatt marad, úgy, hogy ω_0 már meghatározza az ε_0-t, vagyis az esemény „gyakorlatilag lehetetlen" volta azzal is jár, hogy vsz.-e $< \varepsilon_0$.*

Minthogy a relatív gyakoriság korlátosságát, illetve ω_0 és ε_0 említett összefüggését nagyon sokszor tapasztaljuk, jogosultnak látszik az előbbieket megfordítani, és „természeti törvényként" **posztulálni** a következőket:

1. *A szóban forgó véletlen összetett eseményeknek az őket felmutató kísérletsorozatban megfigyelt relatív gyakoriságaik korlátosságát (tehát korlátjuknak vsz.-ükkel való kapcsolatát is) akkor is tapasztalnánk, ha újabb (még meg nem figyelt) kísérletsorozatokat vennénk vizsgálat alá.* 2. *Ha egy véletlen összetett esemény p vsz.-éről (a fentebb említett körülmények mellett) megállapítjuk, hogy $p < \varepsilon_0$, az eseményt „gyakorlatilag lehetetlennek" tekinthetjük (bármely kísérletsorozatra vonatkoztatva, amelyben felléphet).*

Ez a posztuláló felfogás — elmélet és tapasztalat kapcsolatáról lévén szó — elengedhetetlen és jogosított (vö. 2. §). Ha azonban ellenpéldákat találnánk, posztulátumainkat okvetlen meg kellene változtatnunk.

A gyakorlat által kiemelt ω_0-knak megfelelően természetesen különböző ε_0-k lehetnek használatban; a körülmények szerint értelmez (posztulátumunk értelmében) egyik vagy másik „gyakorlatilag lehetetlen"-t. Mindig előzetesen meg kell állapodni abban, melyiket választjuk.

Előfordulnak olyan esetek is, hogy valamely esemény kísérletsorozatbeli vizsgálatakor $\omega_0 = 0$ adódik, az esemény vsz.-e azonban $\leqq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Posztulátumaink alapján az ilyen esetekből kapott ε-t úgy kell tekintenünk, hogy ha egy esemény vsz.-e $\leqq \varepsilon$, az egyetlenegy kísérletben sem fog bekövetkezni, bár eleve nem lehetetlen. Ez kicsit önkényes kijelentésnek látszik; az egész azonban nem jelentős, mert a gyakorlatban használt ε_0-kat kísérletsorozatban nem zérus relatív gyakorisággal fellépő események vsz.-ei alapján rögzítették. Egyes kiszámított vsz.-eket mindig az utóbbi ε_0-khoz viszonyítunk; gyakorlati lehetetlenségük akkor csak annyit jelent, hogy alkalmas kísérletsorozatban igen ritkán lépnek fel. *Ennek következtében persze egyetlen kísérletre szóló kijelentést általános esetben tulajdonképp nem is tehetünk.*

A gyakorlatban használt különböző ε_0-khoz különböző ω_0-k tartoznak; ezek pontos értelmezését azonban általában nem használják fel, megelégszenek az „igen kis relatív gyakoriság" kvalitatív fogalmával is, amelyet aztán valamelyik ε_0-hoz kapcsolnak. Persze ideális az volna, ha minél többször támaszkodhatnánk a legkisebb használt ε_0-ra ($= \varepsilon_{\min}$); pl. sok olyan eset van, amidőn valamilyen kísérletből származható esemény vsz.-ének $\leqq \varepsilon_{\min}$ voltából pontos következtetések adódnának, a valóságban azonban nem tudjuk ezt a kísérletet úgy megszervezni, hogy az egyéb feltételek alapján számított vagy becsült vsz. a kívánt korlát alá kerüljön.

Ismételten rámutatunk, hogy az ω_0-ra, illetve ε_0-ra szóló megállapodások *nem egyetlen kísérlet eredményét kötik meg* (pl. nem arról van szó, hogy ha selejtes készítmény készülése vsz.-ét ismerjük, ennek alapján azt mondjuk meg, hogy egyetlen készítmény jó vagy rossz lesz-e, csak olyan kijelentést kívánunk, hogy sok közt pl. $\approx 0{,}1\%$ lesz rossz).

Milyen ε_0 értékek szerepelnek a valóságban? Pl. nincs adat arra, hogy egy esemény, amelynek vsz.-ére 10^{-6}-at számítottunk, több tízezer esetből 1—2-nél többször bekövetkezett volna; ha ezt a tényt nevezzük „gyakorlatilag lehetetlennek", mondható, hogy bármely $\leqq 10^{-6}$ vsz.-ű esemény „gyakorlatilag lehetetlen". — Azt sejtjük, hogy egy esemény, amelynek vsz.-ére az előbbi számértékhez relatíve közeli 10^{-5} jött ki, ugyancsak az előbbi értelemben „gyakorlatilag lehetetlen" (ezt a tapasztalat igazolja is). Úgy látszik tehát, hogy a korlát „lazítható". Ezt a „lazítást" persze nem folytathatjuk korlátlanul; pl. 10^{-2} és jóval nagyobb vsz.-ű események előbbi értelemben vett „gyakorlati lehetetlenségét" már csak akkor mondhatnánk ki, ha kísérletileg külön ellenőriznénk (vagy ha másképp definiálnánk a „gyakorlatilag lehetetlen"-t).

Példa: Az 1925 körüli években Magyarországon a fiúszületések relatív gyakorisága 0,51 és 0,516 közt ingadozott. Az egyes születések nyilván független események; még ha a fiúszületés vsz.-ére széles határokat engedünk is meg, annak a vsz.-e, hogy pl. 1925-ben valamely klinikán egy hét alatt született — mondjuk 40 — újszülött fiú legyen, rendkívül kicsi ($\approx 2^{-40}$). Ilyen kis vsz.-ű eseményt annak alapján, hogy még jóval nagyobb vsz.-ű események (l. előbb !) is csak igen ritkán következtek be, az előző bekezdésben (a 10^{-6}-vsz.-gel kapcsolatban) definiált értelemben „gyakorlatilag lehetetlennek" kell minősítenünk; valóban 1925-ben vagy máskor is legfeljebb igen kis százalékban következett be. Ezt a tényt az előzmények alapján nyugodtan „extrapoláljuk" a jövőre is mint „természeti törvényt" (ezt az eljárást fejezte ki egyik fenti posztulátum). Ha az ellenőrzést a jövőben is elvégezzük, és ugyanaz az eredménye, ezzel egyúttal „extrapolálásunk" jogosultságát (= posztulátumunkat) is támogatjuk.

Egyéb vsz. értékek esetén mindig ahhoz mérjük megállapításainkat, mit értünk „gyakorlatilag lehetetlenen". Pl. Egy napon született 4—5 újszülött esetén már nem lesz ily közel 0-hoz annak a vsz.-e, hogy mind fiú lesz. Utóbbi esemény tehát nem mondható az előbbi értelemben „gyakorlatilag lehetetlennek". *Attól függően, milyen vsz. értékhez rendeltük a „gyakorlatilag lehetetlent", minősítjük a szóban forgó eseményt „gyakorlatilag lehetetlennek" vagy ellenkezőjének.*

Az eddig elmondottakkal a háttérben alakult ki az a gyakran használt meggondolás, hogy 0-hoz igen közeli vsz.-ű eseményt (a vsz. bármiféle ε_0 korláttól való összehasonlításától függetlenül) igen ritkán előfordulónak tekintenek, valamint az, hogy két esemény közül a nagyobb vsz.-űt, „várják inkább".

Egy gyakorlatilag lehetetlen esemény ellentettjét „**gyakorlatilag biztosnak**" mondjuk. (Ennek vsz.-e tehát általában ≈ 1.) Ezt a „gyakorlatilag lehetetlen" definiálása után nem kell külön értelmeznünk, mert levezethető az előbbiből.

Természetesen a „gyakorlatilag biztos"-sal kapcsolatban is különféle vsz. korlátokban állapodnak meg; adott esetben azt nézzük, egy ilyen korlát felett lesz-e a kiszámított vsz.

Megemlítjük, hogy *elterjedt megállapodás egy eseményt „gyakorlatilag lehetetlennek" mondani, ha vsz.-e* $< 0{,}0027$ (*itt tehát* $\varepsilon_0 = 0{,}0027$) — *vagyis „gyakorlatilag biztosnak" mondani egy eseményt, ha vsz.-e* $\geqq 0{,}9973$ („gyakorlatilag lehetetlenen" itt azt értve, hogy az esemény bármely szóba jövő szempontból lényegtelen számban következik be megfelelő kísérletsorozatban).

A 0, illetve 1-hez igen közeli vsz.-ű eseményeknek fontos szerepe lesz a következőkben, ahol segítségükkel tudjuk majd pontosabban megvilágítani, hogyan értsük a relatív gyakoriság ingadozását a vsz. körül — és hasonló kijelentéseket.

b) **Sztohasztikus konvergencia**

A következők matematikai leírásához a következő definíciót vezetjük be:

Azt mondjuk, hogy *az* $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ *vsz. v. sorozat* **sztohasztikusan konvergál** *a* p *határértékhez, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\eta_n - p| > \varepsilon) = 0,$$

vagy ami ugyanaz,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\eta_n - p| \leqq \varepsilon) = 1.$$

Mivel ez másképp azt jelenti, hogy elég nagy n-nél az itt szereplő vsz. megadott δ esetén is $1 - \delta$ felett lesz, bármilyen „gyakorlatilag biztos" korlát mellett is ebben az esetben azt mondhatjuk: elég nagy n-nél (előre rögzített értelemben) *„gyakorlatilag biztos"*, hogy

$$|\eta_n - p| \leqq \varepsilon$$

c) **Csebisev-egyenlőtlenség**

Az alábbi tételek jórészt az ún. CSEBISEV*-féle egyenlőtlenségen, illetve annak élesítésén alapulnak:

Legyen ξ tetszőleges vsz. v. $\mathbf{M}(\xi)$ és $\mathbf{D}(\xi)$ v. é.-kel, illetve sz.-sal. *Ha* λ *tetszőleges, 1-nél nagyobb szám, akkor*

$$\mathbf{P}[|\xi - \mathbf{M}(\xi)| \geqq \lambda\, \mathbf{D}(\xi)] \leqq 1/\lambda^2.$$

Függetlenül attól, hogy más tételek bizonyításához is felhasználjuk, a CSEBISEV-féle egyenlőtlenség arra is felhasználható, hogy tetszőleges eloszlású vsz. v. egyes megfigyelhető értékei és v. é.-e eltérését csupán a v. é. és sz. (*kb.-i*) ismeretében — *tehát e. f.-e ismerete nélkül* — megbecsülhessük. Ilyen eset (v. é., sz. kb. ismert, de az e. f. nem) sok vizsgálatban előfordul.

d) **A nagy számok törvényei**

Az előbbi meggondolások alapján több olyan tételt mondhatunk ki, amelyek vsz. v.-k aritmetikai közepe és v. é.-ei közti sztohasztikus konvergenciára vonatkoznak. Ezeket **a nagy számok törvényeinek** hívjuk, és speciális eseteik kritériumokat szolgáltatnak arra, mit lehet mondani egy esemény vsz.-éről relatív gyakorisága ismeretében.

A nagy számok törvényének MARKOV-féle** alakja a következő (a CSEBISEV-féle egyenlőtlenségen alapuló bizonyítását itt nem közöljük):

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ *páronként független vsz. v.-k, létezzék* $\mathbf{M}(\xi_k)$ *és* $\mathbf{D}(\xi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *és teljesüljenek a következő feltételek:*

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{M}(\xi_1) + \ldots + \mathbf{M}(\xi_n)}{n} = M$$

létezik és véges.

* *Pafnutij Lvovics Csebisev* (1821—1894) orosz matematikus.
** *Andrej Andrejevics Markov* (1856—1922) orosz matematikus.

$$2.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\mathbf{D}^2(\xi_1) + \ldots + \mathbf{D}^2(\xi_n)}}{n} = 0$$

Ekkor $\zeta_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$ *sztohasztikusan konvergál M-hez.*

A korábbiak értelmében a tétel kapcsán azt várjuk, hogy nagyszámú vsz. v.-ra vonatkozó átlag, (valamilyen értelemben) „gyakorlatilag biztosan" egyezni fog egy v. é.-kel. Ez a tétel alábbi speciális eseteire is vonatkozik.

A tétel számunkra legfontosabb speciális esete a következő:

Vizsgáljunk egy egyszerű alternatívát mutató kísérletet (pénzdobálás), amelynek eredménye vagy az E, vagy az $\bar{E}$ esemény. Ismételjük meg a kísérletet; egyszerűség kedvéért eredményeik legyenek függetlenek; jellemezze az i-edik ($i = 1, 2, \ldots$) kísérlet eredményét a ξ_i vsz. v., és legyen $\xi_i = 1$ (illetve 0), ha E (illetve $\bar{E}$) következett be. Legyen $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_i = 0) = q = 1 - p$, és következzék be E n közül k-szor. Ekkor, mint tudjuk, $\mathbf{M}(\xi_i) = p$, $\mathbf{D}(\xi_i) = \sqrt{pq}$, és tételünk alkalmazható, mert a ξ_i-k páronként mindenképp függetlenek, és a 2. alatti limesz fennáll. Mivel a tételben szereplő $\zeta_n = k/n$ és $M = p$, azt kapjuk, hogy k/n sztohasztikusan konvergál p-hez; másképp:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \text{(tetszőleges } \varepsilon\text{-ra)}$$

azaz: (a lim értelmezéséből következőleg) mindig van olyan N szám, hogy ha $n \geqq N$ számú kísérletet végzünk el, egy esemény (megadott értelemben) „gyakorlatilag biztos" (azaz: bizonyos δ_0-nál nagyobb a vsz.-e, hogy ezen esemény kísérletsorozatbeli relatív gyakorisága és vsz.-ének eltérése abszolút értékben előre megadott kis ε mennyiségnél kisebb lesz).

Utóbbi tételt először Jakob Bernoulli bizonyította be (nyomtatásban csak halála után, 1713-ban jelent meg). Ez a tétel korszakalkotó a vsz. számítás történetében. Ebben szerepelt először a „gyakorlatilag biztos" fogalom mint természettudományi vizsgálatok jellemzője, szemben azzal a fennálló természettudományos tárgyalásmóddal, amely csak abszolút érvényességű kijelentésekkel foglalkozott.

e) **Valószínűségek gyakorlati megállapítása**

Mivel bármely kísérlet megismétlése egyszerű alternatívát képez, ha csak egyetlen kimenetelét vesszük figyelembe, az előző tétel (egyik) lehetőségét adja meg annak, hogyan állapíthatjuk meg tetszőleges sokszor megismétlődhető esemény vsz.-ét: A tétel szerint van olyan N szám, hogy az esemény megfigyelése céljából végzett kísérlet $n \geqq N$ számú független megismétlésénél 1-hez megadottan közel lesz annak a vsz.-e, hogy az esemény k/n relatív gyakorisága és p vsz.-ének abszolút értékben vett eltérése kisebb előre megadott ε-nál. Ha tehát ezen n-szer ismételnénk meg (függetlenül) a kísérletet, (korábbi megállapodásaink értelmében) „gyakorlatilag biztos" lenne, hogy a relatív gyakoriság és a vsz. eltérése ebben a kísérletsorozatban $< \varepsilon$, amiből — bizonyos vsz.-gel — már következtethetnénk a vsz. keresett értékére.

A tétel közölt alakja alapján azonban még nem mondhatjuk meg, hányszor kell megismételni a kísérletet ahhoz, hogy adott ε-nál a vsz. kijelölt δ-val térjen el 1-től. Erre tájékoztatást pl. a Csebisev-féle egyenlőtlenség (vagy a később megvizsgálandó Moivre–Laplace-féle tétel) felhasználásával kaphatunk, ha ezt a fenti ξ_n-ekre alkalmazzuk (l. pl. 8. § 5. fel.).

Természetesen a kísérlet megismétlései pótolhatók azzal, hogy egyszerre nagy számban valósítjuk meg ugyanazt a kísérletet (ha ez lehetséges). Ez a későbbiekben is szem előtt tartandó!

A nagy számok törvényére hivatkozva szoktak tenni ilyen megállapításokat: „Ha nagyszámú (n) egyedből álló sokaságnál p annak a vsz.-e, hogy találomra kivett egyed bizonyos tulajdonsággal rendelkezik, az egész sokaságban »gyakorlatilag biztosan« $np = k$ számú ilyen tulajdonságú egyed lesz." Ennek az áll a hátterében, hogy az egyes egyedek állapotának megfigyelését a sokaság homogén volta folytán egy kísérlet (független) megismétlésének, a tulajdonság mutatkozását, illetve hiányát egyszerű alternatívának fogják fel. Az idézett kijelentés azonban nem egészen magától értetődő, mert a nagy számok törvénye csak egy esemény k/n relatív gyakorisága és p vsz.-e különbségére mond ki (megadott értelemben) „gyakorlatilag biztos" megállapítást egy bizonyos kísérletsorozaton belül, $|k/n - p| < \varepsilon$ „gyakorlatilag biztos" voltából azonban csak az következik, hogy $|k - np| < n\varepsilon$ („gyakorlatilag biztosan"), $n\varepsilon$ azonban esetleg nagy is lehet, s így az említett kijelentéssel óvatosnak kell lenni, hisz np és k eltérése esetleg nagy is lehet.

f) **Bernstejn-féle egyenlőtlenség**

A CSEBISEV-féle egyenlőtlenség durva becslést ad, ha azt kell eldöntenünk, hány kísérletet végezzünk egy esemény vsz.-ének bizonyos vsz.-gel történő, előírt pontos megállapításához. Jobb becslést nyújt S. BERNSTEJN* következő tétele:

Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *vsz. v.-k összességükben függetlenek és korlátos értékűek, valamint* $|\xi_k - \mathrm{M}(\xi_k)| \leqq K$ (konst) $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *végül legyen* $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Ekkor*

$$\mathrm{P}[\,|\xi - \mathrm{M}(\xi)| \geqq \mu\, \mathrm{D}(\xi)\,] \leqq 2 \exp\{-\mu^2/2\ [1 + \mu K/2\, \mathrm{D}(\xi)\,]^2\}$$

[$\mu \leqq \mathrm{D}(\xi)/K$; μ egyébként tetszőleges konstans].

Egyszerű alternatíva esetén a fenti jelölésekkel ebből a

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geqq 1 - 2 \cdot \exp\,[-\varepsilon^2\, n/2\, pq\, (1 + \varepsilon/2\, pq)^2\,] \quad (0 < \varepsilon \leqq pq!)$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Ez gyakorlati követelményeknek már jól megfelel, ti. ebből azonnal következik hogy ha legalább

$$n_0\,(\varepsilon, \delta) = (9/8\, \varepsilon^2) \log (2/\delta)$$

kísérletet végzünk, akkor annak a vsz.-e, hogy a gyakoriság és vsz. eltérése abszolút értékben ε alatt marad, nagyobb $1 - \delta$-nál, vagy egyenlő vele. Ezzel a kritériumot közvetlenül a gyakorlathoz szabott alakra hoztuk.

g) **A nagy számok „erős" törvényei**

A gyakorlatban nem mindig elég azt tudni, hogy bizonyos n-nél valamely esemény kísérletsorozatbeli $k/n \equiv \zeta_n$ relatív gyakorisága és p vsz.-ére $|\zeta_n - p| < \varepsilon$ „gyakorlatilag biztos". Tegyük fel ui., hogy elvégeztük ezt az n kísérletet p meghatározására; „gyakorlatilag biztos" lesz tehát, hogy $p < \varepsilon$ hibával ζ_n. De vehetjük-e p közelítő értékének ζ_n-t? Hátha azonban épp az az eset állt be, hogy $|\zeta_n - p| \geqq \varepsilon$? (A „gyakorlatilag biztos" ezt

* *Szergej Natanovics Bernstejn* (1880—) szovjet matematikus.

megengedi!) Hogyan ellenőrizzük eredményünket? A „gyakorlatilag biztos" értelmezéséből az következnék, hogy újból és újból végigcsináljuk az n tagú kísérletsorozatot, és vesszük ζ_n-t, és sok ilyen ismétlésben ζ_n túlnyomórészt mégis p körül mozogna. Ez azonban gyakorlatilag legtöbbször megvalósíthatatlan. Legkézenfekvőbb és leginkább megvalósítható tovább kísérletezni, és az ekkor kapható ζ_{n+1}, ζ_{n+2}, . . .-t vizsgálni. Mivel az n indexet túlléptük, a nagy számok törvénye megfelelő alakja értelmében $|\zeta_{n+1} - p| < \varepsilon$, $|\zeta_{n+1} - p| < \varepsilon, \ldots$, szintén „gyakorlatilag biztos" lesz ugyan, de itt is felmerül annak a lehetősége, hogy hátha — a „gyakorlatilag biztos" értelmének megfelelően — ezek a mennyiségek is éppen $\geqq \varepsilon$-ok lesznek a kísérletnél? Mi újabb támpontot kaptunk tehát p-re a továbbkísérletezésből? — Erre a nagy számok törvényének felhasznált alakja nem ad támpontot. Gondolható ugyan, hogy az elmondott eset vsz. igen kicsi, de hogy mennyi és hogyan értékeljük az elmondott „rendkívüli" esetet vsz.-e alapján, azt a felhasznált tételből nem mondhatjuk meg, és így kísérleteink kiértékelésével is nehézségeink vannak. (Példa: Tegyük fel, hogy „fej vagy írás" játéknál 2000 dobás közt 1000 „fej" volt, de kétségeink vannak a „fej" $\approx 1/2$ vsz.-ét illetőleg; tovább dobálunk még 2000-szer, és az összes utóbbi dobásokban „fej"-et kapunk; ebből a „fej" vsz.-ére $\approx 3/4$ jönne ki. Ez igen kis vsz.-ű eset, de egyelőre nem tudjuk, hogyan értékeljük igen kis vsz.-ét; azt sem tudjuk, mennyire számítsunk ilyen esetre.)

Az említett esetek, illetve azok általánosításai vsz.-eivel kapcsolatban tesznek megállapításokat a **nagy számok ún. „erős" törvényeinek** nevezett tételek. A. N. KOLMOGOROV egy ilyen tételét ismertetjük:

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — *összességükben független vsz. v.-k, amelyeknek léteznek az* $\mathbf{M}(\xi_n)$ *v. é.-eik és* $\mathbf{D}^2(\xi_n)$ *sz. n.-eik* $(n = 1, 2, \ldots)$, *és tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}^2(\xi_n)/n^2$ *sor konvergens. Legyen továbbá* Δ_N *az* $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(\xi_k) \right|$ $(n \geqq N)$ *számok legkisebb felső korlátja. Ekkor*

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}(\Delta_N < \varepsilon) = 1.$$

Ennek a tételnek az illusztrálása céljából térjünk ismét vissza fentebb vizsgált egyszerű alternatívánkhoz, illetve a tovább folytatott kísérletsorozatok kiértékelésével kapcsolatban mondottakhoz. Utóbbiakat illetőleg A. N. KOLMOGOROV tétele azt jelenti, hogy adott igen kis $\delta > 0$ és $\varepsilon > 0$ mennyiségeknél található olyan N_0 (közelebbi meghatározására itt nem térhetünk ki), hogy ha $N \geqq N_0$, az összes $|\zeta_N - p|$, $|\zeta_{N+1} - p|, \ldots$ értékek közös legkisebb felső korlátja is $1 - \delta$-nál nagyobb vsz.-gel lesz $< \varepsilon$, vagyis azt jelenti (ha $1 - \delta$ „gyakorlatilag biztosat" fejez ki), hogy ha $n \geqq N_0$ kísérletből megállapítjuk ζ_n-t, aztán a kísérletsorozatot tovább folytatva, a folytatásokból kapható ζ_{n+1}, $\zeta_{n+2}, \ldots$-eket, ezekre *mindre* „gyakorlatilag biztosan" fennáll $|\zeta_n - p| < \varepsilon$, $|\zeta_{n+1} - p| < \varepsilon$, $|\zeta_{n+2} - p| < \varepsilon, \ldots$, — vagyis „gyakorlatilag biztos", hogy N_0 kísérletszámon felül a pillanatnyilag meglevőhöz mindig egy újabb kísérletet véve hozzá, az így létesített kísérletsorozatokban a vizsgált esemény relatív gyakorisága legfeljebb ε hibával tér el annak vsz.-étől. Ez más szóval az, hogy $\geqq N_0$ *számú kísérlet esetén „gyakorlatilag biztos", hogy a* ζ_n *relatív gyakoriság konvergál a* p *vsz.-hez.* p fentebb leírt módon tervezett megállapításánál tehát (meghatározott értelemben) „gyakorlatilag biztos", hogy ζ_n és p eltérése nem fog változni kísérletről kísérletre, hanem 0-hoz tart; hogy ez nagy vsz.-gel így van, azt *a nagy számok törvényei ismeretében is sejthettük már, de vsz.-éről csak most kaptunk felvilágosítást.*

Mindezek után jobban alátámasztva látjuk p meghatározásakor azt az eljárást, hogy újabb és újabb kísérletet veszünk az addigiakhoz, és minden ilyen lépésnél megállapítva ζ_n-t, következtetünk ezekből p értékére. Azt mondtuk: jobban alátámasztva — és nem „biztosítva", minthogy a „gyakorlatilag biztos"-ból csak az következik, hogy ha az egész eljárást sokszor megismételnénk, ζ_n általában konvergálna p-hez, de egyes (ritka) esetekben azonban nem. A mondottaknál „biztosabbat" azonban a dolog természeténél fogva nem is várhatunk; legfeljebb a paramétereket lehetne még javítani (erről újabb, itt mellőzendő tételek szólnak). A tapasztalat azt mutatja, hogy a kísérletekből a nagy számok „erős" törvényei értelmében meghatározott vsz. értékek teljesen megfelelnek a gyakorlat igényeinek, sőt legtöbbször még a fenti N_0 küszöbszám pontos megállapítása és betartása sem szükséges, csak „elég sok, — pl. a BERNSTEJN-féle egyenlőtlenség segítségével megállapított számú — kísérlet és az ekkor kapott adatok is még mindig használhatók maradnak a jelenségek leírása szempontjából. Ez az „elég sok" a legtöbb tudományterületen mindig meg is van (pl. ezt képviseli az óriási számú molekula a kinetikus gázelméletben). Az itt megemlített tételeket legtöbbször csak *biztosítékként* fogják fel arra nézve, hogy a vsz.-ek megállapítására szolgáló módszerek használhatók.

Példák és feladatok

1. Említettük, hogy „gyakorlatilag biztos"-nak fogadjuk el többek közt az olyan eseményeket is, amelyek vsz.-e $\geqq 0{,}9973$. Egy normális eloszlású vsz. v.-nak mekkora, v. é. körüli eltérései lesznek ebben az értelemben „gyakorlatilag lehetetlenek"?

Megoldás. Nézhetjük az ellenkező eseményt is: Egy normális eloszlású vsz. v. értéke v. é.-e körül milyen $\pm a$ határokon belül lesz „gyakorlatilag biztosan" ($\geqq 0{,}9973$ vsz.-gel)? Ha a vsz. v. v. é.-e és sz. n.-e m, illetve σ^2, és az m körüli, említett határok $m \pm a$, fenn kell állnia

$$\int_{m-a}^{m+a} \frac{\exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right]}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dx \geqq 0{,}9973, \quad \text{vagyis} \quad \int_{-a/\sigma}^{a/\sigma} \frac{e^{-v^2/2}dv}{\sqrt{2\pi}} \geqq 0{,}9973\text{-nek},$$

vagyis $2\Phi(a/\sigma) - 1 \geqq 0{,}9973$-nek. A $\Phi(x)$ függvény táblázata alapján ebből a/σ jó közelítéssel $\geqq 3$, $a \geqq 3\sigma$, vagyis „gyakorlatilag biztosan" v. é.-e körül a szórás 3-szorosán belül marad egy normális eloszlású vsz.v. értéke. Ez az ún. 3σ-*szabály*. — A valóságban persze a kényelmes 3σ érték volt a kiindulás, miután az ezzel bevezetett határokon belüli értékek már oly vsz.-űek voltak, amilyen vsz.-ű események tapasztalat szerint biztosan bekövetkeznek — és így kínálkozott a 0,9973, mint „gyakorlatilag biztos" bekövetkezést képviselő vsz. bevezetése, az igen kényelmes 3σ érték felhasználásával. A szabály a gyakorlatban jól beválik, ti. nem kell $\Phi(x)$ táblázatot igénybe venni, ha a szabály nyújtotta felső becslést használjuk ki; azonkívül a binomiális eloszlás esetén is jó közelítéssel felhasználható — hisz azt normális s. f.-nyel közelíthetjük. — Például: Legyen ξ, egy biztosíték kiégési áramerőssége, egyszerűség kedvéért $(-\infty, \infty)$-en értelmezett normális eloszlású vsz. v., amelynek (a mérésekből következtetve) v.é.-e ≈ 10 A sz.-a 0,4 A. Hány biztosítékot kell megvizsgálnunk, hogy kiégési áramerősségük átlagértéke $\geqq 0{,}95$ vsz.-gel (nem kell okvetlenül a „biztos" 0,9973-at venni!) $2\,^0/_0$-kal kevesebbet térjen el 10-től? — Ha ξ_i egy megvizsgált darab kiégési értéke, és a ξ_i-k mind egyformán 10 és 0,4 paraméterű normális eloszlású vsz. v.-k $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a $\mathbf{P}[\,|\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n - 10\,| < 0{,}2\,] \geqq 0{,}95$ feltétel-

ből kell n-et meghatároznunk. n-et csak felülbecsülhetjük, ha 0,95 helyett 0,9973-at veszünk; ekkor azonban alkalmazhatjuk a 3σ szabályt; $\xi_1 + \ldots + \xi_n = \xi$-vel, és $n \cdot 10 = \mathrm{M}(\xi)$ folytán a fenti vsz.-gel ekvivalens $\mathrm{P}(|\xi - \mathrm{M}(\xi)| < n \cdot 0{,}2) \geqq 0{,}9973$)-ból a szabály alapján az következik, hogy $n \cdot 0{,}2 \geqq 3\,\mathrm{D}(\xi)$, ami itt $3\sqrt{n}\,\mathrm{D}(\xi_i) = 3\sqrt{n} \cdot 0{,}4$, amiből $n \geqq 36$, vagyis legalább 36 vizsgálat mellett biztosan fennáll a fent előírt eltérés.

Az előbbiek mintájára megadhatjuk általában annak is a $p(k)$ vsz.-ét, hogy egy m v. é.-ű és σ sz.-ú normális eloszlású vsz. v. értéke $m \pm k\sigma$ közé fog esni. Ezt táblázatba is foglalják. Ha mármost megegyeznek abban, hogy „gyakorlatilag biztos"-nak egy $\geqq p(k)$ vsz.-ű eseményt fognak tekinteni, az előző példához hasonló feladatoknál ezen táblázat segítségével is dolgozhatunk. Ha pl. $\geqq p(2)$-t tekintjük a gyakorlatilag biztos kifejezőjének, fenti értelemben beszélhetünk „2σ-*szabályról*" is.

Közlünk egy részletet $p(k)$ táblázatából:

k	1	1,5	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$p(k)$	0,8413	0,9332	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981	0,9987

Ezek szerint a 2σ-szabály a $\geqq 0{,}9772$ vsz.-ű eseményeket tekinti „gyakorlatilag biztosnak". Ez a megállapítás már nehezen fogadható el minden körülmények között. A 20. ábrán a normális s. f.-nél (e. f.-nél) bejelölve láthatunk különböző $k\sigma$ értékeket.

2. Bizonyítsuk be a Csebisev-féle egyenlőtlenséget.

Megoldás. Legyen ξ egy tetszőleges vsz. v. $\mathrm{M}(\xi)$, illetve $\mathrm{D}(\xi)$ v. é.-kel és sz.-sal. $\mathrm{P}[|\xi - \mathrm{M}(\xi)| \geqq \lambda\,\mathrm{D}(\xi)] \leqq 1/\lambda^2$ $(\lambda > 1)$-et kell bebizonyítanunk. Legyen A: $[|\xi - \mathrm{M}(\xi)| \geqq \lambda\,\mathrm{D}(\xi)]$, ekkor $\bar{A}$: $[|\xi - \mathrm{M}(\xi)| < \lambda\,\mathrm{D}(\xi)]$. Képezzük a $[\xi - \mathrm{M}(\xi)]^2$ A és $\bar{A}$ teljes eseményrendszer-elemekkel képezett feltételes v.é.-eivel $\mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}(\xi)]^2$-et (v. ö. a feltételes v.é.-ről mondottakkal). $\mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}(\xi))^2] =$

$$= \mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}(\xi))^2 \,|\, A]\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}(\xi))^2 \,|\, \bar{A}]\,\mathrm{P}(\bar{A}) \geqq \mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}(\xi))^2 \,|\, A] \cdot$$

$\mathrm{P}[|\xi - \mathrm{M}(\xi)| \geqq \lambda\,\mathrm{D}(\xi)]$, mivel az összeg második tagjában pozitív vsz.v. v. é.-e szerepel s az mindig > 0 (az integrál fogalmából következőleg egy $g(\xi)$ vsz. v. v. é.-e

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, dF(x) \geqq 0,$$

ha $g(x) \geqq 0$!). Továbbá $\mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}(\xi))^2 \,|\, A] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mathrm{M}(\xi)]^2\, dF(x \,|\, A)$, ahol $F(x \,|\, A)$ $\xi - \mathrm{M}(\xi)$ feltételes e. f.-e; az A feltevés azonban épp azt jelenti, hogy $|\xi - \mathrm{M}(\xi)| \geqq$ $\geqq \lambda\,\mathrm{D}(\xi)$ vagy $[\xi - \mathrm{M}(\xi)]^2 \geqq \lambda^2\,\mathrm{D}^2(\xi)$, s így ez az integrál $\lambda^2\,\mathrm{D}^2(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dF(x \,|\, A) =$ $= \lambda^2\,\mathrm{D}^2(\xi)$. Végül tehát $\mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}(\xi))^2] = \mathrm{D}^2(\xi) \geqq \lambda^2\,\mathrm{D}^2(\xi)\,\mathrm{P}[|\xi - \mathrm{M}(\xi)| \geqq \lambda\,\mathrm{D}(\xi)]$, amiből tételünk már következik.

3. Alkalmazzuk a Csebisev-féle egyenlőtlenséget olyan (független kísérletekből álló) kísérletsorozatra, ahol minden alkalommal az A vagy $\bar{A}$ esemény léphet csak fel, és $\mathrm{P}(A) = p$ (vagyis n kísérletnél A fellépésének ξ száma binomiális eloszlást mutató vsz. v.).

Megoldás. Mint tudjuk, esetünkben $\mathbf{M}(\xi) = np$ $\mathbf{D}^2(\xi) = np\,(1-p)$ (l. 7. § 4. pl.). Így tehát $\mathbf{P}(|\xi - np| \geqq \lambda\sqrt{np\,(1-p)}) \leqq 1/\lambda^2$, vagy áttérve a ξ/n relatív gyakoriságra és az ellentett eseményre, $\mathbf{P}(|\xi/n - p| < \lambda\sqrt{p\,(1-p)/n}) > 1 - 1/\lambda^2$. Legyen $\lambda\sqrt{p\,(1-p)/n} = \varepsilon$, amely $\to 0$, ha $n \to \infty$, ekkor $\mathbf{P}(|\xi/n - p| < \varepsilon) > 1 - p\,(1-p)/\varepsilon^2 n \geqq 1 - 1/4\,\varepsilon^2 n$, ami $\to 1$, ha $n \to \infty$, s ezzel a BERNOULLI-féle tétel egyik alakjára jutottunk, a konvergencia miként jét is láthatjuk. Vegyük észre, hogy a vsz. alsó korlátja *nem is függ p-től*; ha tehát még feltevést sem teszünk p-re, akkor is igaz lesz, hogy bizonyos n-től kezdve (meghatározott értelemben) gyakorlatilag biztosan $p \approx \xi/n$. Ha p-re van valami támpontunk (pl. a relatív gyakoriság megfigyelése alapján), valamivel pontosabb korlátozást adhatunk n-re. Mindez felhasználható vsz.-ek (esetleg v. é.-ek) kísérleti megállapításakor (v. ö. 7. § 35. pl.; kísérletsorozat egyszerre végrehajtott sok (azonos) kísérlettel is ekvivalens lehet!)

4. Állapodjunk meg abban, hogy a $\geqq 0{,}9973$ vsz.-ű eseményeket tekintjük „gyakorlatilag biztosak"-nak. Hány darabot kell valamilyen készáruból megvizsgálnunk ahhoz, hogy ebben az értelemben „gyakorlatilag biztos" legyen, hogy a selejtesek relatív gyakorisága és selejtes felléptének vsz.-e legfeljebb $\pm$ 0,001-gyel tér el egymástól (az egyes darabok milyensége függetlennek tekinthető)?

5. Tegyük fel, hogy az előző példa kísérletét elég sokszor elvégeztük, és azt tapasztaltuk, hogy a relatív gyakoriság kevés kivétellel a p_1 és p_2 határok közt maradt ($p_1 < p_2$). Ha egy eseményt akkor nevezünk „gyakorlatilag biztosnak", ha vsz.-e $\geqq 0{,}9973$, hány kísérletet kell végeznünk ahhoz, hogy *a)* szóban forgó kísérletsorozatban a relatív gyakoriság és vsz. abszolút eltérése $< \varepsilon$ legyen; *b)* ez az abszolút eltérés kisebb legyen, mint a vsz. $s\%$-a? Milyen n kísérletszámot kapunk a vizsgált esetekben $p_1 = 0{,}02$, $p_2 = 0{,}03$, $\varepsilon = 0{,}001$, $s = 1$ esetén?

6. Bizonyos fúrók keményfémbetétjének keménységére méréseket végeznek. Az adatok (bizonyos egységekben) a következők (170 darabot vizsgáltak meg):

Keménység foka (x)	28,5	30,5	32,5	34,5	36,5	38,5	40,5	42,5	44,5	Átlag 36,21
x keménységűek száma (m)	3	9	23	33	38	34	21	8	1	170

Vegyünk ki találomra 20 fúrót. Mi a vsz., hogy ennek a 20-nak az átlagos keménysége az egész készlet átlagos keménységétől 3-nál kevesebbel tér el? (Tekintsük az egyes darabok keménységeit ugyanolyan e. f.-ű, összességükben független vsz. v.-knak.)

7. Támasszuk alá a nagy számok törvényeinek ismertetett alakja segítségével azt a gyakorlati szabályt, hogy valamely fizikai mennyiség mérésénél az egyes mérések eredményeinek aritmetikai közepét veszik a mérendő mennyiség valóságos értékének. (Keressük meg a szükséges feltételeket.)

Megoldás. Végezzünk n mérést; legyenek az egyes mérések eredményei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k (a számtalan, az eredményt megmásító tényezőre tekintettel ezt feltehetjük). *Ha feltesszük* (erre később még kapunk jogosítást), hogy a ξ_i-k ($i = 1, 2, \ldots, n$) értékei a mérendő mennyiség valóságos értéke, a körül úgy oszolhatnak el, hogy ξ_i s. f.-e egycsúcsú és szimmetrikus (közelebbről: pl. normális), $\mathbf{M}(\xi_i) = a$ lesz (ez könnyen igazolható). Eléggé kézenfekvő itt az egyes sz. n.-ek korlátosságát is feltenni, ekkor alkalmazhatjuk a nagy számok törvényének MARKOV-féle alakját, ti. $\mathbf{M}(\xi_i) = a$

és $\mathrm{D}(\xi_i)$ léteznek, és ha megengedjük, hogy a méréseket elvileg akárhányszor is elvégezhetjük, beszélhetünk a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{M}(\xi_1) + \ldots + \mathrm{M}(\xi_n)}{n}, \quad \text{illetve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{D}^2(\xi_1) + \ldots + \mathrm{D}^2(\xi_n)}}{n}$$

határértékekről, ezek azonban a, illetve 0 lesznek, mert $\mathrm{D}(\xi_i)$ korlátos. Így tehát $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$ sztohasztikusan konvergál a-hoz, vagyis $n \to \infty$-nél (azaz gyakorlatilag már nagy n-ekre is) „gyakorlatilag biztos", hogy a mérési eredmények aritmetikai közepe tetszés szerint megközelíti a mérendő mennyiség valóságos értékét, s épp ezzel élünk a fizikai méréseknél. A mérési adatok átlagértékének az a-hoz való viszonyát a matematikai statisztikában vizsgálják meg mélyrehatóbban; ugyanott foglalkoznak a mérési adatok négyzetes középhibájának, illetve a megfelelő vsz. v.-k sz. n.-ének kapcsolatával is.

8. Vezessük le a nagy számok törvényének binomiális eloszlás esetére specializált alakját a MOIVRE—LAPLACE-féle tételből.

Megoldás. A tétel szerint (v. ö. 4. §): Ha ξ n és p paraméterű binomiális eloszlású vsz. v., $t > 0$ valós szám $(np - t\sqrt{npq} \leqq 0$ és $q = 1 - p)$,

$$\mathrm{P}(np - t\sqrt{npq} \leqq \xi < np + t\sqrt{npq}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-u^2/2}\, du + o\left(1/\sqrt{n}\right),$$

ahol $o(1/\sqrt{n})$ t-től nem függ; ez nyilván azt is jelenti, hogy

$$\mathrm{P}(|\xi/n - p| < t\sqrt{pq/n}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-u^2/2}\, du + o(1/\sqrt{n}).$$

Legyen $\varepsilon = t\sqrt{pq/n}$, akkor

$$\mathrm{P}(|\xi/n - p| < \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2/2}\, du + o\left(1/\sqrt{n}\right).$$

Rögzítsük ε-t tetszőleges kicsinynek, és tartsunk n-nel ∞-hez, vagyis t tartson végtelenhez úgy, mint konst $\sqrt{n}$, ekkor a jobb oldal $\to \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2/2}\, du = 1$-hez, éspedig alulról, mivel a bal oldal vsz. Ez azonban épp a BERNOULLI-féle tétel. További analízis megadná az n-től való függést is; az eredmény nem sokkal jobb, mint amit pl. a BERNSTEJN-féle egyenlőtlenség nyújt. Ilyen módszert történetesen alkalmazhatnánk a 8. § 4. és 8. § 5. pl.-knál is, valamivel jobb értékek elérésére. A 8. § 3. pl. eredménye durvább becslés ugyan, de jóval egyszerűbben levezethető. Az itteni magában véve is jelentékeny eredmény: mégis a nagy számok törvénye általános (pl. MARKOV-féle) alakjainak az ad a BERNOULLI-féle tételen túlmenő jelentőséget, hogy *tetszőleges* eloszlású vsz. változókra mondtuk ki, nemcsak binomiális eloszlásúakra.

9. Dolgozzuk ki a 8. § 4. fel.-ot a BERNSTEJN-féle egyenlőtlenség felhasználásával.

Megoldás. Egyszerű alternatíva esetén, mint a repetitórium-részben láttuk, az említett egyenlőtlenség következménye: adott, tetszőleges kis ε-nál és δ-nál annak a vsz.-e, hogy a relatív gyakoriság és vsz. abszolút eltérése $< \varepsilon$, $1 - \delta$ vagy ennél nagyobb, mihelyt a kísérletek száma $n \geqq (9/8\varepsilon^2) \log (2/\delta)$, feltéve, hogy $\varepsilon \leqq p\,(1 - p)$. A mi esetünkben *(megengedve az utóbbit)* $\varepsilon = 0{,}001$, és $1 - \delta = 0{,}9973$, vagyis $\delta = 0{,}0027$ mellett $n \geqq (9/8 \cdot 10^{-6}) \log (2/0{,}0027) \approx 7{,}2 \cdot 10^6$. A 8. § 4. fel.-ban $9{,}2 \cdot 10^7$-t kaptunk; jelenleg ennél több mint egy nagyságrenddel kisebb értéket, pedig p értékét alig vettük figyelembe.

10. K. PEARSON, a matematikai statisztika híres angol művelője végezte el a következő kísérletet: 24 000-szer feldobott egy pénzdarabot; 12 012 esetben „fejet" mutatott a leesett érme. Feltehető-e, hogy a „fej" vsz.-e 0,5, ha a „gyakorlatilag biztos"-at a 0,9973 vsz.-szint fejezi ki?

11. Az előző feladatban mit mondhatunk „fej" előfordulása ismeretlen p vsz.-ének korlátairól?

12. Vizsgáljuk meg a 8. § 5. fel.-ot: A BERNSTEJN-féle egyenlőtlenség felhasználását elősegíti-e a vsz. közelebbi ismerete?

9. §. KARAKTERISZTIKUS FÜGGVÉNY, GENERÁTORFÜGGVÉNY

a) Karakterisztikus függvény

Számos vsz. számítási probléma megoldását rendkívül megkönnyíti a karakterisztikus függvénynek nevezett analitikus segédeszköz. Ennek a definíciója a következő:

Egy $F(x)$ e. f.-ű ξ vsz. v. $\varphi_\xi(t)$ **karakterisztikus függvényén** *(rövidítve* **k. f.***)* a

$$\varphi_\xi(t) = \mathrm{M}(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

összefüggéssel **definiált** *függvényt értjük; ez általában komplex értékű és mindig létezik.*

A Stieltjes-integrál fogalmából következik, hogy *ha ξ diszkrét vsz. v., amely csak az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ értékeket veheti fel,* $\mathrm{P}(\xi = x_n) = p_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *vsz.-ge* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1\right)$

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{itx_n}\, p_n,$$

míg *szakaszonként sima $F(x)$ esetén*

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, f(x)\, dx$$

(közönséges Fourier-transzformált), ahol $f(x) = \dfrac{dF}{dx}$, *vagyis ξ s. f.-e.* (Mondják úgy is, hogy *„az $F(x)$ e. f., illetve a $(p_1, \ldots)$ vsz. e. k. f.-e".*)

A k. f. tulajdonképp egy speciális függvénynek, ti. valamilyen e. f.-nek az ún. *Fourier—Stieltjes transzformáltja*; azonban nem ennek a transzformáltnak a szempontjából fogjuk tárgyalni a dolgokat.

b) A karakterisztikus függvény tulajdonságai

Röviden felsoroljuk a fenti $\varphi_\xi(t)$ pár tulajdonságát.

1. Tetszőleges e. f.-nek létezik k. f.-e.
2. $|\varphi_\xi(t)| \leqq 1$, $\varphi_\xi(0) = 1$.
3. $\varphi_\xi(t)$ egyenletesen folytonos $a\ (-\infty, \infty)$-en.
4. $\varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)}$ ($\overline{\quad}$: egy komplex szám konjugáltja.)

A gyakorlat szempontjából a következő tételek fontosak:

1. Ha $\eta = a\xi + b$ $(a, b$ konst$)$

$$\varphi_\eta(t) = e^{ibt}\, \varphi_\xi(at).$$

2. Ha ξ első n kezdeti momentuma, vagyis az $\mathrm{M}(\xi^k) = m_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ mennyiségek léteznek, $\varphi_\xi(t)$ minden t-nél n-szer deriválható és

$$\left[\frac{d^k \varphi_\xi(t)}{dt^k}\right]_{t=0} = i^k \cdot m_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

A k. f. Maclaurin-sorának együtthatóiban tehát a kezdeti momentumok szerepelnek.

Egy ξ vsz. v. k. f.-e ismeretében tehát (a mondott feltételek mellett) ξ v. é.-e és sz. n.-e már meghatározható. Sokszor könnyebb kiszámítani a k. f.-t, mint az e. f.-t; ekkor válik fontossá tételünk.

3. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ összességükben független vsz. v.-k, akkor

$$\varphi_{\xi_1 + \ldots + \xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdots \varphi_{\xi_n}(t).$$

Láttuk, hogy két vsz. v. ξ_1 és ξ_2 összegének e. f.-e, illetve s. f.-e az egyes vsz. v.-k s. f.-einek konvolúciója. $\varphi_{\xi_1 + \xi_2}(t)$ tehát ennek a konvolúciónak a k. f.-e (Fourier—Stieltjes transzformáltja).

Ez a tétel rendkívül megkönnyíti a vsz. v.-k összege eloszlásának (e. f.-ének) a vizsgálatát.

c) Unicitási és konvergencia-tételek

A vsz. számítás szempontjából óriási fontosságú, hogy a k. f. ismeretében egyértelműen meghatározhatjuk a hozzátartozó e. f.-t. Ezt a tényt az ún. **unicitási tétel** foglalja magában; ez így szól:

Ha az $F(x)$ e. f.-ű ξ vsz. v. k. f.-e $\varphi(t)$, és x, y $F(x)$ folytonossági helyei $(y < x)$, akkor

$$F(x) - F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(t) \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{2\,it} - \varphi(-t) \frac{e^{ity} - e^{itx}}{2\,it} \right] dt$$

és $\varphi(t)$ egyértelműen meghatározza $F(x)$-et.

Az itt szereplő formulát **inverziós formulának** (a szereplő Fourier-transzformáció megfordítási formulájának) nevezik.

A sűrűségfüggvénnyel definiált karakterisztikus függvényre így szól az *inverziós tétel:*

Ha a ξ vsz. v. k. f.-e $\varphi(t)$, és $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt$ létezik, ξ sűrűségfüggvénye létezik, folytonos és az

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \varphi(t)\,dt$$

alakban állítható elő. (Ez az inverz Fourier-transzformáció általánosan ismert formulája.)

A k. f. tehát **egyértelműen** *meghatározza az e. f.-t.* Sokszor a k. f.-t könnyebb meghatározni, mint az e. f.-t; ekkor az e. f.-t az inverziós formulával állíthatjuk elő, éspedig egyértelműen.

E. f.-ek és k. f.-eik bizonyos sorozatai között is mély kapcsolat van. Ezt fejezi ki a következő, ún. **konvergencia-tétel.**

Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely $\{F_n(x)\}$ *e. f.-sorozat egy* $F(x)$ *e. f.-hez konvergáljon az utóbbi minden folytonossági pontjában, a következő: Az* $F_n(x)$*-ek* $\varphi_n(t)$ *k. f.-ei minden t-re konvergáljanak egy* $\varphi(t)$ *függvényhez, amely* $t = 0$*-nál folytonos. Ha ez teljesül,* $\varphi(t)$ $F(x)$ *k. f.-e lesz, és* $\varphi_n(t)$ *minden* $-T \leqq t \leqq T$ *intervallumban egyenletesen konvergál* $\varphi(t)$*-hez.*

Ez a tétel azért fontos, mert sokszor előadódik, hogy keressük e. f.-ek valamilyen konvergens sorozatának határfüggvényét, s azt egyszerűbb a k. f.-eken keresztül meghatározni.

d) **Valószínűségi vektor karakterisztikus függvénye**

Egy $f(x_1, \ldots, x_n)$ folytonos s. f.-ű $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *vsz. vektor* **karakterisztikus függvényét** (az e. f.-ből bonyolultsága miatt itt nem indulhatunk ki) a $t_1, \ldots, t_n$ *valós változók*

$$\varphi_{\vec{\xi}}(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n)} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

függvényével **definiáljuk.** (Az integrál mindig abszolút konvergens.)

Ennek a függvénynek a tulajdonságai lényegében ugyanazok, mint az egydimenziós esetben. Itt is fennáll a kölcsönösen egyértelmű megfelelkezés az e. f. és a k. f. közt, az egydimenzióshoz hasonló inverziós formulával és konvergencia-tétellel egyetemben. Gyakorlatilag fontos tételek:

1. Ha $\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, \xi_k + b_j \quad (j = 1, \ldots, n)$ és $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$,

$$\varphi_{\vec{\eta}}(t_1, \ldots, t_n) = \exp\left[i \sum_{j=1}^{n} b_j\, t_j\right] \cdot \varphi_{\vec{\xi}}(u_1, \ldots, u_n)$$

(ahol $u_k = \sum_{j=1}^{n} c_{jk}\, t_j$) $\quad (k = 1, \ldots, n)$

2. $$\left[\frac{\partial \varphi_{\vec{\xi}}(t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_k}\right]_{t_1 = \ldots = t_n = 0} = i\, \mathrm{M}(\xi_k) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

3. $$\left[\frac{\partial^2 \varphi_{\vec{\xi}}(t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_j\, \partial t_k}\right]_{t_1 = \ldots = t_n = 0} = -\,\mathrm{M}(\xi_j\, \xi_k) \qquad (j, k = 1, \ldots, n;\ j \neq k)$$

amennyiben a szereplő v. é.-ek léteznek.

Ha $\vec{\xi}$ komponensei diszkrét vsz. v.-k, $\vec{\xi}$ k. f.-ét értelemszerűen egy, az integráloknak megfelelő többszörös szummával definiáljuk (részletekre itt nem térünk ki; vö. az egydimenziós esettel!)

e) Generátorfüggvény

Diszkrét vsz. v.-k k. f.-ével kapcsolatban igen fontos a következő aleset: *Tegyük fel, hogy a* ξ vsz. v. csak a $0, 1, \ldots$ értékeket (esetleg véges sokat) veheti fel, $\mathbf{P}(\xi = n) = p_n$ vsz.-gel $\left(n = 0, 1, \ldots; \sum_{n=1}^{\infty} p_m = 1\right)$. Definíció szerint ξ k. f.-e:

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{itn} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \qquad (z = e^{it}).$$

Ez a hatványsor azonban *minden* $|z| < 1$*-re is konvergens*, és az egységkör belsejében reguláris analitikus függvényt állít elő. Mivel ez utóbbit a komplex függvénytan segítségével igen kényelmesen kezelhetjük, célszerű bevezetni a következő *definíciót:*

A fenti ξ *vsz. v.* **generátorfüggvényének** *(rövidítve* **g. f.***) a*

$$G_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \qquad (|z| \leqq 1)$$

összefüggéssel **definiált** *függvényt nevezzük* (LAPLACE).

(Speciális esetben $G(z)$ polinom is lehet.) Legtöbbször zárt alakban is előállítható; ekkor válik igazán hathatós segédeszközzé.

f) A generátorfüggvény tulajdonságai

A g. f. tulajdonságait már nem vezethetjük le közvetlenül a k. f.-éből, mert ez *csak az egységkör kerületén* azonos a k. f.-nyel. Függvénytani eszközökkel bebizonyíthatók azonban a következők:

1. Egy g. f. egyértelműen meghatározza azon ξ vsz. v. $(p_1, p_2, \ldots)$ vsz. e.-át amelyhez tartozik, mert $p_k = \dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

2. Egy $(p_1, p_2, \ldots)$ vsz. e.-ú ξ vsz. v. egyes momentumait sorjában meghatározhatjuk az

$$\mathbf{M}(\xi^s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^s p_k \quad (s = 1, 2, \ldots) \qquad \text{és} \qquad G^{(r)}(1) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)\, p_k \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

összefüggések alapján. Speciálisan

$$\mathbf{M}(\xi) = G'(1), \quad \mathbf{D}^2(\xi) = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2.$$

3. Ha ξ és η független vsz. v.-k, akkor

$$G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z)\, G_\eta(z)$$

(hasonlóan több összeadandó, összességükben független vsz. v. esetén is).

4. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ egyforma eloszlású független vsz. v.-k, közös g. f.-ük $G_\xi(z)$, továbbá ν vsz. v., mely csak a $0, 1, \ldots$ értékeket veheti fel, a ξ_n-ektől független, és g. f.-e $G_\nu(z)$, az $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ véletlentől függő tagszámú összeg g. f.-e

$$G_\eta(z) = G_\nu[G_\xi(z)].$$

5. Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ nem negatív és egész értékű vsz. v.-k egy sorozata, amelyek eloszlásai egy határeloszláshoz konvergálnak, vagyis — $\mathbf{P}(\xi_n = k) = p_{nk}$ $(k = 0, 1, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$ jelöléssel — a $\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ határértékek léteznek, és $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Akkor a ξ_n vsz. v.-k $G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} z^k$ g. f.-ei $|z| \leqq 1$ körlemez minden pontjában konvergálnak a $(p_1, p_2, \ldots)$ eloszlás $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ g. f.-éhez, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z) \qquad (|z| \leqq 1).$$

Megfordítva: Ha minden $|z| \leqq 1$-re $\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z)$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Ha tehát valamilyen (nem negatív egész értékű) $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ vsz. v.-k g. f.-ei konvergálnak egy reguláris analitikus $G(z)$ függvényhez, ha $|z| \leqq 1$, akkor az η_n vsz. v.-k vsz. eloszlásai konvergálnak ahhoz a vsz. eloszláshoz, amelynek $G(z)$ a g. f.-e.

Látható az analógia a k. f.-re és a g. f.-re vonatkozó tételek közt; az utóbbiak gyakorlati jelentőségéről ugyanazokat mondhatjuk, mint amit a velük analóg, k. f.-ekre vonatkozó tételeknél megállapítottunk.

Megjegyezzük, hogy a g. f. igen hasznos segédeszköz akkor, amidőn a szóban forgó vsz.-eket rekurzív formulából kell meghatározni. Kiterjedt alkalmazásával tulajdonképp csak későbbi fejezetekben fogunk találkozni.

g) **Valószínűségi vektor generátorfüggvénye**

Ha a $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ vsz. vektor komponensei csak nemnegatív egész értékeket vesznek fel, $\mathbf{P}(\xi_1 = k, \xi_2 = l) = p_{kl}$ vsz.-gel $(k, l = 0, 1, 2, \ldots)$,

$\vec{\xi}$ **kétdimenziós generátorfüggvényét** *az egydimenziós g. f. analógiájára képezett*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{kl} z^k w^l \equiv G_{\vec{\xi}}(z, w) \qquad (|z| \leqq 1, |w| \leqq 1)$$

hatványsorral **definiáljuk**; ez a függvény a feltüntetett tartományban reguláris analitikus.

Hasonló a definíció több dimenzióban. Az egydimenziós g. f. tulajdonságai értelemszerűen átvihetők a többdimenziós g. f.-ekre is.

Példák és feladatok

1. Határozzuk meg egy ξ **binomiális eloszlású vsz. v. k. f.-ét (g. f.-ét).**

Megoldás. Fogjuk fel ismét ξ-t úgy, hogy ξ azt jelenti, hányszor következett be egy egyszerű alternatívát produkáló kísérlet n-szeri megismétlése folyamán a vizsgált esemény. A 7. §-ban láttuk, hogy akkor ξ felírható $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ alakban, ahol $\xi_k = 1$, ha a k-adik kísérletben bekövetkezett az esemény, ellenkező esetben pedig

$\xi_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ és $\mathbf{P}(\xi_k = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_k = 0) = q$ és a ξ_k-k függetlenek. Következésképpen ξ k. f.-e az egyes ξ_k-k k. f.-einek a szorzata lesz. De $\varphi_{\xi_k}(t) = p\,e^{it\cdot 1} + q\,e^{it\cdot 0} = p\,e^{it} + q$, és így

$$\varphi_\xi(t) = (p\,e^{it} + q)^n.$$

Következésképp a g. f.:

$$G_\xi(z) = (pz + q)^n \qquad (|\,z\,| \leqq 1).$$

2. Határozzuk meg egy ξ **Poisson eloszlású vsz. v. k. f.-ét (g. f. -ét).**

Megoldás. Legyen $\mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ $(\lambda > 0$ konst; $k = 0, 1, \ldots)$; definíció szerint a k. f.: $\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{itk} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$, tehát

$$\varphi_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Következésképp a g. f.:

$$G_\xi(z) = e^{\lambda(z-1)} \qquad (|\,z\,| \leqq 1).$$

3. Határozzuk meg a ξ **hipergeometrikus-eloszlású vsz. v. k. f.-ét (g. f.-ét).**

Megoldás. Későbbi okokból kezdjük ξ g. f.-én. Definíció szerint ez $G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{M}\left[\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}\Big/\binom{N}{n}\right]z^k$. Ez visszavezethető a speciális függvények elméletében fontos szerepet játszó $F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2 + \ldots +$

$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}z^k + \ldots$ ún. *hipergeometrikus sorra* (ezért kezdtük a g. f.-nyel; α, β, γ ált. komplex szám is lehet, γ nem 0, vagy negatív egész), amely $|\,z\,| < 1$ esetén analitikus függvényt állít elő. A visszavezetés azon alapul, hogy

$$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \binom{N-M}{n}\frac{n\cdots(n-k+1)\,M(M-1)\cdots(M-k+1)}{k!(N-M-n+1)\cdots(N-M-n+k)} =$$

$$= \binom{N-M}{n}\frac{(-n)\cdots(-n+k-1)(-M)\cdots(-M+k-1)}{k!(N-M-n+1)\cdots(N-M-n+k)},$$

és így a g. f. $\dfrac{\binom{N-M}{n}}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{M}\dfrac{(-n)\cdots(-n+k-1)(-M)\cdots(-M+k-1)}{k!\,(N-M-n+1)\cdots(N-M-n+k)}z^k$,

vagyis

$$G_\xi(z) = \left[\binom{N-M}{n}\Big/\binom{N}{n}\right]F(-n, -M, N-M-n+1, z) \qquad (|\,z\,| \leqq 1),$$

mivel esetünkben $k > M$-nél a sor automatikusan megszakad. — A k. f. nyilván

$$\varphi_\xi(t) = \left[\binom{N-M}{n}\Big/\binom{N}{n}\right]F(-n, -M, N-M-n+1, e^{it}).$$

Mindebből látjuk, honnan kapta nevét a hipergeometrikus eloszlás. (Megjegyzendő, hogy tulajdonságainak a g. f. alapján történő vizsgálatánál erősen kihasználhatók a hipergeometrikus sor alaposan kikutatott sajátságai.)

4. Határozzuk meg egy ξ **negatív binomiális eloszlású vsz. v. k. f.-ét (g. f.-ét).**

Megoldás: A 6. § 17. fel.-ból tudjuk, hogy ha $P(\xi = m) = \binom{k-1+m}{k-1} p^k q^m$ $(m = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots)$, ξ előállítható k darab p, q $(p + q = 1)$ paraméterű, geometriai eloszlású, független ξ_i $(i = 1, \ldots, k)$ vsz. v. összegeként: $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, ahol $P(\xi_k = n) = p\, q^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Következésképp elég ξ_k k. f.-ét (g. f.-ét) meghatározni, s azután a független vsz. v.-k összege k. f.-ének (g. f.-ének) képletét alkalmazni. Definíció szerint $\varphi_{\xi_k}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p\, q^n\, e^{itn} = p/(1 - q\, e^{it})$, és így

$$\varphi_{\xi}(t) = [p/(1 - q\, e^{it})]^k.$$

A g. f. nyilván

$$G_{\xi}(z) = [p/(1 - qz)]^k \qquad (|z| \leqq 1).$$

5. Határozzuk meg a ξ **klasszikus valószínűség-eloszlású vsz. v. k. f.-ét (g. f.-ét).**

Megoldás. Legyen $P(\xi = k) = p$ (konst) $= 1/n$ $(k = 1, \ldots, n)$. Definíció szerint ξ k. f.-e: $\varphi_{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{n} p\, e^{itn}$, vagyis

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{it}\,(1 - e^{itn})/n\,(1 - e^{it}),$$

és a g. f.:

$$G_{\xi}(z) = z\,(1 - z^n)/n\,(1 - z) \qquad (|z| \leqq 1).$$

6. Számítsuk ki egy ξ (m, σ) **paraméterű normális eloszlású vsz. v. k. f.-ét.**

Megoldás. Tudjuk, hogy a ξ normálásával kapott $\eta = (\xi - m)/\sigma$ $(0,1)$ paraméterű normális eloszlású vsz. v.; ha $\varphi_{\eta}(t)$-t ismerjük, egyik tételünk alapján $\varphi_{\xi}(t)$-t is. Ki kell számítanunk az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ity}\, dy$ integrált; jogosult t szerint deriválni az integráljel alatt; ekkor felírhatjuk a következőket:

$$\varphi'_{\eta}(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, y\, e^{ity}\, dy \equiv -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, (-y)\, e^{ity}\, dy = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy} \left(\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{ity}\, dy.$$

Mivel a legutóbbi integrál parciális integrálás után egyenlő lesz

$$-it \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ity}\, dy = -it \cdot \varphi_{\eta}(t)$$

vel, végül is a $\varphi'_{\eta}(t) = -t\, \varphi_{\eta}(t)$ differenciálegyenletet kapjuk $\varphi(t)$-re, amelynek megoldása $\varphi_{\eta}(t) = C\, e^{-t^2/2}$; mivel $\varphi_{\eta}(t)$ k. f., $\varphi_{\eta}(0) = 1$, ebből mint kezdeti feltételből $C = 1$. Végül is $\xi = \sigma\, \eta + m$ folytán $\varphi_{\xi}(t) = e^{imt}\, \varphi_{\eta}(\sigma\, t)$, vagyis

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{imt - \sigma^2 t^2/2}.$$

A repetitórium részben közölt képlet szerint ebből könnyen kiszámíthatjuk a (különben már ismert) v. é.-et és a sz. n.-et is.

7. Határozzuk meg a ξ $(-a, a]$ **intervallumon egyenletes eloszlású vsz. v. k. f.-ét.**

Megoldás. ξ s. f.-e $f(x) = 1/2\,a$ $(-a < x \leqq a$; egyébként $\equiv 0)$. A k. f.-t definiáló integrál $= \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{ixt}\,dx = \sin at/at$, és így

$$\varphi_{\xi}(t) = \sin at/at.$$

8. Határozzuk meg egy ξ λ**-paraméterű exponenciális eloszlású vsz. v. k. f.-ét.**

Megoldás. Legyen ξ s. f.-e, $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ $(x \geqq 0$; egyébként $\equiv 0)$. A k. f.-t definiáló integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{itx}\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda\, e^{-\lambda x}\, e^{itx}\,dx = 1/(1 - it/\lambda)$; és így

$$\varphi_{\xi}(t) = 1/(1 - it/\lambda).$$

9. Határozzuk meg egy ξ χ^2**-eloszlású vsz. v. k. f.-ét.**

Megoldás. ξ s. f.-e n darab független $(0, \sigma)$ paraméterű normális eloszlású vsz. v. négyzete összegének s. f.-e. Az összeg egy tagjának s. f.-e, mint tudjuk, $(x) = e^{-x/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi}\,x\sigma$ $(x > 0$; egyébként $\equiv 0)$. Így az ehhez tartozó k. f.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x/2\sigma^2}\, e^{itx}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\,\sqrt{x}}\,dx = (1 - 2\,it\,\sigma^2)^{-1/2}$$

(a négyzetgyöknek a $t = 0$-nál 1-gyel egyenlő ága veendő). Mivel az összegben szereplő összes vsz. v.-k függetlenek, és mindnek ugyanaz a k. f.-e, az összeg k. f.-e

$$\varphi_{\xi}(t) = (1 - 2\,it\,\sigma^2)^{-n/2}.$$

10. Számítsuk ki egy ξ CAUCHY**-eloszlású vsz. v. k. f.-ét.**

Megoldás. Legyen ξ s. f.-e $f(x) = (1/\pi\,\sigma)(1/[1 + (x - m)^2/\sigma^2]$ $(m, \sigma > 0$ konst) (l. 6. § 5. pl.). Elég a normált $\eta = (\xi - m)/\sigma$ vsz. v. k. f.-ét kiszámítani. η s. f.-e nyilván $(1/\pi)$ $[1/(1 + x^2)]$; így tehát az

$$\varphi_{\eta}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1 + x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos tx}{1 + x^2}\,dx$$

integrált kell kiszámítanunk. Ez azonban jól ismert (l. pl. *Szász Pál:* „A differenciál- és integrálszámítás elemei", Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951. II. 294. o.), s értéke $e^{-|t|}$; vagyis (egy vsz. v. lineáris függvénye k. f.-éről szóló tétel értelmében) a $\xi = \sigma\,\eta + m$ vsz. v. k. f.-e

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{imt - \sigma|t|}.$$

11. Határozzunk meg egy ξ n **szabadsági fokú** STUDENT**-eloszlású vsz. v. k. f.-ét.**

Megoldás. A k. f. definíciója értelmében a

$$\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}\,dx \qquad (n=1,2,\ldots)$$

integrált kell meghatároznunk. Ez azonban elemi függvényekkel általában nem fejezhető ki. Bebizonyítható, hogy az integrál, vagyis ξ k. f.-e

$$\varphi_\xi(t) = \frac{|t|^{n/2} K_{n/2}(|t|)}{2^{(n-2)/2}\,\Gamma(n/2)} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

ahol $K_{n/2}(z)$ az $n/2$ indexű ún. modernizált *Hankel-f élefüggvény*, amely kifejezhető a hengerfüggvények bizonyos típusaival. $n/2 = m + 1/2$ esetén (m egész, z komplex szám)

$$K_{m+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z} \sum_{k=0}^{m} \frac{(m+k)!}{k!\,(m-k)!\,(2z)^k};$$

$n/2 = r$ (egész) esetén sokkal komplikáltabb a függvény alakja; akkor ti.

$$K_r(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \frac{(r-k-1)!}{k!\,(z/2)^{r-2k}} +$$

$$+ (-1)^{r+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{r-2k}}{k!\,(r+k)!} \left[\log\,(z/2) - \frac{1}{2}\psi(k+1) - \frac{1}{2}\psi(r+k+1)\right]$$

(ahol $\psi(x) = \dfrac{d}{dx}\log\Gamma(x)$; ezt a függvényt pl. a

$$\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x, \qquad \psi(1) = -C = -0{,}577\,215\,664\,90\ldots$$

(Euler-féle konstans) rekurzív-összefüggés határozza meg; ebből:

$$\psi(x) = -C - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

itt elegendő a $\psi(s+1) = -C + \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k}$ (s egész összefüggés is). $n = 1$ esetén

$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}$, és ezzel a k. f.-re $e^{-|t|}$-t kapunk, megegyezésben azzal, hogy $1/\pi(1+x^2)$ típusú CAUCHY-eloszlású vsz. v. k. f.-ére kellett jutnunk. — Az itt szereplő speciális függvényekről közelebbi található pl. *A. N. Tyihonov—A. A. Szamarszkij:* A matematikai fizika differenciálegyenletei. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956 c. könyve függelékében.

A teljesség kedvéért megjegyezzük:

— Egy ξ *B(éta)* **eloszlású vsz. v. k. f.-e**, ha ξ s. f.-e, $f(x) = [\Gamma(\alpha+\beta)/\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)]\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ ($0 < x \leqq 1$; egyébként $= 0$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$).

$$\varphi_\xi(t) = F(\alpha,\ 0,\ \alpha+\beta,\ it),$$

ahol a jobb oldal a 9. § 3. pl.-beli *hipergeometrikus sor.*

— Egy ξ **logaritmiko-normális eloszlású vsz. v. k. f.-e,** ha ξ s. f.-e, $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}\,\sigma x)\exp[-(\log x - m)^2/2\sigma^2]$ $(x > 0$; egyébként $\equiv 0$; $m, \sigma > 0$ konst)

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} (e^{km+k^2\sigma^2/2})\frac{(it)^k}{k!} + o(t^n)$$

12. Határozzuk meg egy ξ λ-paraméterű exponenciális eloszlású vsz. v. v. é.-ét és sz. n.-ét k. f.-e segítségével.

13. Kozmikus sugárzásból véletlenszerűen érkező korpuszkulákat számlálunk. Kimutatható, hogy két egymás után jövő korpuszkula becsapódási időpontjainak $\eta_k = \xi_{k+1} - \xi_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ különbsége — két becsapódás közti időtartam — exponenciális eloszlású vsz. v., és feltehető, hogy ezen eloszlások paraméterei k-tól függetlenek (mondjuk $= \lambda$), továbbá, hogy az egyes η_k-k függetlenek. A kísérletek-szempontjából fontos a minden második, harmadik, ..., m-edik korpuszkula becsa, pódása közt eltelt ζ_m- időtartam eloszlása is $(m = 2, 3, \ldots)$. Határozzuk meg ζ_m- s. f.-ét v. é.-ét és sz. n.-ét.

Megoldás. Tekintsük a k-adik becsapódástól a rákövetkező m-ediket. Ennek időpontja definíció szerint ξ_{k+m}. Nyilván $\zeta_m = \xi_{k+m} - \xi_k$, de ez így írható: $\zeta_m = (\zeta_{k+1} - \xi_k) + (\xi_{k+2} - \zeta_{k+1}) + \ldots + (\xi_{k+m} - \xi_{k+m-1}) = \eta_k + \eta_{k+1} + \ldots + \eta_{k+m-1}$, vagyis m darab független exponenciális eloszlású vsz. v. összege. Tudjuk, ez Γ e. f.-ű vsz. v. Most azonban ζ_m eloszlását k. f.-e útján akarjuk megállapítani. ζ_m k. f.-e nyilván az η_k-k k. f.-einek szorzata. A 9. § 8. pl. szerint bármely η_k k. f.-e $1/(1 - it/\lambda)$, és így a ξ_m ***m*-edrendű Γ-eloszlású vsz.v. k. f.-e**

$$\varphi_{\zeta_m}(t) = 1/(1 - it/\lambda)^m.$$

ζ_m v. é.-ét, sz. n.-ét könnyű meghatározni, mert az őt képező összeg tagjainak v. é.-e, illetve sz. n.-e — pl. a 9. § 12. fel. szerint — $1/\lambda$, illetve $1/\lambda^2$, s esetünkben ezek a jellemzők összegeződnek. Így tehát (mint korábban is láttuk) $\mathbf{M}(\zeta_m) = m/\lambda$, $\mathbf{D}^2(\zeta_m) = m/\lambda^2$.

Kiindulhatunk azonban a k. f.-ből is. ζ_m s. f.-ét így határozhatjuk meg (figyeljük meg a speciális módszert): $1/(1 - it/\lambda)^m$ nem más, mint $\dfrac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}[1/(1 - it/\lambda)]\cdot \lambda^{m-1}/i^{m-1}(m-1)!$ Igazolható, hogy jogosult az integráljel alatt deriválni, amidőn az $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{itx}\,dx = 1/(1 - it/\lambda)$ egyenlőség mindkét oldalát $(m-1)$-szer deriváljuk.

De akkor az előzők szerint

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} i^{m-1} x^{m-1} e^{itx}\,dx = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}[1/(1 - it/\lambda)] = i^{m-1}(m-1)!/\lambda^{m-1}(1 - it/\lambda)^m$$

ami az unicitási tétel értelmében azt jelenti, hogy $1/(1 - it/\lambda)^m$ a $\lambda^m x^{m-1} e^{-\lambda x}/(m-1)!$ k. f.-e. $(m-1)!$ helyett $\Gamma(m)$-et szokás írni, tehát ζ_m s. f.-e $f(x) = \lambda^m x^{m-1} e^{-\lambda x}/\Gamma(m)$. — Tudjuk, hogy $f(x)$-*et az* m-*edrendű* Γ-*eloszlás* s. f.-ének nevezik.

14. Legyenek ξ_1, illetve ξ_2 normális eloszlású független vsz. v.-k m_1, σ_1 illetve m_2, σ_2 paraméterekkel. A k. f. felhasználásával állapítsuk meg $\xi_1 \pm \xi_2$ e. f.-ét.

Megoldás. Először is nézzük $-\xi_2 = \eta$ k. f.-ét. $\eta = -\xi_2 = (-1)\,\xi_2$, és így $\varphi_\eta(t) = \varphi_{\xi_2}(-t)$. Így tehát a független vsz. v.-k összege k. f.-éről szóló tétel szerint

$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t)$ és $\varphi_{\xi_1-\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1+\eta}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\eta}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(-t)$. A 9. § 6. pl. szerint $\varphi_{\xi_1}(t) = \exp\,[i\,m_1 t - \sigma_1^2\,t^2/2]$, $\varphi_{\xi_2}(t) = \exp\,[i\,m_2\,t - \sigma_2^2\,t^2/2]$ és így

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \exp\,[i\,(m_1 + m_2)\,t - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\,t^2/2]$$

és

$$\varphi_{\xi_1-\xi_2}(t) = \exp\,[i\,(m_1 - m_2)\,t - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\,t^2/2].$$

Típusuk folytán azonban ezek ismét egy-egy normális eloszlás k. f.-ei, amelyek v.é.-ei ξ_1, illetve ξ_2 v. é.-einek összege, illetve különbsége, a sz. n. pedig *minden esetben* az egyes sz. n.-ek összege. Az unicitási tétel szerint azonban ekkor *csakis* $\xi_1 \pm \xi_2$ ilyen eloszlású; $\xi_1 \pm \xi_2$ eloszlását tehát *egyértelműen* meghatároztuk. A k. f.-ek segítségével a vsz. v.-k *függetlensége* esetében tehát igen egyszerűen kaptuk meg azt az eredményt, (a normális e. f. *stabilis* voltát), amelyet eddig komplikált konvolúciós integrál kiszámítása szolgáltatott csak. — Eredményünk könnyen kiterjeszthető *független* vsz. v.-k $\eta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k$ típusú összege (e. f.-ének) meghatározására, ahol a ξ_k-k (m_k, σ_k) paraméterű normális eloszlású, független vsz. v.-k Eredményünk alkalmazása pl.: Tegyük fel, hogy valamilyen sokszög-síkalakzat kerületét kell meghatároznunk, és az egyes oldalak hosszának mérési eredményei normális eloszlású vsz. v.-k. Akkor a fentiek értelmében a kerület értéke is normális eloszlású vsz. v. lesz amelynek sz. n.-e az egyes oldalakéból adódik össze. — Hasonló problémával igen sok vizsgálatban találkozunk, ezért nem is illusztráljuk mindig vsz. v.-k összege eloszlásával kapcsolatos feladatainkat.

15. Határozzuk meg a k. f. segítségével két független, külön-külön CAUCHY-eloszlású vsz. v. összegének s. f.-ét.

Megoldás. Legyenek az egyes vsz. v.-k k. f.-ei $e^{it m_1 t - \sigma_1|t|}$, illetve $e^{it m_2 t - \sigma_2|t|}$ (m_1, m_2, σ_1, $\sigma_2 > 0$, konst). Összegük k. f.-e az idevágó tétel szerint $e^{it(m_1+m_2)t-(\sigma_1+\sigma_2)|t|}$, ami egy $(m_1 + m_2)$ és $(\sigma_1 + \sigma_2)$ paraméterű CAUCHY-eloszlású vsz. v. k. f.-e; az unicitási tétel értelmében tehát kimondható, hogy CAUCHY-*eloszlású, független vsz. v-k összegének s. f.-e szintén* CAUCHY-*féle s. f. (az összeg szintén* CAUCHY-*eloszlású vsz. v.), vagyis a* CAUCHY-*féle e. f. is stabilis.*

16. Legyen ξ_1 m_1, σ_1 paraméterű normális eloszlású vsz. v., ξ_2 pedig m_2, σ_2 paraméterű CAUCHY-eloszlású vsz. v., mely ξ_1-től független. Mi lesz $\xi_1 + \xi_2$ e. f.-e?

17. A k. f.-ek segítségével bizonyítsuk be, hogy ha ξ binomiális eloszlású vsz. v., $\mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{k<x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ e. f.-nyel, a normált ξ vsz. v. e. f.-e konvergál a normálishoz, ha $n \to \infty$.

Megoldás. ξ-t ismét úgy fogjuk fel, mint olyan független $\xi_1, \ldots, \xi_n$ vsz. v.-k összegét, ahol $\xi_i = 1$, illetve 0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ha egyszerű alternatívánál az i-edik kísérletben a vizsgált esemény bekövetkezett, illetve nem következett be, és $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_i = 0) = q \equiv 1 - p$. Láttuk (9. § 1. pl.), hogy ekkor ξ k. f.-e $\varphi_\xi(t) = (p\,e^{it} + q)^n$. Nekünk azonban a normált ξ k. f.-e kell. Mivel (l. 7. § 4. pl.) $\mathbf{M}(\xi) = np$, $\mathbf{D}^2(\xi) = npq$; a normált vsz. v. $(\xi - np)/\sqrt{npq} = (\xi_1 + \ldots + \xi_n - np)/\sqrt{npq} \equiv \eta_n$ lesz, azaz ξ-ből lineáris transzformációval származik. Idevágó tételünk szerint azonban ekkor $\varphi_{\eta_n}(t) = e^{-it\sqrt{np/q}}\,\varphi_\xi(t/\sqrt{npq}) = (p\,e^{it\sqrt{q/np}} + q\,e^{-it\sqrt{q/np}})^n$. Az unicitási és konvergencia-tételek szerint azonban elég azt vizsgálni, hogy a tétel

feltételei teljesülése esetén milyen $\varphi(t)$-hez tart $\varphi_{\eta_n}(t)$, ha $n \to \infty$. Ekkor már biztos, hogy η_n e. f.-e tart ahhoz az e. f.-hez, az utóbbi minden folytonossági pontjában, amelynek k. f.-e $\varphi(t)$. Mivel a Maclaurin-sorfejtés szerint $pe^{it\sqrt{q/np}} + qe^{-it\sqrt{q/np}} = 1 - (t^2/2n)(1 + R_n)$, ahol $R_n = 2\sum_{k=3}^{\infty} (1/k!)\,(it/\sqrt{n})^{k-2}(p\,q^k + q(-p)^k)/\sqrt{(pq)^k}$ és $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, $\varphi_{\eta_n}(t) = [1 - (t^2/2n)(1 + R_n)]^n$ és $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\eta_n}(t) \equiv \varphi(t) \equiv e^{-t^2/2}$ (az exponenciális függvény ismert limesz-alakjának alapján). Mivel a $\varphi_{\eta_n}(t)$-k konvergenciája $\varphi(t)$-hez minden t-re fennáll, és $\varphi(t)$ $t = 0$-nál folytonos, az említett tétel feltételei teljesülnek, és így az η_n-ek e. f.-einek sorozata konvergálni fog az $e^{-t^2/2}$-höz tartozó e. f.-hez, vagyis a normális e. f.-hez (ennek minden folytonossági pontjában, vagyis mindenütt). Eredményünk persze nem számol be a konvergencia gyorsaságáról, a határérték és a véges n-hez tartozó η_n normált összeg eltérésének becsléséről. (Vannak tételek arra vonatkozólag is, mit mondhatunk a megfelelő e. f.-ek eltéréséről a k. f.-ek eltérése ismeretében, ezek azonban már túllépik könyvünk kereteit.) A konvergencia közelebbi jellemzését a 4. §-ban közölt MOIVRE—LAPLACE-féle tétel szolgáltatta; azt azonban sokkal bonyolultabb levezetni — azért nem is tettük — mint itteni, k. f.-re támaszkodó fejtegetéseinket. Ebből látható a módszer hordereje.

18. Határozzuk meg egy (ξ_1, ξ_2) **normális eloszlású vsz. vektor k. f.-ét.**

Megoldás. Legyen (ξ_1, ξ_2) s. f.-e $f(x, y) =$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-r^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a)(x-b)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Vezessük be az $\eta_1 = (\xi_1 - a)/\sigma_1$, $\eta_2 = (\xi_2 - b)/\sigma_2$ új vsz. v.-kat; ekkor az (η_1, η_2) vsz. vektor s. f.-e (a 6. § *a*) bekezdés 4. formulája alapján)

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi(1-r^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2 - 2rxy + y^2)\right\}.$$

Az idevágó szabály szerint tehát $\varphi_{\vec{\xi}}(t_1, t_2) = e^{i(at_1+bt_2)}\varphi_{\vec{\eta}}(\sigma_1 t_1, \sigma_2 t_2)$, és az utolsó faktor értéke, definíció szerint, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, e^{i(\sigma_1 t_1 x + \sigma_2 t_2 y)}\, dx\, dy$. Az integrált kiszámítva, végül is

$$\varphi_{\vec{\xi}}(t_1, t_2) = \exp\left[i(a\,t_1 + b\,t_2) - (1/2)\,(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2\, r\, t_1\, t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right].$$

19. A g. f. segítségével határozzuk meg két független, binomiális eloszlású vsz. v. összegének vsz. eloszlását.

Megoldás. Legyenek az egyes vsz. v.-k paraméterei n_1, p_1, ill. n_2, p_2; ekkor g. f.-eik $(p_1 z + q_1)^{n_1}$, illetve $(p_2 z + q_2)^{n_2}$, összegük g. f.-e pedig $(p_1 z + q_1)^{n_1}\cdot(p_2 z + q_2)^{n_2}$. Ha $p_1 = p_2$ (s így $q_1 = q_2$), ez $(p_1 z + q_1)^{n_1+n_2}$-be megy át, ami egy $(n_1 + n_2)$ és p_1 paraméterű binomiális eloszlású vsz. v. g. f.-e. Az unicitás alapján tehát mondhatjuk, hogy *két különböző n_1 és n_2, de egyforma p_1 paraméterű binomiális eloszlású független vsz. v. összege ismét binomiális eloszlású, $n_1 + n_2$ és p_1 paraméterekkel.* Ezt a korábbi eszközökkel csak hosszadalmasabban kiszámítható eredményt a g. f.-ek segítségével úgyszólván azonnal megkaptuk.

20. Határozzuk meg g. f.-ek segítségével binomiális eloszlás POISSON-eloszlással való keverékét.

Megoldás. Legyenek a ξ_i vsz. v. értékei 1 vagy 0, $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_i = 0) = q \equiv 1 - p$ $(i = 1, 2, \ldots)$, ekkor $G_{\xi_i}(z) = pz + q$. Legyenek a ξ_i vsz. v.-k függetlenek; ekkor a $\xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ vsz. v. binomiális eloszlású (g. f.-e $(pz + q)^\nu$). Legyen most ν vsz. v., amely POISSON-eloszlású (a ξ_i-ktől független), és így g. f.-e, $G_\nu(z) = e^{\lambda(z-1)}$ $(\lambda > 0$ konst). Az $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ véletlentől függő tagszámú összeg vsz. eloszlása, mint tudjuk, binomiális eloszlások keveréke POISSON-eloszlással (l. 6. § 34. fel.), vagyis a kívánt típusú keverék. Az idevágó tétel szerint azonban ekkor $G_\eta(z) = G_\nu[G_{\xi_i}(z)] = e^{\lambda(pz+q-1)} = e^{\lambda p(z-1)}$, vagyis az említett keverék-eloszlás ismét POISSON-eloszlás, csak λp paraméterrel (ahogy azt már korábban is — más úton — bebizonyítottuk).

21. A g. f.-ek segítségével állapítsuk meg, milyen elegendő feltételek mellett konvergál a k-adrendű negatív binomiális eloszlás a POISSON-féléhez?

22. Határozzuk meg egy $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ **polinomiális eloszlású vsz. vektor** g. f.-ét.

Megoldás. Feltevés szerint

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k,\ \xi_2 = l) = \frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}\, p_1^k\, p_2^l\, (1 - p_1 - p_2)^{n-k-l} \quad (k, l = 1, \ldots, n)$$

kissé átalakítottuk a 4. §-beli definícióban szereplő formulát); definíció szerint a g. f. ($|z|, |w| \leqq 1$ mellett!)

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \mathbf{P}(\xi_1 = k, \xi_2 = l)\, z^k\, w^l =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}\, (p_1 z)^k\, (p_2 w)^l\, (1 - p_1 - p_2)^{n-k-l},$$

ami a polinomiális tétel szerint $= (p_1 z + p_2 w + 1 - p_1 - p_2)^n$, így tehát

$$G_{\vec{\xi}}(z, w) = [p_1 (z - 1) + p_2 (w - 1) + 1]^n.$$

23. Tegyük fel, hogy ha egy munkagép egy napon használatlan volt, a rákövetkező napon csak p vsz.-gel lesz ismét (egész napon) használatban, ha pedig azon a napon nem volt használatban, a rákövetkezőn q vsz.-gel lesz használatban ($p + q$ általában $\neq 1$, és függetlenek attól, milyen napról van szó). Legyen p_0 annak a vsz.-e, hogy a gép bizonyos év dec. 31-én („0"-dik nap) használatban volt. Mi a vsz.-e, hogy az erre következő n-edik napon is használatban lesz?

Megoldás. Legyen C_n: (a rákövetkező n-edik napon használatban van a gép). A szereplő feltételes vsz.-ek értelmezésétől egyelőre függetlenül, fejezünk ki a keresett $\mathbf{P}(C_n)$ vsz.-et a teljes vsz. tétele segítségével:

$$\mathbf{P}(C_n) = \mathbf{P}(C_n \mid C_{n-1})\, \mathbf{P}(C_{n-1}) + \mathbf{P}(C_n \mid \overline{C}_{n-1})\, \mathbf{P}(\overline{C}_{n-1})$$

$\mathbf{P}(C_n \mid C_{n-1})$ azonban annak a vsz.-e, hogy egy napon használták a gépet és a rákövetkező napon is használják, ez feladatunk adataiból $= p$; hasonlóan kapjuk, hogy $\mathbf{P}(C_n \mid \overline{C}_{n-1}) = q$. Jelöljük $\mathbf{P}(C_n)$-t f_n-nel; feladatunk értelmében $f_0 = p_0$. Mivel $\mathbf{P}(\overline{C}_{n-1}) = 1 - \mathbf{P}(C_{n-1})$,

f_n-re a következő rekurzív formulát kapjuk: $f_n = f_{n-1}\,p + (1 - f_{n-1})\,q$, azaz $f_n = (p - q)\,f_{n-1} + q$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Oldjuk meg ezt a differenciaegyenletet az ún. generátorfüggvény-módszerrel.* Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,x^n = G(x)$ az f_n-ek g. f.-e; $|x| < 1$-nél ez a sor egyenletesen konvergens, hiszen $f_n \leqq 1$, mert vsz. $G(x)$-et differenciaegyenletünk alapján akarjuk explicite meghatározni. Szorozzuk meg differenciaegyenletünk mindkét oldalát x^n-nel, és összegezzünk $n = 1$-től ∞-ig ($|x| < 1$ mellett!):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,x^n = (p - q)\sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}\,x^n + q\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (p - q)\,x\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,x^n + q\,x/(1 - x)$$

$G(x)$-et behozva ($f_0 = p_0$!) $G(x) - p_0 = (p - q)\,x\,G(x) + qx/(1 - x)$ és $G(x) = [x\,(q - p_0) + p_0]/(1 - x)\,[1 - (p - q)\,x]$. Parciális törtekre bontással $G(x) = q/(1 - p + q)\,(1 - x) + [p_0 - q/(1 - p + q)]/[1 - (p + q)\,x]$. A jobb oldalon két geometriai sor összeg szerepel, és így

$$G(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,x^n = [q/(1 - p + q)]\sum_{n=0}^{\infty} x^n + [p_0 - q/(1 - p + q)]\sum_{n=0}^{\infty} (p - q)^n\,x^n$$

$[|(p - q)\,x| < 1]$, amiből együttható összehasonlítással $f_n = [q/(1 - p + q)] + [p_0 - q/(1 - p + q)]\,(p - q)^n$. Persze, sorozatos visszahelyettesítéssel is megoldható a differenciaegyenlet. — Vegyük észre, hogy p_0 és p, q bármely értékeinél $f_n \to [q/(1 - p + q)]$, ha az n egész számokon keresztül $\to \infty$; valamint hogy a módszer alkalmazását a rekurzív formula konstans tagja tette lehetővé, és az, hogy benne az egyes vsz.-eknek szorzata, hatványa nem szerepelt, végül pedig az együtthatók deriválás nélküli megállapításának lehetősége. (E példával — más háttérrel — a *B)* részben is találkozni fogunk).

24. Legyen $W(n, k)$ annak a vsz.-e, hogy egy, a GALTON-féle deszkán lebocsátott golyó az n-edik szögsor k-adik ékéhez érkezik. ($k = 0, \ldots, n$; $k \leqq n$.) A 2. § 48. fel.-ban láttuk, hogy ha a golyó bármely éken q vsz.-gel tér el balra, és $p = 1 - q$ vsz.-gel jobbra, a keresett vsz.-re a következő rekurzív formula érvényes: $W(n, k) = p\,W(n - 1, k - 1) + q\,W(n - 1, k)$. [$n \geqq 1$; $W(n, k) \equiv 0$, ha $k > n$, $W(0, 0) = 1$.] Határozzuk meg $W(n, k)$-t kétdimenziós g. f. alkalmazásával.

Megoldás. Definíció szerint a $W(n, k)$-k g. f.-e $G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} W(n, k)\,z^n\,w^k$. Kössük ki, hogy $|z| < 1$ és $|w| < 1$; ilyen z, w-kre a kettős végtelen sor nyilván egyenletesen konvergens. Esetünkben k csak 0-tól n-ig futhat. Próbáljuk meg a rekurzív formulába behozni a g. f.-t. Képezzük a rekurzív formula mindkét oldalán a $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}$ szummát ($n = 0$-tól nem összegezhetünk, mert erre nem érvényes a rekurzív formula!). Ezt kapjuk: $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} W(n, k)\,z^n\,w^k =$

$$= p\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} W(n - 1, k - 1)\,z^n\,w^k + q\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} W(n - 1, k)\,z^n\,w^k.$$

Ez az összeg a bal oldalon csak az $n = 0$, $k = 0$ indexekhez tartozó $W(0, 0)$ $(=1)$ tagban különbözik a $G(z, w)$-től, $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} W(n, k)\,z^n\,w^k = G(z, w) - 1$. Most a jobb

oldali Σ-kat a g. f. *típusára* akarjuk hozni. A $W(n, k)$-k csak nem negatív n, k-ra vannak értelmezve, ezért $k < 0$-nál értelemszerűen 0-ok, vagyis $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} W(n-1, k-1)\, z^n w^k$ helyett $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} W(n-1, k-1)\, z^n w^k$-t írhatunk. $n - 1 = \nu$ és $k - 1 = \mu$ szerint összegezve, ez $= z w \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu+1} W(\nu, \mu)\, z^\nu w^\mu = z w \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} W(\nu, \mu)\, z^\nu w^\mu$, mert $\mu = \nu + 1$-nél a $W(\nu, \mu)$-k ismét $\equiv 0$-ok. Ez azonban nem más, mint $z w\, G(z, w)$, hiszen a szummációs index közömbös. Hasonlóan, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} W(n-1, k)\, z^n w^k = z \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu+1} W(\nu, k)\, z^\nu w^k = z \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu} W(\nu, k)\, z^\nu w^k = z\, G(z, w)$. Visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy: $G(z, w) - 1 = (pzw + qz) \cdot G(z, w)$, vagyis $G(z, w) = 1/[1 - (pw + q)\, z]$ (ez most kétváltozós g. f., amely $W(n, k)$-t szolgáltatja, s ezért nem azonos az 9. § 1. pl.-belivel, mert az csak fix n-nél szolgáltatja a binomiális eloszlás tagjainak egydimenziós g. f.-ét). Vegyük észre, hogy a módszer alkalmazását a (-1) konstans tag tette lehetővé, azonkívül az, hogy a rekurzív formulában az egyes vsz.-eknek sem szorzata, sem hatványa nem szerepelt. Így tehát pusztán a rekurzív formulából zárt alakban megkaptuk $G(z, w)$-t. Ha ezt sorbafejtjük, $z^n w^k$ együtthatója megadja a keresett $W(n, k)$-t. Mivel feltevéseink szerint $|q + pw)\, z| < 1$ $G(z, w)$ felfogható egy geometriai sor összegeként, s így $G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (pw + q)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} w^k$, vagyis $z^n w^k$ együtthatója $W(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, amint már korábban is láttuk. Megjegyezzük, hogy az egydimenziós pontrácson Brown-mozgást végző részecske adott számú elmozdulás után bizonyos pontban való tartózkodása vsz.-ét is ugyanezen rekurzív formula segítségével írhatjuk fel. — Jelen esetben a rekurzív formula *primitív* megoldása egyszerűbb. A g. f.-ek igazi ereje akkor mutatkozik meg, amidőn olyan rekurzív formulákat kell megoldanunk, amelyeknél a lépésről lépésre való megoldás — bonyolultsága miatt — szóba sem jöhet. Fontos momentum, hogy $G(z, w)$ hatványsorának együtthatóit nem parciális devriálásokkal kellett megállapítanunk (ez reménytelen lett volna), hanem annak folytán, hogy a sort közvetlenül elő tudtuk állítani, egyszerűen leolvashattuk őket. Mindig erre az estere igyekszünk is törekedni.

25. *A g. f. módszerének erejét láthatjuk meg az itt következő feladatnál.* A vegyiparban használt „frakcionáló megosztás" nevű eljárás lényege a következő: B és A nem elegyedő oldószerek egymás fölé vannak rétegezve (A alul van). B-be valamely homogén C anyagból, amely egyébként B-be és A-ba egyaránt átdiffundálhat, 1 grammot viszünk be. A diffúzió megindul: C molekulái A-ba is átjutnak. Fix T idő elteltével B-t (a benne maradt C-vel együtt) átvisszük egy újabb edény felső részébe, tiszta A fölé, az előző edénybe pedig az ott maradt A fölé tiszta B-t viszünk. Mindkét edényben C újabb diffúziója folyik le: az alsó folyadékban levő C-ből molekulák diffundálnak át a felsőbe és megfordítva. Az említett eljárást újból és újból (újabb edények beiktatásával) megismételjük; az előbb leírt (két edényes) „lépés" legyen az $r = 1$-edik lépés (a kiindulás a 0-adik), ennek megfelelően számozzuk a továbbiakat is. Annak a

vsz.-e, hogy T idő alatt C egy molekulája B-ből A-ba átmegy, legyen P; azé, hogy A-ban levő C molekula (ugyancsak T alatt) átmegy B-be, legyen Q. ($P + Q$ általában $\neq 1$!) Legyen az $r = n$-edik lépés után ($n = 0, 1, 2, \ldots$) az m-edik ($m = 0, 1, \ldots, n$; az első edény a „0" !) edény felső részében a C anyagból $Y_m^{(n)}$, alsó részében pedig $X_m^{(n)}$. A „nagy számok törvényei" alapján (igen sok molekula van !) mondhatjuk, hogy $Y_0^{(0)} = 1 - P$ és $X_0^{(0)} = P$ (g-ban !). Kimutatható, hogy az egyes anyagmennyiségek között (az átdiffundáló mennyiségeket a „nagy számok törvénye" alapján hozva a vsz.-ekkel kapcsolatba) a következő rekurzív egyenletrendszer áll fenn, ha bal oldalt a felső indexek $\geqq 1$: $Y_m^{(n)} = X_m^{(n-1)} Q + Y_{m-1}^{(n-1)} (1 - P)$, $X_m^{(n)} = X_m^{(n-1)} (1 - Q) + Y_{m-1}^{(n-1)} P$, és $Y_m^{(n)}$, $X_m^{(n)} \equiv 0$, ha $n, m < 0$ vagy $m > n$. — Kétváltozós g. f. segítségével határozzuk meg az $X_m^{(n)}$ és $Y_m^{(n)}$-eket s ezek $T_m^{(n)}$ összegét, amely nyilván az n-edik lépésnél az m-edik edényben található összes C mennyiségét adja meg; az eljárás szempontjából épp ez az érdekes.

10. §. HATÁRELOSZLÁSTÉTELEK

a) **A centrális határeloszlástétel**

A 4. §-ban a MOIVRE—LAPLACE-féle tétel kapcsán már láttuk, hogy egy ξ binomiális eloszlású vsz. v.-nál $(\xi - np)/\sqrt{npq}$ e. f.-ének t_1 és t_2 helyen vett értékei különbsége a (0,1) paraméterű normális e. f. ugyanezen helyeken vett értékeinek különbségéhez konvergál, ha a kísérletek száma, $n \to \infty$. A binomiális eloszlás v. é.-ének tárgyalásánál azonban láttuk, hogy ξ mindig felírható $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ alakban, ahol $\xi_k = 1$, ha a k-adik kísérletnél a vizsgált esemény bekövetkezett, az ellenkező esetben pedig $\xi_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n$; a ξ_k-k függetlenek). Mivel $\mathbf{M}(\xi_k) = p$, $\mathbf{D}^2(\xi_k) = pq$ volt, ζ_n normált alakja, $(\zeta_n - np)/\sqrt{npq}$, vagyis jelen esetben a viszonyok úgy is jellemezhetők, hogy bizonyos $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ azonos eloszlású független vsz. v.-k normált összege e. f.-e két helyen vett értékeinek különbsége a (0,1) paraméterű normális e. f. ugyanezen két helyen vett értékei különbségéhez konvergál, ha $n \to \infty$.

Ez azonban csak speciális esete egy általános tételnek, az ún. **centrális határeloszlástételnek** (a centrális szó a fontosságra utal). A tétel egyik híres megfogalmazása A. M. LJAPUNOV-tól* származik; ennek kissé modernizált alakja a következő:

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ összességükben független, külön külön tetszőleges e. f.-ű vsz. v.-k, amelyeknek létezik v. é.-e és sz. n.-e, legyen továbbá

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \text{ és } B_n^2 = \mathbf{D}^2\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \mathbf{D}^2(\zeta_n).$$

Ha található olyan szám, hogy $n \to \infty$ esetén

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\left[\,|\xi_k - \mathbf{M}(\xi_k)|^{2+\delta}\,\right] \to 0,$$

akkor $n \to \infty$ esetén x-ben egyenletesen

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{B_n}\left[\zeta_n - \mathbf{M}(\zeta_n)\right] < x\right\} \to \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, du;$$

vagyis a ξ_k *vsz. v.-k normált összegének* e. f.-e tart a (0, 1) paraméterű normális e. f.-hez; következésképp elég nagy n esetén ζ_n saját $[\mathbf{M}(\zeta_n)]$ v. é.-e körül jó közelítéssel normális eloszlású lesz, $\mathbf{D}^2(\zeta_n)$ sz. n.-tel.

Igaz továbbá a tétel akkor is, ha csak annyit tudunk, hogy a ξ_k-k abszolút értékükben közös korláttal bíró vsz. v.-k, amelyek sz. n.-einek pozitív közös alsó korlátja van. A gyakorlatban legtöbbször ezt az alakját használhatjuk fel.

Ha a normálás elmarad, akkor a tételbeli vsz. v.-k összegének e. f.-e aszimptotikusan tart az $\mathbf{M}(\zeta_n)$, $\mathbf{D}(\zeta_n) = B_n$ paraméterű normális e. f.-hez. — Egyforma e. f.-ű vsz.

* *Alekszandr Mihailovics Ljapunov* (1857—1918) orosz matematikus.

v.-k esetén vannak n és x-től függő becslések a LJAPUNOV-féle tétel bal és jobb oldala eltérésének abszolút értékére is; erre itt nem térhetünk ki.

b) A normális eloszlásfüggvény előfordulásának magyarázata

A centrális határeloszlástétel (főleg második megfogalmazásában) nyújt támpontot arra, mi van amögött, hogy a valóságban annyiszor találkozunk normális e. f.-ű vsz. v.-val. Ha pl. egy fizikai mennyiség nagyszámú olyan komponens összegeződéséből áll elő, amelyek független vsz. v.-k, és amelyekre a centrális határeloszlástétel valamelyik alakjának mellékfeltételei teljesülnek, ezen összeg e. f.-e a tétel szerint jól megközelíti a normális e. f.-t, *akármi* is legyen a komponensek e. f.-e. Ha tehát *normális eloszlású* vsz. v.-t észlelünk (pl. egy mérési eredmény esetében, amelynek e. f.-ét nagyjából normálisnak tapasztaljuk), gondolhatunk arra, hogy az előbb vázolt viszonyok vannak a háttérben (a tétel mellékfeltételeinek teljesülését is beleértve).

Közelítőleg normális e. f. fellépésének említett módjára példa: Egy város összes villamos energiafogyasztása az egyes fogyasztók fogyasztásainak összege. Utóbbiak abszolút értékükben közös korláttal bíró, pozitív közös alsó korlátú sz. n.-ű független vsz. v.-knak tekinthetők, amelyekre a centrális határeloszlástétel idevágó alakjának feltételei fennállanak. Bármilyenek legyenek is ezen vsz. v.-k e. f.-ei, összegüknek (az összfogyasztásnak) mint vsz. v.-nak az e. f.-e jó közelítéssel normális lesz.

Természetesen nem igaz, hogy a természetben mindenféle mennyiség e. f.-e normális. Nagyon is határozott eltérések vannak. A centrális határeloszlástétel nem nyújt többet mint normális e. f. *észlelése* esetén kézenfekvő magyarázatot, illetőleg egy mérhető mennyiség előállásának ismeretében (sok független faktor összege) alapot arra, hogy ezen mennyiség e. f.-ét *eleve* normálisnak tételezhessük fel.

Vannak tételek arra vonatkozólag is, mikor tart független vsz. v.-k normál, összegének *sűrűségfüggvénye* a normális s. f.-hez, ha a komponensek száma $\to \infty$. Erre azonban nem térhetünk ki. Ugyancsak nem foglalkozunk azzal, milyen feltételek mellett konvergál független, nem negatív egész értékű vsz.v.-k összegének eloszlása a POISSON-eloszláshoz.

c) Logaritmiko-normális eloszlásfüggvényhez való konvergencia

Előadódnak pl. olyan esetek is, amidőn egy vizsgált ζ_n mennyiség a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ nagyszámú független, *pozitív* vsz. v.-k szorzata: $\zeta_n = \xi_1 \cdots \xi_n$. Ekkor azonban $\log \zeta_n = \eta = \log \xi_1 + \ldots + \log \xi_n$ vagyis, n darab ugyancsak független vsz. v. összege. Ha ezekre fennállnak a centrális határeloszlástétel feltételei, nagy n esetén a $\log \zeta_n = \eta$ vsz. v. e. f.-e s így s. f.-e is közel normális. A 6. § 4. pl.-ban azonban láttuk, hogy ha egy η vsz. v. s. f.-e normális, e^{η} logaritmiko-normális s. f.-ű lesz, s így közelítőleg a fenti ζ_n is.

Bizonyos feltételek mellett tehát nagyszámú független, pozitív vsz. v. szorzatának s.f.-e jó közelítéssel logaritmiko-normális s. f. lesz.

Más általánosabb feltételek mellett egyéb típusokhoz való konvergencia is előadódhat; egy speciális esetben ekkor is a logaritmiko-normális s. f.-re jutunk. Sok tekintetben a logaritmiko-normálishoz is jobb ez az általánosabb kiindulás. (1. 10. § 7. pl.)

d) Stabilis eloszlásfüggvényhez való konvergencia

Mindeddig általában kikötöttük még a másodiknál magasabb momentumok létezését is. Ezt a kikötést elhagyva viszont az mondható ki, hogy:

Azonos tipusú e. f.-ű, független $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *vsz. v.-k alkalmas* A_n, B_n *paraméterekkel képezett* $\zeta_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/B_n - A_n$ *összegeinek e. f.-e valamely ún.* **stabilis eloszlásfüggvényhez** *konvergál, ha* $n \to \infty$, *ahol a stabilis jelleg definíciója: Egy* $F(x)$ *e. f. stabilis, ha tetszőleges valós* $a_1 > 0$, b_1, $a_2 > 0$, b_2 *esetén* $F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b)$, *ahol* $a > 0$ *és* b *állandók, amelyek az* a_1, a_2, b_1, b_2*-től függenek.*

Az előbbiek azt is jelentik, hogy elég nagy n esetén a $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ összeg e. f.-e jó közelítéssel valamelyik stabilis e. f. lesz.

A stabilis e.f.-eket egyértelműen jellemzi az, hogy k.f.-ük

$$\exp\,[i\gamma t - c|t|^{\alpha} \cdot \{1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)\}$$

alakú, ahol $c \geqq 0$, $|\beta| \leqq 1$, $0 < \alpha \leqq 2$, γ valós állandók és $\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)$ $(\alpha \neq 1)$, $\omega(t, 1) = (2/\pi)\log|t|$. Látható, hogy ide tartozik a normális és a CAUCHY-féle e. f. is. — Ha az előbbi tételben szereplő vsz. v.-k pozitív közös alsó korlátú sz. n.-e is létezik, ζ_n s. f.-e csakis a normális e. f.-hez konvergálhat (ezt *a)* alatt láttuk is). Általában azonban fennállhat pl. az is, hogy nagyszámú azonos típusú e. f.-ű független vsz. v. összegének e. f.-e közelítőleg CAUCHY-féle. — A legtöbb stabilis e. f. explicite nem ismert. További részletezésbe itt nem bocsátkozhatunk, bár gyakorlatban is előfordul stabilis e. f.-hez való konvergencia, magukról az egyes típusokról (pl. a sokszor szereplő CAUCHY-féle e.f.-ről) nem is beszélve. csak még egyszer rámutatunk arra, hogy *független, stabilis e.f.-ű vsz. v.-k összege ismét stabilis e.f.-ü vsz. v.* (vö. 6. §. 18. pl.; 9. §. 14. és 15. pl.)

Példák és feladatok

1. Igazoljuk, hogy a MOIVRE—LAPLACE-féle tétel speciális esete a LJAPUNOV-féle tétel modernizált alakjának.

Megoldás. Mivel egyszerű alternatívát produkáló kísérletek sorozatáról van szó, az n kísérlet közt a vizsgált esemény bekövetkezéseinek száma $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, ahol $\xi_k = 1$, ha a k-adik kísérletben a vizsgált esemény bekövetkezett, ellenkező esetben pedig $\xi_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ha $\mathbf{P}(\xi_k = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_k = 0) = q$, a modernizált LJAPUNOV-féle tételnél szereplő $\mathbf{M}(\xi_k) = p$ $B_n^2 = \mathbf{D}^2(\zeta_n) = npq$, $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}[|\xi_k - \mathbf{M}(\xi_k)|^{2+\delta}]$ pedig ($\delta < 0$-val) $n\,(|1-p|^{2+\delta} \cdot p + |-p|^{2+\delta} \cdot q$ lesz; ezt osztva $B_n^{2+\delta} = (npq)^{(2+\delta)/2}$-vel, a hányados $\to 0$, ha $n \to \infty$. Bármely $\delta > 0$ mellett tehát teljesül a tétel kritériuma, s így $[\zeta_n - \mathbf{M}(\zeta_n)]/B_n = (\sum_{k=1}^{n} \xi_k - np)/\sqrt{npq}$ e. f.-e a normálishoz fog tartani $(n \to \infty)$, ez azonban magában foglalja a MOIVRE—LAPLACE-féle tételt.

2. Igazoljuk, hogy ha $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n, \ldots$ különböző e. f.-ű, abszolút értékben közös korláttal rendelkező vsz. v.-k, amelyekre $\mathbf{D}^2(\xi_k) > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, normált összegükre igaz a (modernizált) LJAPUNOV-féle tétel.

Megoldás. A feltételekből következik, hogy találhatók olyan α_k, illetve β_k számok, hogy $\alpha_k \leqq \xi_k \leqq \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, minden k-ra ekkor $\mathbf{M}(\xi_k)$ és $\mathbf{D}^2(\xi_k) = \sigma_k^2 > 0$ véges (feltevéseink alapján a σ_k^2-eknek közös alsó korlátja (S) is van, és

$$\mathbf{M}[|\xi_k - \mathbf{M}(\xi_k)|^{2+\delta}] = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mathbf{M}(\xi_k)|^{2+\delta}\, dF_k(x),$$

ahol $F_k(x)$ a ξ_k e.f.-e. Az említett korlátosság folytán van olyan M (konst), hogy $|x-\mathbf{M}(\xi_k)|$ is $\leqq M$ (bármely k-ra), vagyis az integrálban végtelen nagy $|x-\mathbf{M}(\xi_k)|$ értékek fel nem léphetnek. Így tehát az integrál

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |x-\mathbf{M}(\xi_k)|^{2+\delta}\, dF_k(x) \leqq M^{2+\delta} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dF_k(x), = M^{2+\delta}$$

mivel $F(\beta_k) = 1$, hisz β_k-nál nem lehet nagyobb ξ_k értéke; hasonlóan $F(\alpha_k) = 0$. Mindezeket beírva a szóban forgó kritériumba, ez a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}[|\xi_k - \mathbf{M}(\xi_k)|^{2+\delta}]\right) \Big/ B_n^{2+\delta} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} M^{2+\delta}\right) \Big/ \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}\right)^{2+\delta} <$$

$$< \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}^{2+\delta}\right) \Big/ \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} S}\right)^{2+\delta}$$

alakot ölti, de az utóbbi $= (M^{2+\delta} n)/S^{2+\delta} n^{(2+\delta)/2}$, s ez $\to 0$, ha $n \to \infty$, vagyis a kritérium teljesül s a tétel érvényes. (A gyakorlatban legtöbbször ilyen vsz. v.-kal van dolgunk; ekkor a LJAPUNOV-féle tétel modernizált alakja mindig igaz.)

3. Igazoljuk, hogy ha $[\zeta_n - \mathbf{M}(\zeta_n)]/\mathbf{D}(\zeta_n) = \eta_n$ (0, 1) paraméterű normális s. f.-ű vsz. v., ζ_n $\mathbf{M}(\zeta_n)$, $\mathbf{D}^2(\zeta_n)$ paraméterű normális eloszlású vsz. v. lesz.

4. A centrális határeloszlástétel ismeretében keressünk magyarázatot arra, miért mutat közelítőleg normális eloszlást bizonyos korú férfiak magassága.

Megoldás. A következőképp képzelhető el a testmagasság kialakulása: A növekedést (bizonyos kortól kezdve) nagyszámú (N) különböző és (tegyük fel!) teljesen független ok létesíti. Mindegyik ok bizonyos ξ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) értékkel növeli (csökkenti) a testmagasságot; ξ_ν igen kis korlátok közt mozgó s így kis v. é.-ű vsz. v.-nak tekinthető. A végleges testmagasság a vizsgált életszakasz kezdetén meglevő m_0 és a $\sum_{\nu=1}^{N} \xi_\nu$ összege. Ha pl. a ξ_1-k a 10. § 2. pl.-beliek (ez utóbbi szinte triviális) a centrális határeloszlástétel egyik említett alakja értelmében $\sum_{\nu=1}^{N} \xi_\nu$ e. f.-e jó közelítéssel normális, és így az $m_0 + \sum_{\nu=1}^{N} \xi_\nu$ testmagasság-értékek is közelítőleg a normális s. f. szerint oszlanak meg, $m_0 + \mathbf{M}\left(\sum_{\nu=1}^{N} \xi_\nu\right)$ (vagyis nagyjából a tapasztalati adatok átlaga) körül (a ξ_ν-k kis v. é.-ei folytán véges N-nél nem lesz különösebben nagy az előbbi v. é.). — A valóságban a ξ_ν-k bizonyára nem függetlenek; (többek közt) S. BERNSTEJN azonban bebizonyította, hogy (külön definiált) *gyenge függés esetén is érvényes a centrális határeloszlástétel*, s így még ilyen körülmények mellett is várhatjuk a testmagasságra a közelítőleg normális eloszlást.

5. Magyarázzuk meg elfogadhatóan azt a *tapasztalatot*, hogy egy fizikai mennyiségre vonatkozó, megismételt mérés eredményei közelítőleg normális s. f.-nyel jellemezhető eloszlást mutatnak átlaguk körül.

6. Hosszú láncmolekulák viselkedését megpróbálták nagyjából leírni a következő modellel is. A molekula szemléltethető N számú egyenlő hosszú, végükkel egymáshoz kapcsolódó rúddal. Feltették, hogy mindegyik rúd a véletlentől függően minden irányban elhelyezkedhet a megelőzőhöz kötő csuklója körül, vagyis (véletlen) végpontja (a rákövetkező és előző rudaktól függetlenül) gömbfelületen mozoghat, és azon egyenletes eloszlású. Következésképpen a kezdő- és végpont távolsága, vagy ennek bizonyos irányra való vetülete vsz. v. Keressünk közelítő kifejezést az utóbbi e. f.-ére.

7. Valamely (fizikai, biológiai) rendszer állapotát egymás után jelentkező okok befolyásolják. *A végső állapot kialakulása sokszor megmagyarázható a következő modellel:* A rendszer állapotát jellemezze a kísérlet elején az $\eta_0 = y_0 > 0$ mennyiség, a ν-edik ok hatása után pedig $\eta_\nu > 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). A ν-edik behatás után az állapotváltozást $\eta_\nu - \eta_{\nu-1}$ jellemzi. Ez a megváltozás legyen arányos a behatást jellemző ξ_ν mennyiséggel, amely vsz. v. és a ν-edik hatás előtti $\eta_{\nu-1}$ állapotjelző *valamilyen* $g(\eta_{\nu-1})$ függvényével. (Az arányossági tényező $g(\eta_{\nu-1})$-be is beleolvasztható.) η_ν is nyilván vsz. v. Ha a ξ_ν-k a 10. § 2. pl.-beliek és az $(\eta_\nu - \eta_{\nu-1})$-ek kicsik, mi lesz az N-edik behatás után fellépő állapot η_N jellemzőjének s. f.-e, ha a ξ_ν-k teljesen függetlenek, és N nagy szám?

Megoldás. Feltevéseink szerint $\eta_\nu - \eta_{\nu-1} = \xi_\nu\, g(\eta_{\nu-1})$ (az arányossági tényezőt beleolvasztottuk $g(\eta_{\nu-1})$-be). A tett feltevések alapján a ξ_ν-kre a centrális határeloszlástétel feltételei igazak, és $\xi_1 + \ldots + \xi_n = \zeta_n = \sum_{\nu=1}^{N} (\eta_\nu - \eta_{\nu-1})/g(\eta_{\nu-1}) \approx$

$$\approx \int_{y_0}^{\eta_N} \frac{dy}{g(y)} \equiv G(\eta_N)$$

közelítőleg $f(x)$s. f.-ű normális eloszlású lesz, véges paraméterekkel.

Ebből kellene megállapítanunk η_N s. f.-ét. Tegyük fel, hogy η_N értékkészletén $G(x)$ monoton differenciálható függvény (amelynek deriváltja sehol sem 0); akkor $G^{-1}(x)$ is az. Ekkor alkalmazhatjuk a vsz. v. függvénye s. f.-éről szóló tételt; eszerint η_N s. f.-e, $l(y)$-ra: $l(y) = f[G(y)] \left|\frac{dG(y)}{dy}\right|$, mivel pedig ζ_N s. f.-e közelítőleg általában $f(x) = \exp\,[-(x-m)^2/2\sigma^2]/\sqrt{2\pi}\,\sigma$ típusú, ($m, \sigma > 0$ konst),

$$l(y) = \exp[-(G(y)-m)^2/2\sigma^2]/\sqrt{2\pi}\sigma \left|\frac{dG(y)}{dy}\right| = \exp\left[-(1/2\sigma^2)\left(\int_{y_0}^{y} \frac{dv}{g(v)} - m\right)^2\right] \Big/ \sqrt{2\pi}\sigma g(y),$$

ahol y az η_N-re megengedett határok között mozoghat, egyébként $\equiv 0$ a $g(y)$. Adott esetben persze a tapasztalati (az $l(y)$-nak megfelelő) s. f. alapján kell kikövetkeztetni, milyen a $g(y)$ függvény alakja. — Megjegyzendő, hogy $g(y) =$ konst. esetén $l(y)$ normális s. f. lesz; az emberek testmagasságának vizsgálatánál tehát nyilván ezt a $g(y)$-t kell feltételezni.

8. Egyes mikroorganizmusok növekedését a következő modellel jellemezhetjük: Megfigyelésünk kezdetén az organizmus alakját jellemezze az $y_0 > 0$ konstas. Egymás

után következő időpontokban különböző véletlen behatások érik az organizmust. Az első hatás után az organizmus alakját jellemezze az η_1 vsz. v.; az alak*változásra* jellemző $\eta_1 - y_0$ arányos lesz az eredeti alakot jellemző y_0-val és a behatást jellemző ξ_1-gyel, amely maga is vsz. v., vagyis $\eta_1 - y_0 = k_1 \xi_1 y_0$ (k_1 arányossági tényező). Ez a mechanizmus ismétlődik a következő behatásoknál is; általában, ha a ξ_ν-vel jellemzett ν-edik hatás fellépése után az organizmus alakját jellemző vsz. v. paraméter $\eta_{\nu-1}$-ről η_ν-re nőtt, $(\eta_\nu > 0)$, $\eta_\nu - \eta_{\nu-1} = k_\nu \xi_\nu \eta_{\nu-1}$ (a k_ν arányossági tényező; $\nu = 1, \ldots, N$). Ha az egyes ξ_ν-k (s így a k_ν-k is) teljesen függetlenek, mi lesz az organizmus (nagy) N számú behatás eredményeként kialakult alakját jellemző η_N vsz. v. közelítő e. f.-e? (Egyszerűség kedvéért engedjük meg, hogy a ξ_k-k a 10. § 2. pl.-ban vsz. v.-k és az $\eta_\nu - \eta_{\nu-1}$-ek kicsik.)

Megoldás. Alkalmazhatjuk az előző példa gondolatmenetét, ha az ottani ξ_ν-nek $k_\nu \xi_\nu$-t és az ottani $g(\eta_{\nu-1})$-nek $\eta_{\nu-1}$-et veszünk, mert a $G(\eta_N) \equiv \int_{y_0}^{\eta_N} \frac{dy}{g(y)} = \log(\eta_N/y_0)$ függvény monoton, inverze differenciálható és a deriváltja sehol sem 0 η_N itt szóba jövő ($y_0 \leqq N < \infty$) értékkészletén, vagyis η_N s. f.-e jó közelítéssel

$$\exp\left[-(1/2\sigma^2)\,[\log(y/y_0) - m]^2\right]/\sqrt{2\pi}\,\sigma\, y$$

— azaz logaritmiko-normális lesz a $(0 \leqq y < \infty)$-en (egyébként $\equiv 0$). A vizsgált organizmus nagysága tehát egyáltalán nem mutat normális eloszlást. A közölt modellt a kísérletek megerősítették. — $g(\eta_{\nu-1}) = \eta_{\nu-1}$ folytán *jelen esetben* η_N $\eta_N = \zeta_1 \cdots \zeta_N$ *alakra is hozható (a* ζ_i*-k összességükben függetlenek és pozitívok!); ekkor a repetitórium — részben említett módon jutunk a logaritmiko-normális s. f.-re. (Az előző példában közölt meggondolás azonban szélesebb körben is használható, mint a szorzat-eset).* — A jelen példához teljesen hasonló meggondolással találkozunk annál a problémánál, hogy valamilyen *aprítási folyamatnál* (pl. gépi kőtörés) igen sok (N) aprítási lépés (újból való törés) után végül is mi lesz *egy találomra kivett darabka* (valamilyen módon definiált) η_N *méretének* — amely nyilván vsz. v. — *az e. f.-e*, ha a folyamat kezdetén $y_0 > 0$ volt az aprított anyag mérete. Itt ti. ismét feltehető, hogy ha az a darab, amelyből végül is a vizsgált részecske származik, a ν — 1-edik lépésnél $\eta_{\nu-1}$, a ν-ediknél pedig η_ν méretű volt $(\eta_\nu > 0;\ \nu = 1, 2, \ldots, N)$, $\eta_\nu - \eta_{\nu-1} = k_\nu \xi_\nu \eta_{\nu-1}$, ahol a ν-edik törés hatását a ξ_ν vsz. v. jellemzi, az $\eta_\nu - \eta_{\nu-1}$-ek kiesik és a ξ_ν-k a 10. § 2. pl.-beli vsz. v.-k, a k_ν-k pedig arányossági tényezők, amelyeket tulajdonképp a ξ_ν-kbe bele lehetne olvasztani. Így tehát alkalmazhatjuk a feladat gondolatmenetét, vagyis azt kapjuk, hogy itt is közelítőleg *logaritmiko-normális* lesz η_N/y_0 e. f.-e (vagyis η_N-é is). Ennek a ténynek fontos szerepe van törőgépek minimális energiaszükséglettel történő működési feltételei megállapításánál.

9. Valamilyen élettani kísérletben a látóideget vizsgáljuk. Az ingerlő okot (pl. a megvilágítást) valamilyen kezdeti értéktől kiindulva, kis adagokkal folyton növeljük. Jellemezze az ideg ingereltségét kiinduláskor az y_0 (konst), a ν — 1-edik $\Delta_{\nu-1}$ adag után az $\eta_{\nu-1}$ mennyiség $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$, a maximális lehetséges ingereltséget y_m (konst). Újabb adagnál az ingereltséget η_ν fogja jellemezni. Egy klasszikus élettani törvény szerint $\eta_\nu - \eta_{\nu-1} = K_\nu \Delta_\nu (y_m - \eta_{\nu-1})$ (az ingereltség fokának növekedése arányos a maximálisan lehetséges és kiindulási ingereltségi állapot különbségével és az adag nagyságával). K_ν egyénenként véletlenszerűen más és más, s így vsz. v.-nak

tekinthető, amelyeket a 10. § 2. pl.-belieknek tételezhetünk fel. Az ingereltség foka is vsz. v. tehát. Ha az ingereltség eléri az η_N-nel jellemezhető ingerküszöböt, tudomásunkra jut. A 10. § 7. pl. alkalmazásához szükséges feltételeket megengedve vizsgáljuk meg, hogy az ingerküszöböt jellemző η_N-nek mi lesz az e. f.-e, ha N elég nagy. (Ez nagyjából azonos az ingerküszöbnek azzal az e. f.-ével, amelyet sok egyénen végzett kísérletekből állapíthatunk meg.)

10. Milyen feltételek mellett fog a 10. § 7. pl.-ban szereplő η_N vsz. v. s. f.-e a PEARSON-féle típusok közé tartozni?

AZ A) RÉSZ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. §. *A valószínűségszámítás tárgya. Események, eseményalgebra*

1. *a)* Szükségszerű esemény. *b)* Megismétlődő véletlen esemény, minthogy adott helyen előre kiszámíthatatlanul, sokszor megismétlődik. *c)* Megismétlődő véletlen esemény. *d)* Szükségszerű esemény. (A hely geológiai viszonyai eleve meghatározzák.) *e)* Egyszer bekövetkező véletlen esemény, mert a körülmények összessége, a „kísérlet" nem ismételhető meg. *f)* Megismétlődő véletlen esemény (a célbalövés újból és újból elvégezhető).

2. A 10 dobás közt *legalább egy* 4-es van.

3. 1.: Ekkor I. elromlik, ugyanakkor II. nem és III. sem. (II. nem romlik el): $\bar{B}$, (III. nem romlik el): $\bar{C}$. Nyilván A, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ együttes fennállásáról van szó, s így a keresett esemény $A\bar{B}\bar{C}$. 2. hasonló okoskodással: $AB\bar{C}$. 3. ABC. 4. az „esemény-összeg" definíciójának értelmében $A + B + C$. 5. Elromolhat I. és II., I. és III., II. és III. Ha I. és II. romlik el, ez AB; hasonlóan a többiek AC, illetve BC. Ezek közül legalább egy fennáll, tehát az eredmény $AB + AC + BC$. 6. A szóban forgó esemény így valósulhat meg: Vagy I. romlik el, és II. és III. nem ($= A\bar{B}\bar{C}$), vagy: II. romlik el, és I. és III. nem ($= \bar{A}B\bar{C}$), vagy: III. romlik el, és I. és II. nem ($= \bar{A}\bar{B}C$); ez más szóval $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$. 7. Megvalósulási lehetőségek: Elromlik I. és II., III. nem; vagy: I. és III., és II. nem, vagy: II. és III., és I. nem. Ezek az események $AB\bar{C}$; $A\bar{B}C$; $\bar{A}BC$; s a keresett $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$. 8. nyilván $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. 9.: Nézzük ennek az ellentétjét, ez: mindhárom elromlik ($= ABC$), s így a keresett esemény $\overline{ABC}$. — Vegyük észre, hogy $\bar{A}\bar{B}\bar{C} = \overline{A + B + C}$ és $\overline{ABC} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$.

4. $T_1 = T_2$ esetén triviálisan $A = B$. Ha $T_1 < T_2$, A maga után vonja B-t, tehát $A \subseteq B$; hasonlóan $T_2 < T_1$ esetén $B \subseteq A$.

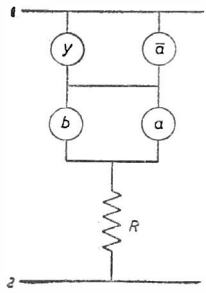
6. A II. 2., V. 1., III. 1. és IV. 3. axiómákból: $AB + \bar{A}B = BA + B\bar{A} = B(A + \bar{A}) = BI = B$.

7. A IV. 3. és III. 1. axióma alapján $B = BI = B(A + \bar{A})$; ezzel $A + B = A + B(A + \bar{A}) =$ (l.: V. 1., II. 2. és I. 3.) $= A + AB + \bar{A}B =$ (l. 1. § 2. pl.) $= A + \bar{A}B$.

8. Mivel az V. 1. és III. 1. axióma szerint $AB + A\bar{B} = A(B + \bar{B}) = AI = A$, tehát $AB + A\bar{B} + \bar{A}B = A + \bar{A}B$, s ez a korábbiak szerint $= A + B$. Értelmezve ez pl. igen szemléletes: $A + B$: (A és B közül legalább az egyik) = (A következik be és B nem, vagy B és ugyanakkor A nem, vagy A és B mindketten). Így $A + B = A\bar{B} + B\bar{A} + AB$; utóbbiak kizárják egymást.

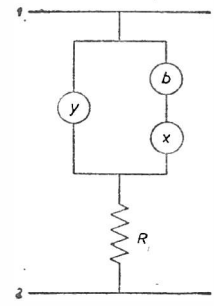
15. Jelöljük az első kapcsolási elemösszességet egyetlen jellel, F-fel. F, mint újabb kapcsolási elem, $x, y, \ldots$-nal a következőképp fejezhető ki a BOOLE-algebra alapján: $F = yx + \bar{z}x + yz$. Ezt a kifejezést az axiómák, illetve korábbi példáink segítségével

átalakíthatjuk: Hozzáadunk o-t, $x\bar{x}$ alakban, azután szorzattá alakítjuk át: $F = yx + x\bar{x} + z\bar{x} + yz = (y + \bar{x})(z + x)$ (az V. axióma alapján), amely azt jelenti, hogy BOOLE-algebrai többtagúak éppúgy szorozhatók össze, mint a közönséges algebraiak. Az eredmény azonban a jobb oldali kapcsolást jelenti.



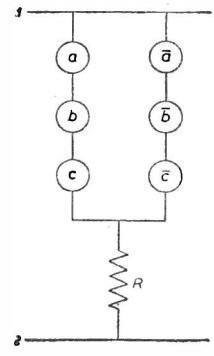
29. ábra

16. A kapcsolás: $F = (\bar{x}y + xy + x\bar{y})\, ya + b(\bar{a} + y) = xyya + x\bar{y}ya + xyya + b\bar{a} + by = xya + x\bar{y}a + b\bar{a} + by = ay(x + \bar{x}) + b\bar{a} + by = ay + b\bar{a} + by = ay + a\bar{a} + by + b\bar{a} = (y + a)(b + a)$, ami a 29. ábrán látható (ugyanolyan típusú, mint az előző fel. végeredménye). — Az eddigi példákban szereplő kiinduló kapcsolás felléphet bizonyos célra szolgáló berendezés megtervezésénél; látjuk, mennyivel egyszerűbben is megvalósítható (kevesebb a szimultán működő kapcsoló is). Hasonló kapcsolások találhatók elektronikus digitális számológépekben. Ezek tervezésénél is szükség van a BOOLE-algebrára.* — A megoldásban minimális számú elem van. Esetleg többféle megoldás is lehetséges.



30. ábra

17. A kapcsolás: $F = x[(y + b)\, x + y(\bar{x} + x\bar{y})] + x[(y + d)\, x + (a + a\bar{x})y] = (y + b)\, x + xy(\bar{x} + x\bar{y}) + x\bar{x}(y + d) + (a + a\bar{x})\, xy = yx + bx + axy + axy = xy + bx + x\bar{y}\,(a + \bar{a}) = y(x + \bar{x}) + bx = y + bx$ vagyis a 30. ábrabeli. a, d teljesen kiestek.



31. ábra

18. Ha az első kapcsolást mint egyetlen F kapcsolási elemet fogjuk fel, és a keresettet X-szel jelöljük, az ellentétes működés azt jelenti, hogy $X = \bar{F}$-nak kell lennie. Könnyen felírható, hogy $F = a(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{a}(b + c)$. Az 1. § 11. pl.-ban láttuk, hogyan kell képezni egy szorzatokból álló összeg ellentettjét. Ennek alapján: $\bar{F} = [\bar{a} + \overline{(\bar{b} + \bar{c})}]\ [a + \overline{(b + c)}] = [\bar{a} + bc]\ [a + \bar{b}\bar{c}] = abc + a\bar{b}\bar{c}$; ezt felrajzolva a 31. ábra mutatja. — Érdekes szóban is kifejezni, mit jelentenek utóbbi fel.-ink végeredményei. Az 1. § 18. fel.-é pl. egy olyan kapcsolást szimbolizál, amely csak akkor enged át áramot, ha az a, b, c kapcsolók vagy mind nyitva, vagy mind zárva vannak. (Ilyen, illetve ehhez hasonló kapcsolás felhasználható pl. egy bizottság szavazásánál, ha a döntéshez egyhangú rászavazás kell: Igennel szavazó bekapcsolja a nála levő a (b, c) kapcsolót; R legyen egy villanylámpa; egyhangú igen (nem) szavazásnál az R lámpa kigyullad.)

2. §. Események valószínűsége

1. A fiúszületések relatív gyakorisága 510/1000 és 517/1000 között ingadozik. Definíció szerint e két szám közé kell rendelnünk a fiúszületés vsz.-ét, p-t. A közölt kísérletsorozat alapján

* Érdekes megemlíteni, hogy az emberi idegrendszer működésével kapcsolatos egyes problémák tárgyalásánál is jól felhasználható a BOOLE-algebra.

azt kell mondanunk, hogy $0{,}510 \leqq p \leqq 0{,}517$. Hosszabb megfigyeléssorozat esetén inkább a 0,516 értéket kapjuk (az adatokat nem közöljük).

5. A teljes eseményrendszer definíciója értelmében $\sum_{i=1}^{n} A_i = I$ és $A_i A_k = O$ $(i \neq k)$ így tehát az előző pl. értelmében $\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}(I) = 1$, amit bizonyítanunk kellett. Definícióink és axiómáink értelmében a tétel $n = \infty$-re is igaz.

6. Nem, mert a szereplő események teljes eseményrendszert alkotnak, s így vsz.-eik összegének 1-nek kell lennie; ez pedig adataink mellett nem áll fenn.

7. Feltevés szerint $(t, t + \Delta t)$ alatti bármely okból történő elhalálozás $p\,(t, t + \Delta t)$ vsz.-e $a(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$. A feladat értelmében $\mathrm{P}_1(t, t + \Delta t)$ alatt korától független okból hal meg az egyén] $= A\,\Delta t$, $\mathrm{P}\,[(t, t + \Delta t)$ alatt korától exponenciálisan függő okból kifolyólag hal meg az egyén] $= B\,e^{ct}\,\Delta t$ (A, B, c konst). Mivel az elhalálozás vagy az egyik, vagy a másik okból állhat be, $p\,(t, t + \Delta t) = A\,\Delta t + B\,e^{ct}\,\Delta t$, s így határesetben $a(t) = A + B\,e^{ct}$, (t persze korlátos). Ez az ún. *Makeham-féle formula*, amelyet elhalálozási táblázatok készítésénél használnak az életbiztosításban.

9. Az az esemény, hogy (a férj idősebb 40-nél, a feleség pedig fiatalabb 40-nél vagy 40) $= A\bar{C}$. Nyilván $A\bar{C} \subseteq B$, és így idevágó tételünk szerint $\mathrm{P}(A\bar{C}) \leqq \mathrm{P}(B)$.

11. $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$ (itt $AB \neq O$). A kivevés szempontjából a „lehetséges" esetek száma n, az A-ra „kedvezőké" $k + l$, s így $\mathrm{P}(A) = (k + l)/n$, hasonlóan $\mathrm{P}(B) = (k + a)/n$ (B-re „kedvező eset" $k + a$ van). AB: (egy alkatrész (+) és az 1.-en készült), s így az erre „kedvező" esetek száma k/n, vagyis $\mathrm{P}(A + B) = (k + a + l)/n$, ami közvetlenül is belátható.

12. Az 1. § 6. fel. szerint $B = AB + \bar{A}B$, s mert $AB \cdot \bar{A}B = O$, $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(AB + \bar{A}B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\bar{A}B)$, amiből állításunk már következik. — Ha $A \subseteq B$, $AB = A$, s ennek folytán $\mathrm{P}(\bar{A}B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$.

13. Legyen A: [$(0, t_1)$-ben jön be a hívás], B: [$(0, t_2)$-ben]. A keresett esemény $B\bar{A}$. Mivel azonban $A \subseteq B$, a 2. § 12. fel. alapján $\mathrm{P}(B\bar{A}) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$.

14. Ha a felsorolt események rendre B_1, B_2, B_3; $B_3 = \bar{B}_1 B_2$, és így a 2. § 12. fel. nyomán $\mathrm{P}(B_3) = \mathrm{P}\,(\bar{B}_1 B_2) = \mathrm{P}(B_2) - \mathrm{P}(B_1 B_2)$.

16. Az összes szóban forgó esetek:

Rudacska	Kocka	Rudacska	Kocka
előírt	nagyobb furatú	vékonyabb	előírt furatú
előírt	kisebb „	vastagabb	kisebb „
vastagabb	előírt „	vékonyabb	nagyobb „

Az összes „lehetséges" esetek (bármely rudacska- és kockapár) száma $10 \cdot 20$. A „kedvezők" száma a felsorolt eseteknek megfelelően $7 \cdot 1$; $7 \cdot 3$; $2 \cdot 16$; $1 \cdot 16$; $2 \cdot 3$; $1 \cdot 1$;

az egyes esetekben tehát a vsz.-ek 7/200, . . . , 1/200; mivel az egyes kombinációk kizárják egymást, és a szóban forgó eset bármelyikénél beáll, a keresett vsz. 7/200 +...+ + 1/200 = 83/200.

17. Az egyes hívások kizárják a többit; a keresett vsz. P (vagy 30 az utolsó két jegy, vagy 31, . . . , vagy 39) $= p_{30} + p_{31} + \ldots + p_{39}$. p_{ik} nyilván függhet az előző jegyektől is; ha megengedjük (bár nagy megkötés), hogy a közölt esetben $p_{ik} = p$, $\sum_{i=0}^{9}\sum_{k=0}^{9} p_{ik} = 100\,p$ definíció szerint $= 1$, s így $p = 1/100$; $\sum_{k=0}^{9} p_{3k} = 10\,p$, vagyis a keresett vsz. 1/10.

18. *a)* A 2. § 17. fel.-ban láttuk, hogy feltételeink mellett bármely (i, j) kontaktus kapcsolásának 1/100 a vsz.-e. Azt kell most összeszámlálnunk, hány olyan (i, j) kontaktus van, amelynek kapcsolásához 0,66 sec-nál kevesebb idő kell. Ha k ilyen van, a kívánt vsz. az összeadási axióma alapján nyilván $k/100$. Az (ij) kapcsolásához szükséges idő $T = 0{,}25 + i \cdot 0{,}10 + 0{,}15 + j \cdot 0{,}10 = 0{,}40 + (i + j) \cdot 0{,}10$ másodperc. Azok az (i, j)-k felelnek meg, amelyekre $T \leqq 0{,}66$ sec. Ezek (0,0) (01), (02), (10). (11), (20), vagyis számuk $k = 6$, és a keresett vsz. 0,06. *b)* Egyszerűbb az ellentett esemény vsz.-ét kiszámítani, vagyis $\mathrm{P}(T \leqq 0{,}66$ sec vagy $T \geqq 1{,}50$ sec$) =$ $= \mathrm{P}\,(T \leqq 0{,}66$ sec$) + \mathrm{P}\,(T \geqq 1{,}50$ sec) értékét. Az első tag ugyanaz, mint *a)*-nál, a másodiknál a „kedvező" (ij)-k: (29), (39), (38), (49), (48), (47), (59), (58), (57), (56), (69), (68), (67), (66), (79), (78), (77), (88), (89), (99) és az ezekből az ij felcserélésével kapható párok, összesen 36 pár. $\mathrm{P}(T \geqq 1{,}50$ sec) tehát 0,36, és a kiinduló ellentett esemény vsz.-e 0,06 + 0,36 = 0,42, a keresett pedig (vö. a 2. § 3. pl.-val) 1 − 0,42 = 0,58.

19. A problémát felfoghatjuk úgy, hogy rögzítjük a játékvezető által észlelt színsorozatot (pl. *V F F V F V V F*), majd azt a színsorozatot, amelyet a partner mondott, s annak a vsz.-ét keressük, egyezik-e a két sorozatban valamelyik hat elem. — Rögzítsük a játékvezető színsorozatát. Állítsunk elő ebből olyanokat, amelyekben csak pont 6 elem ugyanaz. Ilyet csak úgy állíthatunk elő, ha egy *V*-t és egy *F*-et felcserélünk. Mindegyik *V*-t mindegyik *F*-fel felcserélhetjük, összesen tehát 4^2 kívánt színsorozat állítható elő. Ezen utóbbiak persze bele tartoznak az összes különböző színsorozatok közé, melyek száma a négy db *V*-ből és négy db *F*-ből képezett ismétléses permutációk száma, 8 !/4 ! 4 !. Ha most a partner bármely színsorozatot egyforma vsz.-gel mond be, a feladat szempontjából „kedvező eset" a fenti 4^2 számú eset (amelyben 2 szín tér el a játékvezető által fixált sorozattól). „Lehetséges eset" pedig 8 !/4 ! 4 ! van, a keresett vsz. tehát ezek hányadosa, = 8/35.

21. A FERMI—DIRAC-statisztika esetében így okoskodunk: A pontok megoszlását szemléltessük úgy, hogy G urnába N golyót osztunk el úgy, hogy mindegyikbe 0 vagy 1 juthat csak. Egy *adott* golyómegoszlás ekkor csak egyféleképp valósulhat meg, mert nincs megkülönböztetés, kettő felcserélése nem ad új megoszlást. Az összes lehetséges megoszlások száma annyi, ahányféleképp kiválaszthatók azok az urnák, amelyek majd tartalmaznak golyót: $\binom{G}{N}$ (a többi üresen marad). A keresett vsz. tehát $1/\binom{G}{N}$. A BOSE—EINSTEIN-statisztikánál ugyanezzel a modellel élünk. Itt is csak egyféleképp jöhet létre *adott* megoszlás: az urnák közti golyócserék nem adnak új megoszlást, hiszen a golyók megkülönböztethetetlenek. Az összes lehetséges megoszlásokat úgy kaphatjuk meg, hogy az N golyót sorba rakva képzeljük, majd $G - 1$ „választófalat"

osztunk szét találomra köztük, s az első urnába annyi golyót teszünk, ahány golyó a golyósor bal vége és az első választófal között van, a másodikba, ahány az első és második választófal között van é. í. t. Ha két választófal közt nincs golyó, a megfelelő urnába nem kerül semmi. A választófalak összes lehetséges megoszlásának megfelel a golyók összes lehetséges megoszlása az urnákban: Ezek számát tehát a választófalak összes lehetséges megoszlásainak száma adja meg. A választófalaknak és golyóknak együtt $N + G - 1$ hely áll rendelkezésre, úgy, hogy ahová nem esett választófal, oda golyó kerül. A választófalakat tehát $\binom{N+G-1}{G-1}$-féleképp oszthatjuk szét (a fentmaradt helyekre kerülnek a golyók). Ez lesz tehát az összes golyómegoszlások száma is, és így a keresett vsz. $1 \Big/ \binom{N+G-1}{G-1} = 1 \Big/ \binom{N+G-1}{N}$.

— Az itt kapott kombinatorikus kifejezések *analitikus kifejezésekkel való közelítéseit* alkalmazzuk aztán az egyes „statisztikák" ismert alapképleteinek levezetésénél.

23. Legyen B_i: (A az i-edik hónapban következik be) ($i = 1, 2, \ldots, 12$). Nyilván $B_1 + \ldots + B_{11} + B_{12} = A$, és a B_i-k egymást kizárják. Legyen $B_1 + \ldots + B_{11} = C$. $\mathrm{P}(B_{12}/\bar{C})$ értékét keressük. $\bar{C}$: (az első 11 hó egyikében sem következett be A). A feltételes vsz. képlete alapján $\mathrm{P}(B_{12}/\bar{C}) = \mathrm{P}(B_{12}\,\bar{C})/\mathrm{P}(\bar{C}) = \mathrm{P}(B_{12})/\mathrm{P}(\bar{C})$, mert B_{12} maga után vonja $\bar{C}$-t ($B_{12} \subseteq \bar{C}$), és így $B_{12}\,\bar{C} = B_{12}$. Mivel a B_i-k egyenlően vsz.-ek $\mathrm{P}(B_1) = \ldots = \mathrm{P}(B_{12})$, és így $p = \mathrm{P}(A) = 12\,\mathrm{P}(B_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, 12$), illetve $\mathrm{P}(B_i) = p/12$. Továbbá: $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(B_1) + \ldots + \mathrm{P}(B_{11}) = (11/12)\,p$ és $\mathrm{P}(\bar{C}) = 1 - \mathrm{P}(C) = 1 - (11/12)\,p$. Végül is $\mathrm{P}(B_{12}/\bar{C}) = (p/12)/[1 - (11/12)\,p] = p/(12 - 11\,p)$.

24. Legyen A: (egy júniusi napon zivatar van); B: (egy júniusi napon jégeső esik). A és B általában nem függetlenek. A relatív gyakoriság és vsz. kapcsolata alapján feladatunk szerint $\mathrm{P}(A) \approx 6/30 = 0{,}2$, $\mathrm{P}(B) \approx 3/30 = 0{,}1$, továbbá $\mathrm{P}(B \mid A) \approx 0{,}4$. $\mathrm{P}(B\bar{A})$-t kell meghatároznunk. $\mathrm{P}(B\bar{A}) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(BA)$ (l. 2. § 12. feladat) $= \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(A) \approx 0{,}02$.

26. Legyen N szakasz, és legyen A_i: (az i kísérletnél nem találunk az optimális szakaszra). Ekkor a keresett esemény nyilván $A_1 A_2 \cdots A_{k-1} \bar{A}_k = B$. A faktorok nem függetlenek, ezért $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot \cdots \mathrm{P}(A_{k-1} \mid A_1 \cdots A_{k-2}) \cdot \mathrm{P}(\bar{A}_k \mid A_1 \cdots A_{k-1})$. De (az egyenlően vsz.-esetek rögzítése folytán) $\mathrm{P}(A_1) = (N-1)/N$ (N „lehetséges" közt $N - 1$ „kedvező" eset van arra, hogy nem találunk az optimális szakaszba). $\mathrm{P}(A_2 \mid A_1) = (N-2)/(N-1)$ (az első kísérlet szakaszát kihagytuk; a $N - 1$ számú maradék (egyenlően vsz.) szakasz közül $N - 2$ „kedvező") é. í. t. $\mathrm{P}(A_{k-1} \mid A_1 \cdots A_{k-2}) = (N - k + 1)/(N - k + 2)$ és $\mathrm{P}(\bar{A}_k \mid A_1 \cdots A_{k-1}) = 1/(N - k + 1)$. Ezekkel az értékekkel $\mathrm{P}(B) = 1/N$, azaz k-tól független.

27. Legyen A_i: (az i-edik ($i = 2, \ldots, 5$) vizsgálat eredménye: hibás). Akkor a keresett esemény, $B = A_1 A_2 \cdots A_{k-1} \bar{A}_k$ ($i = 1$-nél pedig $B = \bar{A}_1$). Ennek vsz.-ét a nem független események szorzata vsz.-ének képletével egyszerű külön kiszámítanunk minden k-ra; pl. $k = 1$-re $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\bar{A}_1) = 6/10$; $k = 2$-re $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(\bar{A}_2 \mid A_1) = (4/10) \cdot (6/9) = 0{,}266$; $k = 3$-ra $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(\bar{A}_3 \mid A_1 A_2) = (4/10)\,(3/9)\,(6/8) = 0{,}1$ é. í. t.

29. Az átvétel akkor történik meg, ha a mintában $k = 0$ selejtes lesz, ennek a vsz.-e pedig a 2. § 28. pl. végeredményét felhasználva: $\binom{N-M}{n} \Big/ \binom{N}{n}$.

30. *a)* Legyen A_i: (egy moszkitó az i-edik adag alkalmazásnál elpusztul). Akkor a szóban forgó esemény, $B = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_k$. Ezek az események nem függetlenek, s így $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\bar{A}_1)\,\mathrm{P}(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) \cdots \mathrm{P}(\bar{A}_k \mid \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{k-1})$. A feltételek vsz.-számítási értelmezése azonban közelítőleg azt adja, hogy $\mathrm{P}(\bar{A}_1) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(\bar{A}_3 \mid \bar{A}_1 \bar{A}_2) = 0{,}2, \ldots$, $\mathrm{P}(\bar{A}_k \mid \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1}) = 0{,}8/2^{k-1}$. Ebből tehát $\mathrm{P}(\bar{A}_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $\mathrm{P}(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) = 0{,}6, \ldots$ (az ellentett eseményre vonatkozó összefüggés feltétel esetén is igaz! (l. a 2. § 31. pl.-t!)] $\ldots$, $\mathrm{P}(\bar{A}_k \mid \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{k-1}) = 1 - 0{,}8/2^{k-1}$, és így $\mathrm{P}(B) = \prod_{i=1}^{k}(1 - 0{,}8/2^{i-1})$. *b)* A szóban forgó esemény vsz.-e $\mathrm{P}(B \mid \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_l) = \mathrm{P}(B\,\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_l)/\mathrm{P}(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_l) = \mathrm{P}(B)/\mathrm{P}(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_l)$, s ez az előzők alapján

$$\prod_{i=1}^{k}(1 - 0{,}8/2^{i-1}) \Big/ \prod_{i=1}^{l}(1 - 0{,}8/2^{i-1}) = \prod_{i=l+1}^{k}(1 - 0{,}8/2^{i-1})$$

(a nevező típusa ugyanaz, mint B-é, csak k helyett l áll).

32. *a)* Legyen A_y: (egy személy eléri az y életkort). Nyilván $p(x, t+u) = \mathrm{P}(A_{x+t+u} \mid A_x)$. De A_{x+t+u} nyilván $= A_{x+t+u} \cdot A_{x+t}$, és így $\mathrm{P}(A_{x+t+u}) = \mathrm{P}(A_{x+t+u} \mid A_{x+t}) \cdot \mathrm{P}(A_{x+t})$ és $\mathrm{P}(A_{x+t+u} \mid A_x) = \mathrm{P}(A_{x+t+u} \mid A_{x+t} \cdot A_x) \cdot \mathrm{P}(A_{x+t} \mid A_x)$ (l. 2. § 31. pl.). Ez azonban $= \mathrm{P}(A_{x+t+u} \mid A_{x+t})\,\mathrm{P}(A_{x+t} \mid A_x)$, hiszen $A_{x+t} \cdot A_x = A_{x+t}$. Definíció szerint $\mathrm{P}(A_{x+t+u} \mid A_{x+t}) = p(x+t, u)$ és $\mathrm{P}(A_{x+t} \mid A_x) = p(x, t)$. Ezeket leírva, megkapjuk függvényegyenletünket. *b) a)* végeredményéből gépiesen levezethető; ti. legyen $t = n - 1$, $u = 1$, akkor $p(x, n) = p(x, n-1) \cdot p(x+n-1, 1)$; itt n helyett $n-1$-et írva, $p(x, n-1) = p(x, n-2) \cdot p(x+n-2, 1)$ é. í. t.; végül $p(x, 2) = p(x, 1) \cdot p(x+1, 1)$; a kapott kifejezéseket egymásba behelyettesítve, végül is a közölt függvényegyenletet kapjuk. — A feladat második részében szereplő $l(T)$ felfogható, mint annak a vsz.-e, hogy egy újszülött életben marad [vsz.-e $l(0)$] és azután („ezen feltétel mellett") T évet ér meg [vsz.-e $p(0, T)$]. Ettől függetlenül is levezethető azonban függvényegyenleteinkből. Írjunk ti. az elsőben $x = 0$, $t = z$-t; ekkor ezt kapjuk: $p(0, z+u) = p(0, z) \cdot p(z, u)$; viszont $l(z) = l(0)\,p(0, z)$ és $l(z+u) = l(0)\,p(0, z+u)$, s ezekből $p(z, u) = l(z, u)/l(z)$. Ez különben az egyes függvények értelmezéséből is könnyen levezethető. Hasonlóan $q(z, 1) = 1 - p(z, 1) = 1 - l(z, 1)/l(z) = d(z)/l(z)$. — Táblázatok $l(T)$-t szokták megadni ($x = 0, 1, \ldots$); ezek segítségével formuláink alapján az összes $p(z, u)$ és $q(z, 1)$ értékek kiszámíthatók (z, u egész). $q(z, 1)$-et a z életkorhoz tartozó *halandósági hányadnak* nevezik. — Ebben a példában ismét láthattuk, hogy a szóban forgó vsz.-eket függvényegyenlet kapcsolja össze.

34. Legyen A: (a gép I.-et dolgozza meg), B: (II.-t dolgozza meg), C: [(általában) megdolgozás közben, találomra választott időpontban a gép áll]. Adatainkat úgy foghatjuk fel, hogy (jó közelítéssel) $\mathrm{P}(A) = 1/3$, $\mathrm{P}(B) = 2/3$, $\mathrm{P}(C \mid A) = 0{,}1$, $\mathrm{P}(C \mid B) = 0{,}25$. Ezekkel a keresett $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(C \mid A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C \mid B)\,\mathrm{P}(B)$ (a teljes vsz. tétele szerint), s ez $= 1/5$ (jó közelítéssel áll csak ez!).

35. Legyen A: (egy kivett darab selejtes), B_1: (a kivett darabot I. csoportbeli gép gyártotta); B_2: (a darabot II. csoportbeli gép gyártotta), B_3: (a darabot III. csoportbeli gép gyártotta). A teljes vsz. tétele szerint $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(A \mid B_i)\ \mathbf{P}(B_i)$. Feltételeink vsz. számítási értelmezése szerint jó közelítéssel $\mathbf{P}(A \mid B_1) = 0{,}03$, $\mathbf{P}(A \mid B_2) = 0{,}015$, $\mathbf{P}(A \mid B_3) = 0{,}01$, és $\mathbf{P}(B_1) = 2/10$, $\mathbf{P}(B_2) = 5/10$, $\mathbf{P}(B_3) = 3/10$. Ezekkel (jó közelítéssel) $\mathbf{P}(A) = 0{,}0165$.

36. Legyen H: (egy vizsgázó átmegy). F: (egy vizsgázó férfi). A teljes vsz. tétele segítségével a helyes megoldás: $\mathbf{P}(H) = \mathbf{P}(H \mid F)\ \mathbf{P}(F) + \mathbf{P}(H \mid \bar{F})\ \mathbf{P}(\bar{F})$ („a vizsgázó férfi és átmegy" stb.). De $\mathbf{P}(H \mid F) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(H \mid \bar{F}) = 0{,}2$, és így $\mathbf{P}(H) = 0{,}2\ \mathbf{P}(F) + 0{,}4 \leqq 0{,}6$, mert $\mathbf{P}(F) \leqq 1$ (vsz.-ről van szó !). — A hiba ott van, hogy a „valaki" a teljes vsz. tételének alkalmazásakor a $\mathbf{P}(\bar{F})$ és $\mathbf{P}(F)$ faktorokat kihagyta.

37. Legyen A_n: (egy családban n gyerek van), K: (egy családban k fiú van). A teljes vsz. tétele szerint $\mathbf{P}(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(K \mid A_n)\ \mathbf{P}(A_n)$ (felhasználva a változókra tett könnyítést). De $\mathbf{P}(A_n) = \alpha\, p^n$, $\mathbf{P}(K \mid A_n)$ pedig nyilván a binomiális eloszlással fejezhető ki, és $\binom{n}{k} (1/2)^k\ (1/2)^{n-k}$. Ezzel: $\mathbf{P}(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\ (p/2)^n \binom{n}{k} = 2\alpha\ p^k/(2 - p)^{k+1}$. ($\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = x^k/(1 - x)^{k+1}$ ($|x| < 1$) alapján.)

39. Legyen A_1: [a (kivett) csavart I. gyártotta], A_2: (a csavart II. gyártotta). B: (a csavar selejtes). $\mathbf{P}(A_1 \mid B)$-t keressük; ez a BAYES-féle tétel szerint $= \mathbf{P}(B \mid A_1)\ \mathbf{P}(A_1)/[\mathbf{P}(B \mid A_1)\ \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(B \mid A_2)\ \mathbf{P}(A_2)]$. A selejtszázalékok ismeretében (jó közelítéssel !) mondhatjuk, hogy $\mathbf{P}(B \mid A_1) = p_1/100$, $\mathbf{P}(B \mid A_2) = p_2/100$. Nyilván $\mathbf{P}(A_1) = n_1/(n_1 + n_2)$. Hasonlóan $\mathbf{P}(A_2) = n_2/(n_1 + n_2)$, és így végül $\mathbf{P}(A_1 \mid B) = n_1 p_1/(n_1 p_1 + n_2 p_2)$.

40. Legyen A: (100 körtét megvizsgáltunk és jó volt), C_i: (az 1000-ben i db hibás van), $i = 0, 1, \ldots, 5$. Legyen feltevéseink szerint $\mathbf{P}(C_i) = p$. A keresett vsz. $\mathbf{P}(C_0 \mid A)$ a BAYES-féle tétel szerint $= \mathbf{P}(A \mid C_0)\ \mathbf{P}(C_0)/\sum_{i=0}^{5} \mathbf{P}(A \mid C_i)\ \mathbf{P}(C_i) = 1/\sum_{i=0}^{5} \mathbf{P}(A \mid C_i)$ (hisz $\mathbf{P}(A \mid C_0) = 1$). $\mathbf{P}(A \mid C_i) = \binom{1000 - i}{100} \Big/ \binom{1000}{100}$ (ha $i = 0$), feltéve, hogy bármelyik százas mintát ugyanazzal a vsz.-gel vehetünk ki [a nevező a „lehetséges" esetek száma: hányféleképpen vehető ki a 100 az 1000-ből; a számláló a „kedvező" esetek száma: hányféleképpen vehető ki a 100-as minta a *jó* $(1000 - i)$ darabból]. Mindezekkel végül is $\mathbf{P}(C_0 \mid A) = 0{,}214$.

41. A feltétel más szóval az, hogy A azt mondja, ő ugyanazt közli, mint amit D mondott ($= G$ esemény); ez persze csak bizonyos vsz.-gel igaz, hisz mindegyik személy hazudhat is; utóbbi okból nem támaszkodhatunk a közbülső közlésekre, csak A-éra, vagyis csak A és D közléseinek viszonya szerepel. D közléséhez viszonyítva két eset lehetséges: 1. ugyanazt adja tovább A is, mint amit D mondott ($= G$ esemény); 2. 1. ellentéte ($\bar{G}$). $\mathbf{P}(F \mid G)$-t keressük. Alkalmazzuk a BAYES-féle tételt: $\mathbf{P}(F \mid G) = \mathbf{P}(G \mid F)\ \mathbf{P}(F)/[\mathbf{P}(G \mid F)\ \mathbf{P}(F) + \mathbf{P}(G \mid \bar{F})\ \mathbf{P}(\bar{F})]$. Nyilván $\mathbf{P}(F) = 1/3$, $\mathbf{P}(\bar{F}) = 2/3$; $\mathbf{P}(G \mid \bar{F})$ annak a vsz.-e, hogy ha D változtatás nélkül közölte X-et, A is X-et fogja

továbbadni. Mivel a közbülső közlések lefolyása is véletlenszerű lehet, ez az esemény a következő módokon valósulhat meg:

A	B	C	D
igazat mond	igazat mond	igazat mond	igazat mond
hazudik	hazudik	igazat mond	igazat mond
igazat mond	hazudik	hazudik	igazat mond
hazudik	igazat mond	hazudik	igazat mond

A, B, C igazmondásai (hazugságai) függetlensége folytán az egyes (egymást kizáró) közlés-lefutások vsz.-ei sorban (1/3) (1/3) (1/3); (2/3) (2/3) (1/3); (1/3) (2/3) (2/3); (2/3) (1/3) (2/3); így tehát $\mathbf{P}(G \mid F) = 13/27$. $\mathbf{P}(G \mid \bar{F})$ annak a vsz.-e, hogy ha DX ellenkezőjét közölte, A mégis X-et fogja továbbadni; az ennek megfelelő (egymástól független) közlés-lefutások vsz.-ét a fentihez hasonló szkéma alapján kiszámítva és összeadva: $\mathbf{P}(G \mid \bar{F}) = 14/27$, s így végül $\mathbf{P}(F \mid G) = 13/41$.

43. Legyen A: (I. gyártmánya selejtes), B: (II. gyártmánya selejtes). Feltételeink szerint $\mathbf{P}(A) = p_1$, $\mathbf{P}(B) = p_2$ és A, B függetlenek. I.-nél $\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B})$-t keressük; mivel A, B független volt, $\bar{A}$, $\bar{B}$ is az (vö. 2. § 42. pl.) és $\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B) = [1 - \mathbf{P}(A)]\,[1 - \mathbf{P}(B)] = (1 - p_1)(1 - p_2)$ (vö. 2. § 3. fel.). 2.-nél $\mathbf{P}(AB)$-t keressük, ez $\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) = p_1 p_2$. 3.-nál $\mathbf{P}(A\bar{B})$ kell; $\bar{A}$ és B is függetlenek, s így ez $= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) = (1 - p_1)\,p_2$. 4. a keresett $\mathbf{P}(A\bar{B}) = p_1(1 - p_2)$.

44. Legyen A: (0 — 0,66 sec-on belül áll meg a gép). B: (0,66 — 0,99 sec közt áll meg a gép). A keresett vsz. (mivel a feltételek szerint tudjuk, hogy 0 — 0,66 sec közt nem áll meg a gép) $\mathbf{P}(B \mid \bar{A}) = \mathbf{P}(B\bar{A})/\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(B)/[1 - \mathbf{P}(A)]$. $\mathbf{P}(A) = 0{,}06$ (lásd a 2. § 18. fel. *a)* részét). B pedig olyan *ij* kapcsolásakor valósul meg, amelyre $0{,}66 \leqq 0{,}05 + i \cdot 0{,}10 + 0{,}10 + j \cdot 0{,}10 \leqq 0{,}99$, vagyis 15 esetben, s így $\mathbf{P}(B) = 0{,}15$, s ezzel $\mathbf{P}(B \mid \bar{A}) \approx 0{,}159$. — Hajlandók volnánk úgy okoskodni, hogy a kérdés ugyanaz, mint „Mi a vsz.-e, hogy 0,66 sec és 0,99 sec közt áll meg a gép?". Ez azonban téves: ekkor csak arról volna szó, hogy a keresett időtartam, amely eleve minden lehetséges értékét felveheti, bizonyos határok közt van. A feladatban azonban arról van szó, hogy a keresés időtartama 0,66 és 0,99 sec közt van, *de tudjuk, hogy* 0 és 0,66 sec közt eleve nem lehet, csak 0,66 sec és a maximális lehetséges értéke közt. Formálisan: a tévedés abban állna, hogy $\mathbf{P}(B)$-t $\mathbf{P}(B \mid \bar{A})$-val azonosítanánk, ez azonban helytelen volna, hisz A és B, tehát $\bar{A}$ és B is — nem függetlenek.

45. A (2. § 18.) fel.-ból tudjuk: ha A_i: (az i-edik hívásnál a vonalválasztó működési ideje $< 0{,}66$ sec), $\mathbf{P}(A_i) = 0{,}06$, minthogy a viszonyok mindegyik esetben ugyanazok. Ha az A_i-k függetlenek, a keresett vsz. $\mathbf{P}(A_1 \ldots A_{10})$, és ez $= \mathbf{P}(A_1) \ldots \mathbf{P}(A_{10}) = (0{,}06)^{10}$.

49. Legyen E_1: (az első gép bombája talál), E_2: (a második gép bombája talál), E_3: (az első navigátora megtalálja a célt), E_4: (a második navigátora megtalálja a célt). E_5: (az első bombakioldója eltalálja a célt), E_6: (a második bombakioldója megtalálja a célt). A keresett vsz. (vagy egyik vagy másik gép bombája talál) $\mathbf{P}(E_1 \bar{E}_2 + E_2 \bar{E}_1) = \mathbf{P}(E_1 \bar{E}_2) + \mathbf{P}(\bar{E}_1 E_2)$ [$(E_1 \bar{E}_2)(\bar{E}_1 E_2) = O$!]. Feltehető, hogy E_1 és E_2 függet-

lenek; ekkor E_1 és $\bar{E}_2$, valamint $\bar{E}_1$ és E_2 is függetlenek, és így az előbbi összeg (az ellentett eseményeket az eredetivel fejezve ki) $= \mathrm{P}(E_1) + \mathrm{P}(E_2) - 2\,\mathrm{P}_1(E_1)\,\mathrm{P}(E_2)$. De $\mathrm{P}(E_1) = \mathrm{P}(E_3)\,\mathrm{P}(E_5 \mid E_3)$, $\mathrm{P}(E_2) = \mathrm{P}(E_4)\,\mathrm{P}(E_6 \mid E_4)$. Ezzel a keresett vsz. $\mathrm{P}(E_3)\,\mathrm{P}(E_5 \mid E_3) + \mathrm{P}(E_4)\,\mathrm{P}(E_6 \mid E_4) - 2\,\mathrm{P}(E_3)\,\mathrm{P}(E_5 \mid E_3)\,\mathrm{P}(E_4)\,\mathrm{P}(E_6 \mid E_4)$. A feladat szerint $\mathrm{P}(E_3)$ és $\mathrm{P}(E_4)$ egyformán lehet 0,9 vagy 0,8. $\mathrm{P}(E_5 \mid E_3)$ és $\mathrm{P}(E_6 \mid E_4)$ egyformán lehet 0,7 és 0,6 (persze egyik beállása kizárja a másikat). Összesen 4 kombináció lehetséges a navigátort és bombakioldót illetőleg; mivel azonban a gépeket nem különböztettük meg, csak 2 jön számításba (ami egy gépre vonatkozik). Az egyes vsz.-ek: 0,5052 és 0,4952. (A különbség csak 0,01 !) A legjobb kombináció tehát: A navigátor és C bombakioldó (vagyis a „jobbak") egy gépben.

50. Legyen A: (a köpetben van ráksejt); B: [a mikroszkopikus készítménybe ráksejt kerül (a köpetből)]; C: (egy sejtet ráksejtnek diagnosztizálnak). Ekkor $\mathrm{P}(A) = p_1$, $\mathrm{P}(B \mid A) = p_2$, $\mathrm{P}(C \mid BA) = p_3$. Legyen a keresett vsz.-ű esemény D. *a)* Keressük $\bar{D}$-nek (a $2\,r\,s$ vizsgálat közül egy sem lesz pozitív) vsz.-ét. Legyen E_i: (az i-edik ($i = 1, 2, \ldots, r$) mintához tartozó vizsgálatcsoport végeredményei ($2s$ számú !) mind negatívok). Ha az egyes mintavizsgálat-csoportok teljesen függetlenek, $\mathrm{P}(\bar{D}) = \prod_{i=1}^{r} [\mathrm{P}(E_i)]$. De E_i megvalósul, ha 1. az i-edik mintában nincs ráksejt, legyen ez $\bar{A}_i$, 2. A_i áll fenn, és az s számú megfigyelés-*pár* mind negatív. Ha az utóbbi együttes események F_j ($j = 1, 2, \ldots s$) és egymástól függetlenek, 2.: $F_1, F_2 \cdots F_s$. F_j azonban felírható $A_i\,(\bar{B}_j + B_j\,\bar{C}_{j1}\,\bar{C}_{j2})$ alakban, ahol B_j: (a j-edik mikroszkopikus készítményben lesz ráksejt), $\bar{C}_{j1}(\bar{C}_{j2})$: [a j-edik mikroszkopikus készítmény 1 (2) vizsgálata pozitív]. (C_{j1} és C_{j2} függetleneknek tehetők fel !) Így tehát $E_i = \bar{A}_i + A_i \prod_{j=1}^{s} (\bar{B}_j + B_j\,\bar{C}_{j1}\,\bar{C}_{j2})$. Az indexes B-k nem függetlenek az indexes A-kól, az indexes C-k nem függetlenek az indexes A-kól és B-kől. Ekkor a 2. § 31. pl. megjegyzései alapján

$$\mathrm{P}(E_i) = \mathrm{P}(\bar{A}_i) + \mathrm{P}\Big(\prod_{j=0}^{s} (\bar{B}_j + B_j\,\bar{C}_{j1}\,\bar{C}_{j2}) \mid A_i\Big) \cdot \mathrm{P}(A_i) =$$

$$= \mathrm{P}(\bar{A}_i) + \mathrm{P}(A_i) \prod_{j=0}^{s} \mathrm{P}\,[(\bar{B}_j + B_j\,\bar{C}_{j1}\,\bar{C}_{j2}) \mid A_i] =$$

$$= \mathrm{P}(\bar{A}_i) + \mathrm{P}(A_i) \prod_{j=0}^{s} [\mathrm{P}(\bar{B}_j \mid A_i) + \mathrm{P}(B_j\,\bar{C}_{j1}\,\bar{C}_{j2} \mid A_i)] =$$

$$= \mathrm{P}(\bar{A}_i) + \mathrm{P}(A_i) \prod_{j=0}^{s} [\mathrm{P}(\bar{B}_j \mid A_i) + \mathrm{P}(\bar{C}_{j1}\,\bar{C}_{j2} \mid A_i\,B_j)\,\mathrm{P}(B_j \mid A_i)].$$

Ha oly egyöntetűség áll fenn, hogy $\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(\bar{B}_j \mid A_i) = \mathrm{P}(\bar{B} \mid A)$ és $\mathrm{P}(\bar{C}_{j1}\,\bar{C}_{j2} \mid A_i\,B_j) = \mathrm{P}(\bar{C}_{j1} \mid A_i\,B_j)\,\mathrm{P}(\bar{C}_{j2} \mid A_i\,B_j) = [\mathrm{P}(\bar{C} \mid AB)]^2$. Ezek értékeit beírva s a feladat feltételeit figyelembe véve,

$$\mathrm{P}(D) = 1 - [(1 - p_1) + p_1\,[(1 - p_2) + (1 - p_3)^2\,p_2]^s]^r.$$

b) A $2\,r\,s$ vizsgálatszám legyen rögzített, pl. $= R$, s így $r = R/2s$. A kérdés nyilván azt jelenti, milyen s mellett lesz $\mathrm{P}(D)$ maximális. $\mathrm{P}(D)$: $1 - [a + b\,c^s]^{N/s}$ alakú,

$a < 1$, $b < 1$, $c < 1$, $N = R/2$, konst, $1 \leqq s \leqq R/2$, és a $[\sim]$ is < 1. Azt kell vizsgálnunk, milyen s-nél lesz a $[\ ]$-es tag minimális. Ehhez azonban egy transzcendens függvény szélső értékeit kellene megvizsgálnunk, s ezért a továbbiakat mellőzzük. A feladat gépiesen megoldható arra az esetre is, amidőn 2 helyett t vizsgálatot végeznek a mikroszkopikus készítményekre.

3. §. *Valószínűségi változók, eloszlás- és sűrűségfüggvények*

7. A következő általánosan használt okoskodást mutatjuk be:

Legyen ξ a vetület koordinátája a pálya vetületét képviselő egyenesszakasz kezdőpontjától mérve. Keressük annak az $f(x)\,\Delta x + o(\Delta x) = \mathbf{P}(x \leqq \xi < x + \Delta x)$ vsz.-ét, hogy ξ x és $x + \Delta x$ közt lesz. A feltevésből következik, hogy $\mathbf{P}(x \leqq \xi < x + \Delta x) = C\,\Delta x/v(x) + o(\Delta x)$, ahol $v(x)$ a vetület sebessége az x pontban. Ha a pont ω szögsebességgel mozog a körpályán, vetülete $x = r \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ lesz (φ a fázisszög). Ebből a sebesség, $dx/dt = \omega r \cos(\omega t + \varphi)$; $v(x)$-et úgy kapjuk meg, ha t helyett a hozzá tartozó x-et vezetjük be, vagyis $v(x) = \omega\sqrt{r^2 - x^2}$, és így $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [\mathbf{P}(x \leqq \xi < x + \Delta x)/\Delta x] = C/\omega\sqrt{r^2 - x^2}$, ha $|x| \leqq r$; egyébként nyilván $= 0$. C az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ feltételből ω/π, tehát $f(x) = 1/\pi\sqrt{r^2 - x^2}$ ($|x| \leqq r$; egyébként $= 0$); ez szögsebesség és fázistól egyaránt független. ξ e. f.-e definíciószerűen $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$, ami $= 0$, ha $x < -r$; $= \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{x} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{1}{2}$, ha $|x| \leqq r$; és $= 1$, ha $x > r$. — A problémának atomfizikai vonatkozása van. Ha azt vizsgáljuk, mi a vsz.-e, hogy egy harmonikus oszcillátor tömegpontja x és $x + \Delta x$ közt lesz a nyugalmi helyzettől számítva, klasszikus modell szerint számolva, $f(x)\,\Delta x + o(\Delta x)$-et kapjuk eredményként, $|x| < r$-nél; egyébként a vsz. zérus, ellentétben a kvantumtechnikai modellel, amelynél ebben az esetben is véges a vsz. — Ebben a feladatban azt láttuk, hogyan szerkeszthetjük meg a kísérleti feltételek alapján egy vsz. v. s. f.-ét. Hasonlóval igen sokszor találkozunk.

8. Differenciálegyenletet szerkesztünk a $q(t)$-re a következő okoskodás segítségével: $\mathbf{P}$ (egy személy eléri a $t + \Delta t$ kort) $= \mathbf{P}$ (ugyanez eléri a t kort). $\mathbf{P}$ (ugyanez feltéve, hogy a t kort elérte, $(t, t + \Delta t)$ alatt még él). (Két esemény szorzata vsz.-ének általános definíciójából.) Utóbbi vsz.-e (feltételeink alapján) $[1 - a(t)\,\Delta t - o(\Delta t)]$. A többi vsz. $q(t)$-vel fejezhető ki, és így a $q(t + \Delta t) = q(t)\,[1 - a(t)\,\Delta(t) - o(\Delta t)]$ összefüggést kapjuk, amelyből $[q(t + \Delta t) - q(t)]/\Delta t = -a(t)\,q(t) - q(t)\,o(\Delta t)/\Delta t$. Tartson Δt 0-hoz. A jobb oldal határértéke létezik $[-a(t)\,q(t)]$, s így a bal oldalé is, ami azonban $q'(t)$, vagyis $q'(t) = -a(t)\,q(t)$-re jutunk ($t \geqq 0$). Integrálva: $q(t) = A \exp\left[-\int_{t_0}^{t} a(x)\,dx\right]$ ($t \geqq 0$, A és t_0 konst). 2. szerint $q(0) = 1$; ebből $t_0 = 0$, mert t_0-nak $0 \leqq t_0 \leqq t$-nek kell lennie; következésképpen $A = 1$, és így $q(t) = \exp\left[-\int_{0}^{t} a(x)\,dx\right]$ ($t \geqq 0$; egyébként $= 0$). Ha ξ egy személy életkora, ξ e. f.-e nyilván $\mathbf{P}(\xi < t) = 1 - q(t)$, ($t \geqq 0$; egyébként $= 0$). — E. f.-ek meghatározásának gyakori módja az itteni.

9. Az említett feladatban láttuk, hogy annak a vsz.-e, hogy egy z évet megért egyén még u évig elél: $p(z, u) = l(z + u)/l(z)$. Az az esemény, hogy egy z évet megért egyén a következő u éven belül meghal, az előbbi esemény ellentettje; ez más szóval az az esemény, hogy a halálig eltelt véletlen időtartamra, η-ra fennáll $0 \leqq \eta < u$. Ez az η szerepel feladatunkban is; feladatunk jelölését használva tehát η e. f.-e $\mathbf{P}(\eta < y) = 1 - p(x, y) = 1 - l(x + y)/l(x)$ $(y > 0$; egyébként $\equiv 0)$ lesz, s. f.-e pedig $-[1/l(x)]\dfrac{dl(x+y)}{dy}$, ha $y > 0$, egyébként $\equiv 0$, vagyis annak a vsz.-e, hogy az x évet megért egyén $x + y$ és $x + y + \Delta y$ időpontok közt meghal,

$$[1/l(x)]\frac{dl(x+y)}{dy}\Delta y + o(\Delta y).$$

10. Legyen a korpuszkula helye, ξ, vsz. v. Ennek a s. f.-e nyilván $|\psi_n(x)|^2$ $(0 < x < l$; egyébként $\equiv 0)$. Határozzuk most meg C-t. Az $\int_0^l |\psi_n(x)|^2\,dx = 1$ nyilvánvaló összefüggés alapján $C^2\int_0^l \sin^2(n\pi x/l)\,dx = 1$, amiből $C = \sqrt{2/l}$ (a sajátfüggvény „normálása"). A feladatban ξ e. f.-ét keressük; ez $\mathbf{P}(\xi < x) = F(x) = C^2\int_0^x \sin^2(n\pi x/l)\,dx = (x/l) - \sin(2n\pi x/l)/2n\pi$ $(0 < x < l; \equiv 0$, ha $x \leqq 0$; $\equiv 1$, ha $x \geqq l)$.

11. 1. a értékét az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ feltételből határozzuk meg; az integrált kiszámítva, $a = 2/\pi$. 2. Ha p annak a vsz.-e, hogy egy ξ-re végzett megfigyelés eredménye < 1 lesz, a keresett vsz. p^2. p azonban $= \mathbf{P}(\xi < 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = (2/\pi)$ arc tg e, s ezzel p^2 is kiszámítható.

14. A közölt számok lehetnek vsz.-e tagjai, mert 0 és 1 közt vannak, és összegük, amelyet a szereplő, egymást kizáró események valamelyike bekövetkezése (biztos esemény) vsz.-ének akarunk felfogni, 1. (ξ, η) e. f.-e, $\mathbf{P}(\xi < x, \eta < y)$, kétdimenziós tiszta lépcsős függvény lesz, maga az eloszlás pedig az (x_i, y_k) pontokban felrakott $\mathbf{P}(\xi = x_i;\ \eta = y_k)$ értékekből fog állani $(i, k = 1, 2, 3)$. *b)* $\mathbf{P}(\xi = x_2) = \sum_{i=1}^{3}(\xi = x_2,\ \eta = y_i) = 0{,}40$, $\mathbf{P}(\eta = y_3) = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_3) = 0{,}59$. *c)* $\mathbf{P}(\xi = x_2 \mid \eta = y_3) = \mathbf{P}(\xi = x_2, \eta = y_3)/\mathbf{P}(\eta = 3)$, amely *b)* felhasználásával $= 0{,}26/0{,}59$.

16. Az ellipszispályát leíró látható üstökösök sebességpontja a $\sqrt{R}$ sugarú gömb belsejében és a hiperboloidon belül van; a keresett vsz. ugyanaz, mint a 3. § 15. pl.-ban, csak M helyett $\sqrt{R}$-t kell írnunk. Mivel $B = R/\sqrt{1 + R} < \sqrt{R}$, a $(0, B)$ illetve $(B, \sqrt{R})$ intervallumokra kiterjesztett integrálok egyaránt szerepelnek. — Hiperbolapályán mozgó üstökösök esetén arra a tartományra kell integrálnunk, amely a $\sqrt{R}$ és M sugarú

gömbfelületek között és a hiperboloidon belül fekszik. Ha E: (egy üstökös pályája ellipszis); H: (egy üstökös pályája hiperbola); L: (egy üstökös látható) a fentiek alapján a 3. § 15. pl. jelöléseivel

$$\mathbf{P}(EL) = 4\pi \int_0^B f(\omega)\,\omega^2\,d\omega + 4\pi \int_B^{\sqrt{R}} f(\omega)\,\omega^2\,[1 - \sqrt{1-R^2}\,\sqrt{1-B^2/\omega^2}]\,d\omega,$$

$$\mathbf{P}(HL) = 4\pi \int_{\sqrt{R}}^{M} f(\omega)\,[1 - \sqrt{1-R^2}\,\sqrt{1-B^2/\omega^2}]\,d\omega,$$

míg

$$\mathbf{P}(L) = 4\pi \int_0^B f(\omega)\,\omega^2\,d\omega + 4\pi \int_B^{M} f(\omega)\,\omega^2\,[1 - \sqrt{1-R^2}\,\sqrt{1-B^2/\omega^2}]\,d\omega.$$

17. A 3. § 15. pl. megoldása kapcsán mondhatjuk, hogy egy üstökös polárkoordinátáinak (amelyek vsz. v.-k) s. f.-e a sebességtérben $f(\omega)\,\omega^2 \sin\Theta$; feltevés szerint $M_0 \leqq \omega \leqq M$. Így tehát jelen esetben $\int_{M_0}^{M}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega)\,\omega^2 \sin\Theta\,d\omega\,d\Theta\,d\varphi =$ $= \int_{M_0}^{M}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (K/\omega^2)\sin\Theta\,d\omega\,d\Theta\,d\varphi = 1$, amiből $K = 1/4\,\pi\,(M - M_0) \approx 1/4\,\pi M$.

A 3. § 16. fel. jelöléseivel a keresett vsz. [$f(\omega)$ jelen kifejezésével]

$$\mathbf{P}(E\,|\,L) = \mathbf{P}(EL)/\mathbf{P}(L) = \left(\int_0^B d\omega + \int_B^{\sqrt{R}} [1 - \sqrt{1-R^2}\,\sqrt{1-B^2/\omega^2}]\,d\omega\right) \Big/$$

$$\Big/\left(\int_0^B d\omega + \int_B^M [1 - \sqrt{1-R^2}\,\sqrt{1-B^2/\omega^2}]\,d\omega\right) = \left(\sqrt{R} - \sqrt{1-R^2}\left[\sqrt{R-B^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - B \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{R-B^2}}{B}\right]\right) \Big/ \left(B - \sqrt{1-R^2}\left[\sqrt{M^2-B^2} - B \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{M^2-B^2}}{B}\right]\right),$$

amely közelítőleg $(\pi - \sqrt{R})/(\pi + RM)$. — Ha figyelembe vesszük, hogy M legfeljebb fénysebességnyi lehet, ami az itt használt egységekben 10^4, R pedig ugyanilyen egységekben 10^{-3} nagyságrendű, ez a vsz. közel 1. Az itt alkalmazott $f(\omega)$ függvény segítségével tehát helyes eredményre jutunk, bár $f(\omega)$ jelen alakja elég önkényes. — Itt mindjárt példát látunk s. f. típusra, amely eltér a később ismertetendő szokásosaktól, bevezetését azonban fizikai feltételek követelik meg. Megjegyezzük, hogy Laplace az $f(\omega) =$ $=$ konst (bizonyos intervallumon !) függvénnyel is próbát tett, ekkor azonban a valósággal teljesen ellenkező eredményt kapott. $\mathbf{P}(L)$ Laplace mindenik feltevésénél igen kicsi, ami arra utal, hogy az említett feltételek mellett „induló" üstökösök java része az észlelhetőség korlátain túl marad mozgása folyamán.

19. Ha a fel(le-)szállás helye ξ (η) vsz. v. $p(x,y)\,\Delta y + o(\Delta y) = \mathbf{P}\,(y \leqq \eta < y + \Delta y \,|\, x \leqq \xi < x + \Delta x)$. Nyilván $\mathbf{P}(y \leqq \eta < y + \Delta y \,|\, x \leqq \xi < x + \Delta x) \cdot \mathbf{P}\,(x \leqq \xi < x + \Delta x) = \mathbf{P}\,(x \leqq \xi < x + \Delta x, y \leqq \eta < y + \Delta y)$. De $\mathbf{P}\,(x \leqq \xi < x +$

$+ \Delta x) = \mathbf{P}(x \leqq \xi < x + \Delta x, \eta < L)$, minthogy $\eta < L$ nem jelent megszorítást, ez azonban a 3. § 18. pl. jelölései mellett $= \frac{\partial}{\partial x} F(x, L)\, \Delta x + o(\Delta x)$, minthogy a differenciálhatóságot feltettük. Ugyancsak az ottani jelölésekkel és feltevéseink mellett

$$\mathbf{P}(x \leqq \xi < x + \Delta x, y \leqq \eta < y + \Delta y) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} F(x, y)\, \Delta x\, \Delta y + o(\Delta x\, \Delta y).$$

Mindebből:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\mathbf{P}(x \leqq \xi < x + \Delta x, y \leqq \eta < y + \Delta y)}{\Delta x\, \Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\left| \frac{\partial}{\partial x} F(x, L)\, \Delta x + o(\Delta x)\, [p(x, y)\, \Delta y + o(\Delta y)] \right|}{\Delta x\, \Delta y}$$

Ennek a bal oldala azonban $\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} F(x, y)$; a jobb oldalt kiszámítva végül is megkapjuk a keresett összefüggést:

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, L) \cdot p(x, y).$$

22. A függetlenség szükséges és elégséges feltétele, hogy $\mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_k) = \mathbf{P}(\xi = x_i)\, \mathbf{P}(\eta = y_k)$ legyen $(i, k = 1, 2, 3)$ (események függetlensége). De ez $= \left(\sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)\right) \left(\sum_{l=1}^{3} \mathbf{P}(\xi = x_l, \eta = y_k)\right)$, és a 3. § 14. fel.-ai alapján meggyőződhetünk, hogy a feltétel két oldala egyetlen i, k értékpárnál sem egyezik vagyis a két vsz. v. nem független.

4. §. A leggyakoribb valószínűség-eloszlások

1. A fiúk száma, ξ, nyilván binomiális eloszlású vsz. v., és így $\mathbf{P}(\xi = 4) = \left| \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \right| 0{,}51^4 \cdot 0{,}49^2 \approx 0{,}024$.

2. A feladatot úgy értelmezhetjük, hogy 0,02 a vsz. selejtes darab készülésének. Legyen a selejtes darabok száma, ξ, vsz. v. Ez nyilván binomiális eloszlású, így tehát

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \left| \begin{matrix} 100 \\ k \end{matrix} \right| 0{,}02^k \cdot 0{,}98^{100-k} \quad (0 \leqq k \leqq 100)$$

4. A 4. § 3. pl. alapján legvalószínűbb a $[(100 + 1)\, 0{,}02] = [2{,}02] = 2$ selejtszám.

5. Azt kérdezzük, mi a vsz., hogy 6-ból $\xi = k$ $(k = 0, 1, \ldots, 6)$ találja a helyes utat meg. Mivel mindegy, melyik k-ról van szó, a megoldást a binomiális eloszlás segítségével adhatjuk meg: $\mathbf{P}(\xi = k) = \left| \begin{matrix} 6 \\ k \end{matrix} \right| 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{6-k}$.

b) $\mathbf{P}(\xi \geqq 3) = 1 - \mathbf{P}(\xi < 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \mathbf{P}(\xi = k) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{6}{k} 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{6-k} \approx 0{,}1$ ..

6. $\mathbf{P}(\xi = k, \eta = l)$-t keressük; ez $\mathbf{P}(\xi = k \mid \eta = l)\, \mathbf{P}(\eta = l)$ $(k = 1, 2, \ldots;$ $l = 0, 1, \ldots, k)$. Az első tényező annak a vsz., hogy ha k darab közt l selejtes volt is, a vizsgáló kezén „jó" minősítéssel k darab megy át, a $(k+1)$-ediket viszont okvetlenül selejtesnek kell minősítenie; ez másképp annak a vsz.-e, hogy az l selejtes darabot is mind jónak minősíti a vizsgáló (A esemény), ugyanakkor a k-adik selejtes, és ezt selejtesnek is minősíti a vizsgáló (B). A és B feltevéseink folytán függetlenek. $\mathbf{P}(A)$ nyilván $(1-p)^l$ és $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}$ (a k-adik darab selejtes) $\cdot\, \mathbf{P}$ (a k-adik darab selejtes minősítést kap | a k-adik darab selejtes) $= q \cdot p$. A másik tényező annak a vsz., hogy k közt l selejtes volt (bár nem ismerték fel őket); ezt feltevéseink alapján binomiális eloszlással adhatjuk meg, és $= \binom{k}{l} q^l (1-q)^{k-l}$. A végeredmény tehát

$$\binom{k}{l} (1-p_i)^l\, q^l\, (1-q)^{k-l}\, qp.$$

7. Jelöljük a keresett eseményt B-vel, és vsz.-ét, $\mathbf{P}(B) = P(n\,T, k)$-val $(k = 0, 1, \ldots)$. A rekurzív formulát így próbáljuk előállítani: legyen A_l: (az $(n-1)\,T$ végén l organizmus van jelen); ekkor a teljes vsz. tétele szerint $\mathbf{P}(B) = \sum_l \mathbf{P}(B \mid A_l)\, \mathbf{P}(A_l)$ (minden szóba jövő l-re összegezünk), $\mathbf{P}(A_l)$-t értelemszerűen $P\,[(n-1)\,T, l]$-lel jelölhetjük. $\mathbf{P}(B \mid A_l)$ annak a vsz., hogy az $(n-1)\,T$ végén meglevő l-ből az $n\,T$ végére k lesz. Ez úgy állhat elő, hogy osztódás utáni $2l$-ből valamelyik $2l-k$ elpusztul. Ennek a vsz.-ét binomiális eloszlás egy tagja adja meg; a feladat adatai alapján

$$\mathbf{P}(B \mid A_l) = \binom{2l}{2l-k} p^k\, q^{2l-k}; \quad p = 1 - q.$$

Végül

$$P(n\,T, k) = \sum_l P\,[(n-1)\,T, l] \binom{2l}{2l-k} p^k\, q^{2l-k} \qquad (q = 1-p).$$

l egyik határát a binomiális együttható már megadja, mert $2l - k \geqq 0$ kell lennie, vagyis $l \geqq k/2$. l felső határa 2^{n-1} legjobb esetben (ha egyik sem pusztul el), ti. 2^{n-1} organizmus lehet legfeljebb a $(n-1)\,T$-edik intervallum végén. — Ezzel megkaptuk a kívánt rekurzív formulát. Rendkívüli bonyolultsága folytán azonban tovább nem taglaljuk; adott esetben a megoldás a fentiekből kiszámítható. A kezdeti feltételek nyilván $P(T, 1) = p$, $P(T, 0) = q$.

9. Annak a vsz., hogy adott pillanatban $\xi = k$ $(k = 0, \ldots, n)$ van bekapcsolva, a binomiális eloszlás szerint $\binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$ $(q = 1-p)$; ugyanez annak a vsz., hogy az adott pillanatban az összes fogyasztás $= k\,a$. 1.-nél tehát annak a vsz.-ét kell meghatároznunk, hogy $\xi\, a < n\,a\,p$, vagyis $\xi < n\,p$, 2-nál pedig azét, hogy $\xi\, a \geqq r\,n\,a\,p$, vagyis $\xi \geqq r\,n\,p$. Ezek a vsz.-ek $\sum_{k<np} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$, illetve $\sum_{k \geqq rnp} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$.

Ha a MOIVRE–LAPLACE-féle tételt felhasználjuk, s az $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ nagyságrendű tagokat

elhanyagoljuk (feltevés szerint np igen nagy, így ez jogos), az első esetben $P(0 \leqq \xi < np)$-ről van szó, s ez $\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{np/q}}^{0} e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{2} - \Phi\left(-\sqrt{\frac{np}{q}}\right)$ (ha np nagy, $\approx 1/2$).

A második esetben $P(rnp \leqq \xi < \infty)$ kell; ugyanazzal a közelítéssel ($t_1 = (r-1)\,np/\sqrt{npq}$, $t_2 = \infty$-nel) ez $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(r-1)\sqrt{np/q}}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du$, amely még kifejezhető a $\Phi(x)$ függvény segítségével.

10. *a)* Mondhatjuk, hogy a társaságnak nincs nyeresége, ha a kifizetett díjak összege, (ξ halálesetnél $1000 \cdot \xi$) $\geqq$ az összes biztosított által befizetett 120000 Ft-nál, vagyis ha $\xi \geqq 120$. Ennek a vsz.-ét kell tehát keresnünk. ξ nyilván binomiális eloszlású, és így a keresett

$$P(\xi \geqq 120) = 1 - P(\xi < 120) = 1 - \sum_{k=0}^{119} \binom{10\,000}{k} 0{,}006^k\,(1 - 0{,}006)^{10\,000-k}.$$

Próbáljuk meg a MOIVRE—LAPLACE-féle közelítést ($npq \geqq 25$!) $P(\xi < 120)$-ra. A tételben szereplő t_1-t az $np + t\sqrt{npq} = 0$-ból kell meghatározni, 120-at viszont az $np + t_2\sqrt{npq}$ alakban kell felírnunk. n itt 10 000, $p = 0{,}006$, s így t_1-nek $-7{,}7715$-öt t_2-nek 7,7715-öt kell vennünk. Ilyen határok közt az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t} e^{-u^2/2}\,du$ függvény gyakorlatilag 1; (l. pl. $\Phi(x)$ sorfejtéseit). A többi tagok Θ_1, $\Theta_2 = 0$ folytán $4{,}01 \cdot 10^{-3}$ nagyságrendűek, ami elhanyagolható. Az Ω hibatagra azt kapjuk, hogy $|\Omega| < 0{,}1$. Így tehát $P(\xi \geqq 120)$ 0 és 0,1 közt van. Próbálkozhatnánk most POISSON-eloszlással közelíteni (a feltételek megvannak). A vonatkozó képlet szerint ($np = \lambda = 60$) $P(\xi < 120) = e^{-60} \sum_{\nu=0}^{119} 60^\nu/\nu\,! + \Delta$. Az első tag táblázatban már meg nem található; az ellentett esemény vsz.-ében $\sum_{\nu=120}^{\infty}$ korlátai azonban pl. (vö. 4. § 22. pl.):

$$e^{-60}\,60^{120}/120\,! < \sum_{\nu=120}^{\infty} e^{-60}\,60^\nu/\nu\,! < e^{-60}\,60^{120}/120\,! + (e^{-60}\,60^{121}/121\,!)\,(122/62).$$

A két korlát $1{,}237 \cdot 10^{-12}$ és $1{,}237 \cdot 10^{-12} + 1{,}21 \cdot 10^{-12}$, vagyis $P(\xi \geqq 120)$ *első tagja* első 11 tizedesjegye biztosan 0. Δ-ra ezekkel az értékekkel $|\Delta| < 0{,}004$ jön ki, vagyis $P(\xi \geqq 120)$ 0 és 0,004 közt van. Ez az elsőnél sokkal jobb közelítés (ez várható, mert a paraméterek nem tesznek eleget a normális eloszlásfüggvénnyel való jó közelítéshez szükséges feltételnek). Csak illusztrálásul mutattuk be mindkét utat. Ez a közelítés még finomítható is. (A IV. 22.-ben közölt korlátokból csak az első tagot vettük !) *b)* A társaságnak pl. legalább 60 000 forintja akkor marad meg, ha < 60 személy hal meg. Keressük tehát $P(\xi < 60)$-t, ez

$$\sum_{k=0}^{59} \binom{10\,000}{k} 0{,}006^k\,(1 - 0{,}006)^{10\,000-k}.$$

POISSON-eloszlással közelítve, erre a legdurvább becsléssel is azt kapjuk, hogy 1 és 0,98 közt van. Hasonlóan 40—80 000-nél.

11. A szakadások száma ξ, vsz. v., nyilván binomiális eloszlású, $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{800}{k} 0{,}005^k (1-0{,}005)^{800-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, 800)$; a legvalószínűbb szakadásszám az a k, amelynél ennek maximuma van; a IV. 3. pl. szerint $k = [801 \cdot 0{,}005] = 4$. Legfeljebb 10 szakadás vsz. e. $= \mathbf{P}(\xi \leqq 10)$; alkalmazható a POISSON-eloszlással való közelítés ($\lambda = 800 \cdot 0{,}005 = 4$-gyel !) Ekkor $\mathbf{P}(\xi \leqq 10) = e^{-4} \sum_{\nu=0}^{10} 4^\nu/\nu\,! + \Delta$; az első tag a táblázat szerint 0,9972 és $|\Delta| < 0{,}003$, vagyis két tizedes pontossággal $\mathbf{P}(\xi \leqq 10) = 0{,}99$.

12. A selejtesek száma binomiális eloszlású vsz. v.; közelítsük ezt az eloszlást a POISSON-félével ($\lambda = 50$ lesz). Ekkor *a)* a keresett vsz. $e^{-50}\, 50^{40}/40\,! = 0{,}0216$ (a közelítés hibáját nem tárgyaljuk). *b)* A keresett vsz. pontos értéke (a binomiálist a POISSON-eloszlással kifejezve)

$$\sum_{k=0}^{70} e^{-50}\, 50^k/k! + \Delta = 1 - \sum_{k=71}^{\infty} e^{-50}\, 50^k/k! + \Delta,$$

az utolsó $\sum$ korlátai pl. 0,02 és 0,06, és így a keresett vsz. a Δ hibatagtól eltekintve 0,98 és 0,94 közt van (itt a 4. § 22. pl.-ban közölt becsléseket használtuk; táblázatot itt már nem tudtunk alkalmazni). $|\Delta|$ egyébként $< 0{,}003$.

13. *a)* Annak a vsz., hogy az említett tartományba esik csillag, feltevéseink szerint $10^2/600^2 = 0{,}00028$, s így a keresett vsz.-et a 10 000 és 0,00028 paraméterű binominális eloszlás k-adik tagja adja (k $= 0, 1, \ldots,$ 10 000), amelyet POISSON-eloszlással közelíthetünk. *b)* Az előbbi vsz.-et kell összegezni az összes $k \geqq 3$ értékekre. Az említett közelítéssel $\lambda = 2{,}8$, ez $\sum_{k=3}^{\infty} e^{-2{,}8}\, (2{,}8)^k/k! \approx 0{,}5526$. *c)* Legyen a lefényképezendő terület négyzetpercekben R^1; hogy ezen a területen k csillag van, annak a vsz. 10 000 és $R^1/600^2$ paraméterű binomiális eloszlás k-adik tagja; újra megengedjük, hogy ezt POISSON-eloszlással közelíthetjük [$\lambda = (10^4/600^2)\, R_1$ lesz]. Ekkor legalább egy csillag jelenlétének vsz.-e $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\, \lambda^k/k! = 1 - e^{-\lambda}$, ennek kell $> 0{,}9$ lennie. λ-t beírva ebből R_1-re kb. $81 (= 9 \cdot 9)$ négyzetfokot kapunk. *d)* Nézzük az ellentett eseményt (egyetlen ilyen részben sem lesz $>$ 1 látható csillag) = (mindegyik részben 0 vagy 1 látható csillag lesz). Ekkor a mondott esemény vsz.-e valamely részre a 10 000 és $1/600^2$ paraméterű binomiális eloszlás első két tagjának ($k = 0, 1$) összege, vagyis közelítve ez $\approx e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\lambda$, ahol $\lambda = 10\,000/600^2$. Mivel az egyes részekbe jutó csillagok száma feltevés szerint egymástól függetlennek vehető, a mondott esemény vsz. az összes részekre = az egyes részekre vonatkozó vsz.-ek szorozata $= (e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\lambda)^{600^2}$. A végeredményhez ezt 1-ből le kell vonni; ekkor $1 - 10^{-72}$-t kapunk ($\approx$ „gyakorlatilag biztos" — mondják erre).

14. Annak a vsz.-e, hogy egy baktérium bekerül a kémcsőbe, ugyanaz, mint azé, hogy a folyadéknak a majd a kémcsőbe átjutó V_1 térfogatrészében éppen benne van ugyanez a baktérium; ez pedig V_1/V_0. A kémcsőbe átjutott baktériumszám, ξ egyenlő az említett V_1 térfogatú folyadékrészbe bejutó baktériumok számával; a baktériumok sorsának függetlensége folytán pedig ez binomiális eloszlású vsz. v.-nak tekinthető

és így $P(\xi = k) = \binom{N}{k} \left|\frac{V_1}{V_0}\right|^k \left|1 - \frac{V_1}{V_0}\right|^{N-k}$ $(k = 0, 1, \ldots N)$. Ha a paraméterekre a mondott feltételek fennállnak, ezt az eloszlást az NV_1/V_0 paraméterű POISSON-eloszlás közelíti meg (ez a POISSON-eloszlással való közelítés definíciójából következik),

15. Keresendő $P(|\xi/V_1 - N/V_0| < \tau N/V_1) = P(|\xi - NV_1/V_0| < \tau N) = P(NV_1/V_0 - \tau N < \xi < NV_1/V_0 + \tau N)$. ξ binomiális eloszlású volt N és V_1/V_0 paraméterekkel. Itt V_0 és V_1 egyforma nagyságrendű, és így a normális s. f.-nyel közelíthetünk. A közelítő formulában szereplő $t_1 = -\tau\sqrt{N/(V_1/V_0)\,(1 - V_1/V_0)}$, $t_2 = \tau\sqrt{N/(V_1/V_0)\,(1 - V_1/V_0)}$. Ezzel kell felírni a teljes (hibatagos) kifejezést. (A közelítő formulában $\xi \gtrless np + t_1\sqrt{npq}$; itt pedig csak $\xi > NV_1/V_0 - \tau N$ szerepel ugyan, de ez lényegtelen, mert $P(\xi = NV_1/V_0 - \tau N)$ nyilván 0, s így $(\gtrless)$-t tartalmazó formula a $(>)$ esetre is alkalmazható.)

16. Annak a vsz.-ét keressük, hogy találomra kivett (ugyanaz, mint ezen § 14. fel.-ban a „kiöntött") $V_1 = 1$ térfogatban $\geqq t$ baktérium lesz. Mivel pontosan k $(k = 0, 1, \ldots)$ jelenléte vsz.-ének jó közelítésben általánosságban $e^{-NV_1/V_0}\,(NV_1V_0)^k/k!$-t lehetett venni, az itt keresett vsz. közelítőleg $\sum_{k=t}^{\infty} e^{-(N/V_0)}\,(N/V_0)^k/k!$

17. Láttuk, hogy ha egy egér 1 cm³-t kap, elpusztulásának vsz.-e

$$p = \sum_{k=t}^{\infty} e^{-(N/V_0)}\,(N/V_0)^k/k!.$$

Legyen ξ az elpusztult egerek száma; feltevéseink alapján ξ binomiális eloszlású vsz. v. és így a keresett vsz. $P(\xi = g) = \binom{10}{g} p^g\,(1-p)^{10-g}$ $(g = 0, 1, \ldots, 10)$ (igen bonyolult kifejezés, ezért a további taglalást mellőzzük).

18. Legyen a baktériumokat tartalmazó folyadék térfogata V_0, benne N baktérium, az egyes egerekbe befecskendezett térfogat V_1, és a minimális halálos baktériumadag t. Így okoskodhatunk: annak a vsz., hogy egy egér elpusztul, jó közelítéssel 0,95-nak vehető. Egyetlen egér elpusztulásának vsz. azonban = annak a vsz., hogy $\geqq t$ baktérium került a V_1 térfogatba. Ha a V_1-be ξ baktérium került,

$$P(\xi \geqq t) = \sum_{k=t}^{\infty} \binom{N}{k} \left|\frac{V_1}{V_0}\right|^k \left|1 - \frac{V_1}{V_0}\right|^{N-k}$$

(pontosan). A POISSON-eloszlás helyett közelítsünk a normális s. f.-nyel; ekkor $P(t \leqq \xi < \infty)$-t kell meghatároznunk, vagyis a közelítő formulában $t_2 = \infty$, $t_1 = (t - NV_1/V_0)/\sqrt{N\,(V_1/V_0)\,(1 - V_1/V_0)}$-t kell írnunk. Az $o(1/\sqrt{N})$-rendű tagok elhanyagolásával tehát (közelítőleg) egy egér elpusztulásának vsz.-e

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du,$$

s ennek feltevéseink szerint $\approx 0{,}95$-nek kell lennie. *a)*-nak az felel meg, hogy N/V_0 és t is kicsi (nagy toxicitás, kis számú, a szervezetbe jutott baktérium is halálos), *b)*-nek ennek a fordítottja. Azt kell tehát vizsgálnunk, N/V_0 és t melyik típusánál lesz az előbbi integrál $\approx 0{,}95$, illetőleg *közelebb* 1-hez. t_1-nek $\approx -1{,}65$-nek kell lennie, hogy az integrál $\approx 0{,}95$ legyen. Ez többféleképpen is elő-

állhat, *a)* és *b)* esetében egyaránt. A döntést pl. a következő kísérlet nyújthatja: a V_0 térfogatú baktériumoldathoz öntsünk még V_0 mennyiségű folyadékot. Ekkor x felére esik, t nyilván változatlan marad. Adjunk ismét V_1 cm³-t újabb N egérnek és állapítsuk meg az elpusztultak százalékát (s). Ez az s kb. egy egér elpusztulásának vsz.-e; hozzá valamilyen t_2 alsó határ tartozik a fenti integrálban. De

$$t_2 = (t - V_1 N/2 V_0)/\sqrt{(V_1 N/2 V_0)(1 - V_1/2 V_0)}.$$

Ezzel még egy egyenletünk van t és N/V_0-ra (V_0, V_1 ismert!), s így ezek értékeit kiszámíthatjuk, vagyis többet is kaptunk, mint a döntés *a)* és *b)* között.

21. Legyen ξ POISSON-eloszlású vsz. v., $P(\xi = k) = e^{-\lambda}\lambda/k!$ ($k = 0, 1, \ldots$; λ = konst). Vizsgáljuk az $M(k) = P(\xi = k-1)/P(\xi = k) = k/\lambda$ hányadost, s keressük meg, milyen k-nál vált ez át 1-nél kisebb értékről (esetleg 1-en át) 1-nél nagyobb értékre. Ennél a k-nál van nyilván a maximum. Ha λ nem egész, $M(k) < 1$, míg $k < \lambda$ és $M(k) > 1$, ha $k > \lambda$, tehát $k = [\lambda]$-nál van a maximum ($[\lambda] + 1$, a rákövetkező k érték már $> \lambda$, ott már $M(k) > 1$). Ha λ egész, $\lambda - 1$-nél és λ-nál ugyanaz az eloszlás értéke, előttük, utánuk kisebb, e két pontban van maximum. A grafikon $k = 0$-nál véges s a végtelenben $\to 0$. Maximuma eshet 0-ba is; ez akkor lép fel, ha $\lambda \leqq 1$. (v ö. a POISSON-e.-ok ábrájával!).

25. A 4. § 24. pl. alapján mondható, hogy valamely τ időtartam alatti hívások ξ száma POISSON-eloszlású vsz. v., azaz $P(\xi = k) = e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k/k!$ ($k = 0, 1, \ldots$). Egy t időpontban akkor lesz folyamatban épp j számú beszélgetés, ha a $(t - T, t)$ intervallumban pontosan j hívás futott be. Ennek a vsz.-e pedig az előzők alapján $e^{-\lambda T}(\lambda T)^j/j!$

26. Ha p_i annak a vsz., hogy épp i van folyamatban, a keresett vsz. (minthogy az egyes lehetőségek egymást kizáró eredmények) $p = \sum_{i=j+1}^{\infty} p_i$. De p_i a 4. § 25. fel.-ból $e^{-\lambda T}(\lambda T)^i/i!$ és így $p = \sum_{i=j+1}^{\infty} e^{-\lambda T}(\lambda T)^i/i! = 1 - \sum_{i=0}^{j} e^{-\lambda T}(\lambda T)^i/i! = \frac{1}{j!}\int_0^{\lambda T} t^j e^{-t}\,dt$

(vö. 4. § 22. pl.!).

27. Mivel a 4. § 24. pl. feltételei mellett a Δt alatt befutó hívások száma, ξ, POISSON-eloszlású, $\lambda\,\Delta t$ paraméterű vsz. v., a szóban forgó vsz. $1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) = 1 - e^{-\lambda\Delta t} - e^{-\lambda\Delta t}\lambda\,\Delta t = \lambda^2(\Delta t)^2 + \ldots$, tehát az $o(\Delta t)$ részletesen kiírva így kezdődik.

29. Mivel feltételeink szerint különböző intervallumokban befutó hívások számai független vsz. v.-k, a $(\tau + t)$-ben befutó hívások száma független attól, mi történt $(0, t)$-ben, s így a keresett vsz. annak a vsz., hogy $(\tau + t)$ alatt pont j hívás érkezik, ez pedig $e^{-\lambda(\tau - t)}[\lambda(\tau - t)]^j/j!$ ($j = 0, 1, \ldots$) (λ a POISSON-eloszlás paramétere).

30. Az, hogy a fénysugár egyetlen gömböt sem metsz, azt jelenti, hogy a fénysugár körül r sugárral rajzolt hengerben nem lesz egyetlen gömb középpontja sem. Ennek az eseménynek keressük a vsz.-ét; feltevéseink alapján ez $e^{-\lambda V}$, ahol V a henger térfogata ($= 4\pi r^2 H$, $\lambda > 0$ konst).

31. *a)* Legyen ξ hipergeometrikus eloszlású vsz. v., és vizsgáljuk a $P(\xi = k-1)/P(\xi = k) = I(k)$ hányadost. Mivel $P(\xi = k) = \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$ ($k = 0, \ldots, n$), $I(k) = k(N - M - n + k)/(M - k + 1)(n - k + 1)$, azt keressük, hol vált át $I(k)$ (esetleg az 1 értéket is felvéve) $<$ 1-ből $>$ 1-be. Nyilván ott a maxi-

mum. Átváltás oly k-nál történik, amelynél $k(N+2) < (n+1)(M+1)$ a $k(N+2) > (n+1)(M+1)$-be vált át (esetleg egyenlő lesz ezzel). Ha $(n+1)(M+1)/(N+2) = A$ nem egész, ez $k = [A]$-nál következik be. Ha A egész $k = A-1$ és $k = A$-nál ugyanaz az eloszlás értéke, előtte, utána kisebb; itt lesz a maximum. (A grafikon különben $k = 0$ és $k = n$-ben véges értéket vesz fel.) A maximumhely $k = 0$-ban csak úgy lehetne, ha $A \leqq 1$ volna, ez azonban csak az értelmetlen $n = 0$ és $n = 1$, $M = 0$ esetekben állhat fenn, tehát a maximum nem lehet $k = 0$-nál. *b)* Legyen ξ negatív binomiális eloszlású vsz. v.,

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k \quad (r = 1, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots;\ q = 1-p).$$

Képezzük ismét a $k-1$ és k értékekhez tartozó vsz.-ek $L(k)$ hányadosát; ez $k/(k+r-1)\,q$. Az előbbiekhez hasonló okoskodással kapjuk, hogy a maximumhely $k = [q(r-1)/p] = [B]$-nél van, ha B nem egész; ha B egész, $k = B-1$ és $k = B$-nél egyenlő az eloszlás értéke, és ez egyúttal a maximum helye is. A grafikon $k = 0$-nál véges, a ∞-ben $\to 0$. A maximum $k = 0$-nál $B \leqq 1$ esetén lehet; ez mindig fennáll, ha $qr \leqq 1$. (vö. a szóbanforgó e.-ok ábráival!).

33. p-t jó közelítéssel vehetjük azon esemény vsz.-ének, hogy egy kifogott lepke épp a ritka típus. Annak a vsz.-ét keressük, hogy a ritka típus B-edszer épp a $T = B + \xi$ alkalommal kerül megfogásra; ez azonban feltételeink mellett azt jelenti, hogy ξ negatív binomiális eloszlású vsz. v., p és B paraméterekkel, és így

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{B-1+k}{B-1} p^B (1-p)^k \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

vagy ξ helyett a $B + \xi = \tau$ vsz. v.-ra (az összes „kísérletek" számára) térve át,

$$\mathbf{P}(\tau = T) = \mathbf{P}(\xi = T - B) = \binom{T-1}{B-1} p^B (1-p)^{T-B}, \quad (T = B, B+1, \ldots).$$

34. Legyen A_i: (a repülőgép az i-edik alkalommal nem tér vissza) $(i = 1, 2, \ldots)$. Ekkor $\mathbf{P}(A_i) = p$, $\mathbf{P}(\bar{A}_i) = 1-p$. Az az esemény, hogy egy repülőgép n $(= 0, 1, \ldots)$ kiküldetést túlél, az $n+1$-ediket pedig már nem, $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n \cdot \bar{A}_{n+1} \equiv B$. Feltevéseink azt jelentik, hogy az $\bar{A}_i$-k függetlenek és A_{n+1} is független a többitől, a keresett vsz. tehát $\mathbf{P}(B) = p(1-p)^n$. Ha esetünkben a relatív gyakoriságra támaszkodva $p = 0{,}05$-ot és $n = 20$-at veszünk, $\mathbf{P}(B) \approx 0{,}179$, vagyis egyáltalán nem okoskodhatunk úgy, hogy a 21-edik kiküldetésből már biztosan nem tér vissza a gép. — Vegyük észre, hogy a $p(1-p)^n \equiv pq^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ eloszlás a negatív binomiális eloszlás speciális esete. [A $\binom{r-1+k}{r-1} p^r q^k$ standard kifejezésben tegyünk $r = 1$, $k = n$-et]. Ezt az eloszlást, mint tudjuk, *geometriai eloszlásnak* is szokták nevezni.

35. Mondható, hogy közelítőleg 0,06 a vsz.-e, hogy a vastagság az alsó toleranciahatár alatt van, és 0,02, hogy felette van. Legyen ξ_1, illetve ξ_2 az alsó határ alá, illetve a felső határ fölé eső darabok száma. Ekkor 1. $\mathbf{P}(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2)$-t keressük; (ξ_1, ξ_2) nyilván polinomiális eloszlású, és a keresett vsz.

$$\frac{100!}{x_1!\,x_2!\,(100-x_1-x_2)}\, 0{,}06^{x_1} \cdot 0{,}02^{x_2} \cdot 0{,}92^{100-x_1-x_2}.$$

2. A keresett vsz. $\mathbf{P}(\xi_2 = 6)$, feltéve, hogy ξ_1 akármilyen. Ez

$$\sum_{x_1=0}^{94} \frac{100!}{x_1!\,6!\,(94-x_1)!} \cdot 0{,}06^{x_1} \cdot 0{,}02^6 \cdot 0{,}92^{94-x_1} = \binom{100}{6} 0{,}98^{94} \cdot 0{,}02^6 = 0{,}0116,$$

ami közvetlenül is belátható. 3. Annak a vsz.-e, hogy valamely darab nem megfelelő, nyilván $0{,}06 + 0{,}02 = 0{,}08$, és így a keresett vsz. $\binom{100}{x} (0{,}08)^x\,(0{,}92)^{100-x}$, ami egyúttal $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 = x)$ is. 4. $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 \leqq 5 = \sum_{x=0}^{5} \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 = x)$-et keressük; ez 3. alapján nyilván $\sum_{x=0}^{5} \binom{100}{x} (0{,}08)^x \cdot (0{,}92)^{100-x}$, amely Poisson-eloszlással közelítve $0{,}1912 + \Delta$, ahol $|\Delta| < 0{,}061$. A pontos érték 0,1804, a 0,1912 tehát csak 0,0108-cal tér el a tényleges értéktől.

36. Keressük mindjárt annak a vsz.-ét, hogy az elfogadhatósági intervallum alatt k, felett l ellenállásnak lesz az értéke ($k, l \geqq 0$; $k, l \leqq N$). Ha az ellenállások értékei egymástól függetlenek, ezt a polinomiális eloszlást adja meg: $\mathbf{P}(\xi = k, \eta = l) = \frac{N!}{k!\,l!\,(N-k-l)!} p_1^k\,p_2^l\,(1-p_1-p_2)^{N-k-l}$. Hogy az egészben n hibás lesz, annak vsz.-e

$$\mathbf{P}(\xi + \eta = n) = \sum_{\substack{k \\ k+l=n}} \sum_{l} \mathbf{P}(\xi = k, \eta = l) = \binom{N}{n} (p_1 + p_2)^n\,(1 - p_1 - p_2)^{N-n}$$

(összegezés mindazon k és l-ekre, melyekre $k + l = n$). Ez közvetlenül is belátható. ξ és η függetlenek, ha $\mathbf{P}(\xi = k, \eta = l) = \mathbf{P}(\xi = k)\,\mathbf{P}(\eta = l)$. De

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \sum_{l=0}^{N-k} \mathbf{P}(\xi = k, \eta = l) = \binom{N}{k} p_1^k\,(1-p_1)^{N-k}.$$

Hasonlóan

$$\mathbf{P}(\eta = l) = \binom{N}{l} p_2^l\,(1-p_2)^{N-l},$$

s így a szorzat-összefüggés nem áll fenn, ξ és η nem függetlenek, amint azt már egyszerű megoldás is mutatja.

5. §. *A leggyakoribb eloszlásfüggvények*

2. Ebben az esetben (az idézett pl.-k és fel.-ok jelöléseivel)

$$\mathbf{P}(E \mid L) = \int_0^B \exp\,[-\omega^2/2\sigma^2]\,\omega^2\,d\omega +$$

$$+ \int_B^{\sqrt{R}} \exp\,[-\omega^2/2\sigma^2]\,\omega^2\,[1 - \sqrt{1-R^2}\,\sqrt{1-B^2/\omega^2}]\,d\omega \Big/$$

$$\int_0^B \exp\,[-\omega^2/2\sigma^2]\,\omega^2\,d\omega + \int_B^M \exp\,[-\omega^2/2\sigma]\,\omega^2\,[1 - \sqrt{1-R^2}\,\sqrt{1-B^2/\omega^2}]\,d\omega.$$

A nevező explicite kiszámítható; *a számlálót R szerint kifejtve* és csak a nagyságrendben legnagyobb tagokat tartva meg, végül is $\mathbf{P}(E \mid L) \approx 2\sqrt{R}/\sqrt{2\pi}\sigma\,(1+\sigma^2)$. Ez viszonylag csak akkor nagy, ha σ nagyságrendje $\sqrt{R}$-ével egyező (vagyis igen kicsi) s így ξ, η, ζ nagy vsz.-gel szűk határok közt mozognak. (*Laplace:* Sur les comètes (Connaissance des temps pour 1816)).

5. Ha egy elektron kilépett a fémből, sebessége ξ komponensének (feltételeink szerint) kilépés előtt is már $\geqq \sqrt{E}$-nek kellett lennie. A keresett vsz. tehát más szóval annak a vsz., hogy ξ $(u, u+\Delta u)$-be esik stb. stb., azon feltétel mellett, hogy $\xi \geqq \sqrt{E}$. Feltételeink szerint, mivel η-ra és ζ-ra nincs megkötés, $o(\Delta u, \ldots)$-től eltekintve a keresett vsz. $g(u, v, w)\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w = A^2 e^{-a(v^2+w^2)}\,\mathbf{P}\,(u \leqq \xi < u+\Delta u \mid \xi \geqq \sqrt{E})\,\Delta v\,\Delta w$. De $\mathbf{P}(u \leqq \xi < u+\Delta u \mid \xi \geqq \sqrt{E}) = \mathbf{P}(u \leqq \xi < u+\Delta u,\ \xi \geqq \sqrt{E})/\mathbf{P}(\xi \geqq \sqrt{E})$, utóbbi tényező $\equiv 0$, ha $u < \sqrt{E}$ (*csonkított s. f.* szerepel!) Feltettük, hogy a sebességkomponensek normális eloszlásúak kilépés előtt és után, így tehát (egy $o(\Delta u)$ tagtól eltekintve) a számláló $A e^{-au^2}\,\Delta u$; $(u \geqq \sqrt{E}$; egyébként $\equiv 0)$, a nevező pedig $\int_{\sqrt{E}}^{\infty} A e^{-au^2}\,du$. A végeredmény tehát $(o(\Delta u), o(\Delta u, \ldots)$ tagoktól eltekintve: $g(u, v, w) \cdot$

$$\Delta u\,\Delta v\,\Delta w = A^2 e^{-a(u^2+v^2+w^2)}\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w \Big/ \int_{\sqrt{E}}^{\infty} e^{-au^2}\,du,$$

(ha $u \geqq \sqrt{E}$; egyébként $\equiv 0$.)

6. A koordinátatengelyre a $0-24^h$ időtartamot rakjuk fel (mindezt óraegységekben mérjük). Az időjelzések ezen az intervallumon 24 egyenlő távol levő ponttal jellemezhetők. Az óranézés ξ pillanatát a (0,24)-re véletlenszerűen rádobott ponttal jellemezhetjük. ξ említett egyenletes eloszlása esetén ξ s.f.-e $f(x) = C$ (konst), ha $0 < x \leqq 24$, egyébként $\equiv 0$; legfeljebb 10^m-et akkor kell várnia az időjelzésre, ha ξ az $(1 - 1/6, 1)$ $(2 - 1/6, 2), \ldots$ intervallumok valamelyikébe esik. Ennek a vsz.

$$\int_{1-1/6}^{1} C \cdot dx + \int_{2-1/6}^{2} C \cdot dx + \ldots + \int_{24-1/6}^{24} C \cdot dx = C\,(24/6);$$

C azonban meghatározható $\int_0^{24} C\,dx = 1$-ből (a rádobott pont valahol biztosan van), innen $C = \frac{1}{24}$, s így a keresett vsz. 1/6.

7. A keresett vsz. az irány egyenletes eloszlása folytán nyilván a 2φ nyílásszöghöz tartozó térszög és a teljes térszög hányadosa. Ennek értéke $2\pi\,(1 - \cos\varphi)/4\pi = (1/2)\,(1 - \cos\varphi)$.

9. Az egyenletes eloszlás folytán ξ s. f.-e a $(0, T_1]$ intervallumban $f(x) = 1/T_1$, egyébként $\equiv 0$, és így $\mathbf{P}\,(0 \leqq \xi < T) = \int_0^T \frac{dx}{T_1} = \frac{T}{T_1}$, de ez p-vel is egyenlő, amiből $T_1 = T/p$. Legyen B: $(A$ bekövetkezik $(0, t)$-ben), C: $(t \leqq \xi < T)$. $\mathbf{P}(C \mid \bar{B})$-t keressük. Nyilván $\mathbf{P}(C \mid \bar{B}) = P(C\bar{B})/\mathbf{P}(\bar{B})$. De $\mathbf{P}(B) = \int_0^t \frac{1}{T_1}\,dx = \frac{t}{T_1}$.

$$\mathbf{P}(\bar{B}) = 1 - \frac{t}{T_1}\,;\quad \mathbf{P}(C\bar{B}) = \mathbf{P}(C) = \int_t^T \frac{dx}{T_1} \qquad \frac{T-t}{T_1},$$

amiből $\mathbf{P}(C \mid \bar{B}) = p\,(T-t)/(T-pt)$.

10. Legyen A_M: (N-ből M sörét esett át a lyukakon) és ξ s. f.-e $f(x)$, amely feltevés szerint 1 [ha $(0 < x \leqq 1)$; egyébként $\equiv 0$]. A feltételes s. f.-ekre vonatkozó tételek szerint a ξ feltételes s. f.-ére az A_M bekövetkezése mint feltétel mellett egy $o(\Delta x)$ tagtól eltekintve fennáll: $f(x \mid A_M)\,\Delta x = f(x)\;\; \mathbf{P}(A_M \mid \xi = x)\,\Delta x/\mathbf{P}(A_M) = \mathbf{P}(A_M \mid \xi = x)\,\Delta x/\mathbf{P}(A_M)$. Ez igen kis Δx-nél kb. annak a vsz., hogy ξ x és $x + \Delta x$ közé esik. (0,1]-et egyenlő kis elemi Δx szakaszokra osztva fel, ξ ezek közül legnagyobb vsz.-gel azon $(x, x + \Delta x)$-be fog esni, amely x-re $f(x \mid A_M)$-nek maximuma van. Ebből a szempontból a $\mathbf{P}(A_M)$-mel, amely konstans, nem kell foglalkoznunk, $\mathbf{P}(A_M \mid \xi = x)$-et vizsgáljuk csak. Mivel egy sörét becsapódási helye egyenletes eloszlású vsz. vektor, annak a vsz., hogy egy sörét $\xi = x$ esetén átesik, épp x, és azé, hogy pontosan M db esik át, $\binom{N}{M} x^M (1-x)^{N-M}$. Ez $\mathbf{P}(A_M \mid \xi = x)$, amelynek $x = M/N$-nél van maximuma; ez a keresett x érték.

11. Feltevés szerint annak a vsz., hogy ξ értéke a (0,1]-en belül x és $x + \Delta x$ közt van, $\Delta x = f(x)\,\Delta x$, vagyis ξ s. f.-e 1 $(0 \leqq x \leqq 1$; egyébként 0, továbbá A_n: (n egymás utáni lövés talált), B: [az $(n+1)$-edik talál]. A keresett vsz. $\mathbf{P}(B \mid A_n) = \mathbf{P}(A_n\,B)/\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_{n+1})/\mathbf{P}(A_n)$. A teljes valószínűség tételének egyik alakja szerint $\mathbf{P}(A_n) = \int_0^1 \mathbf{P}(A_n \mid \xi = x)\,f(x)\,dx = \int_0^1 \mathbf{P}(A_n \mid \xi = x)\,dx$. Mivel az egyes lövések függetlenek, annak vsz., hogy $\xi = x$ feltétel mellett n találat lesz egymás után, $\mathbf{P}(A_n \mid \xi = x)$ azaz x^n-nel egyenlő, és így $\mathbf{P}(A_n) = \int_0^1 x^n\,dx = 1/(n+1)$, vagyis a végeredmény $\mathbf{P}(B \mid A_n) = (n+1)/(n+2)$. Még azt keressük, milyen n-nél lesz ez $\geqq 0{,}998$? $(n+1)/(n+2) \geqq 0{,}999$, ha $n \geqq 998$. — Ha ξ nem volna vsz. v., hanem állandó (pl. p), $\mathbf{P}(B \mid A_n) = p$ volna, azaz független attól, mi történt előzőleg. Ez az amúgyis elég triviális tény a magyarázata pl. annak, *miért nem lehet „játékszkémát" találni a rulettnél:* Ha 100-szor fekete jött is ki, a 101-edik esetben is ugyanaz a fekete vsz.-e, mint az elsőnél.

13. Feltevéseinkből következik, hogy az első ütközés után a neutron ε_1 kinetikus energiájának feltételes s. f.-e $f_1(E_1 \mid E_0) \equiv f_1(E_1) = 1/E_0$. $(0 < E_1 \leqq E_0$; egyébként $\equiv 0)$. A második ütközés után a neutron ε_2 kinetikus energiája s. f.-e a teljes vsz. tétele integrálalakja alapján: $f_2(E_2) = \int_{E_2}^{E_0} f_2(E_2 \mid E_1)\,f_1(E_1)\,dE_1$. $(0 < E_2 \leqq E_1 \leqq E_0$; egyébként $\equiv 0)$; az alsó határ azért E_2, mert $E_1 < E_2$ és $E_1 > E_0$ értékekre $f_2(E_2 \mid E_1)$ értelemszerűen $\equiv 0$. Ezt a gondolatmenetet megismételve, végül is az n-edik ütközés után a neutron ε_n kinetikus energiájának s. f.-e

$$f_n(E_n) = \int_{E_n}^{E_0} f_n(E_n \mid E_{n-1})\,f_{n-1}(E_{n-1})\,dE_{n-1}$$

$(0 < E_n \leqq E_{n-1} \leqq \ldots \leqq E_0$; egyébként $\equiv 0$; a felső határ E_0, mert — energiaveszteség nélküli ütközéseknél — E_{n-1} E_0-ig felmehet). Feltevés szerint azonban $f_k(E_k \mid E_{k-1}) = 1/E_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, n$; $0 \leqq E_k \leqq E_{k-1}$; egyébként $\equiv 0)$. Könnyű számolással mármost azt kapjuk, hogy $f_2(E_2) = (1/E_0) \log (E_0/E_1)$; $f_3(E_3) = (1/2\,E_0)\,[\log (E_0/E_3)]^2$, ebből azt sejthetjük, hogy $f_k(E_k) = (1/(k-1)!\,E_0)\cdot [\log (E_0/E_k)]^{k-1}$. Próbáljuk igazolni ezt teljes indukcióval (a kezdeti esetekre igaz). Képezzük $f_{k+1}(E_{k+1})$-et, feltéve, hogy k-ra igaz a képlet. Ekkor $f_{k+1}(E_{k+1}) = \int_{E_{k+1}}^{E_0} f_{k+1}(E_{k+1} \mid E_k)\, f_k(E_k)\, dE_k = \int_{E_{k+1}}^{E_0} [1/(k-1)!\,E_0]\,[\log (E_0/E_k)]^{k-1}\,(1/E_k)\, dE_k =$ $= (1/k!\,E_0)\,[\log (E_0/E_{k+1})]^k$, vagyis sejtésünk igazolódott. n ütközés után tehát a neutron kinetikus energiájának, mint vsz. v.-nek s. f.-e

$$f_n(E_n) = [1/E_0(n-1)!]\,[\log (E_0/E_n)]^{n-1} \qquad (0 \leqq E_n \leqq E_0\,;\ \text{egyébként} \equiv 0).$$

15. Jellemezzük az első fonalszakadást azzal a képpel, hogy a szakadás időpontjaiban az időtengelyre „egy pont esik". Azonban ennek a τ helye a közölt feltételek alapján exponenciális eloszlású vsz. v. lesz (vö. az előző pl.-val!), és így $\mathbf{P}(\tau < t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t > 0$; egyébként $\equiv 0$; λ konst). Feltevéseinket a megfigyelések különben szépen igazolják.

16. Annak a vsz., hogy a lámpa az autó odaérkezésekor pirosat mutat, feltevéseink alapján 1/2. *a)* és *b)* nyilván elegendő ahhoz, hogy kimondhassuk, hogy a lámpa pirosból átváltásának τ időpontja exponenciális eloszlású vsz. v., vagyis $\mathbf{P}(t \leqq \tau < t + \Delta t) = \lambda\, e^{-\lambda t}\, \Delta t + o(\Delta t)$ $(t > 0$; $\lambda > 0$ konst). A keresett esemény vsz.-e = P(a lámpa $t = 0$-kor pirosat mutat) · P (a lámpa $(t, t + \Delta t)$-ben vált át, feltéve, hogy $t = 0$-kor pirosat mutatott) $= (1/2)\,\lambda\, e^{-\lambda t}\, \Delta t + o(\Delta t)$.

17. A normális e. f. esetében $y = (1/\sqrt{2\pi}\,\sigma) \exp [-(x-m)^2/2\,\sigma^2]$, $y' = -(x-m)\,y/\sigma^2$, $y'/y = (x-m)/(-\sigma^2)$, vagyis a PEARSON-féle differenciálegyenlet paraméterei: $\alpha = -m$, $\delta = -\sigma^2$, $\beta = \gamma = 0$. Az exponenciális eloszlás s. f.-énél $y = \lambda \exp(-\lambda x)$, $y' = -\lambda y$, $y'/y = -\lambda$, a megfelelő paraméterek $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\gamma = -1/\lambda$. Hasonlóan igazolható, hogy a következőkben majd előforduló újabb s. f.-ek jó része is kielégíti a PEARSON-féle differenciálegyenletet.

6. §. *Valószínűségi változók egyes függvényeinek eloszlásfüggvénye*

2. A megfelelő képletek szerint η e. f.-e, $G(y) = F[(y-b)/a]$ (ha $a > 0$) és $G(y) = 1 - F[(y-b)/a]$ (ha $a < 0$), s. f.-e, $g(y)$ pedig $g(y) = (1/|a|)\, f[(x-b)/a]$ $(-\infty < x < \infty)$. Ennek leggyakoribb alkalmazása, amidőn ξ $m = 0$ és $\sigma = 1$ paraméterű normális s. f. és η $\sigma\,\xi + m$ $(m, \sigma > 0$ tetszőleges) alakú; ekkor η s. f.-e $\exp [-(x-m)^2/2\,\sigma^2]/\sqrt{2\pi}\,\sigma$ lesz (vagy ennek az esetnek a fordítottja). Azonnal látjuk, hogy $\eta = -\xi$ e. f.-e, illetve s. f.-e esetünkben $1 - F(-y)$, illetve $f(-y)$. — Az értelmezési tartományok persze akkor is könnyen meghatározhatók, ha ξ nem ∞ intervallumban van értelmezve. — *A stellárstatisztikai feladat megoldása:* Legyen egy csillag Naptól való távolsága ϱ; valamely r távolságban levő csillag abszolút magnitudója ξ_r, látszólagos magnitudója pedig η_r. Feltevés szerint $\xi_r = \eta_r - 5 \log r + 5$. Legyenek ezek a mennyiségek mind vsz. v.-k; ξ_r s. f.-e nyilván $\varphi_r(M)$. Legyen továbbá tetszőleges (bárhol levő) csillag látszólagos magnitudója az η vsz. v. Feltevéseink és a relatív gyakoriság és vsz. kapcsolata alapján mondható, hogy ha az ω térszögben levő összes csillagok száma N, η s. f.-e közelítőleg $A(m)/N$. Továbbá, feltevéseink és

a relatív gyakoriság és vsz. kapcsolata folytán $(1/N)\ [D(r)\ \omega\ r^2\ \Delta r + o(\Delta r)]$ közel annak a vsz.-e lesz, hogy valamely, az ω térszögben levő csillag távolsága r és $r + \Delta r$ közt van, azaz ϱ s. f.-e közelítőleg $(1/N)\ D(r)\ \omega\ r^2 = h(r)$. — η_r s. f.-e nyilván η s. f.-e azon feltétel mellett, hogy $\varrho = r$. Jelölje ezt $g(m \mid r)$ $(-\infty < m < \infty)$. Ekkor egy ismert formula szerint, jó közelítéssel, $A(m)/N = \int_{-\infty}^{\infty} g(m \mid r)\ h(r)\ dr$. Mivel ξ_r és η_r közt lineáris függvénykapcsolat van, jelen feladatmegoldásunk elejének eredményeit felhasználva, azt kapjuk, hogy $g(m \mid r) = \varphi_r\ (m - 5 \log r + 5)$ $(-\infty < m < \infty;\ 0 \leqq r < \infty)$. $A(m)$-et akarjuk meghatározni; képleteink alapján, jó közelítéssel

$$A(m)/N = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r\ (m - 5 \log r + 5)\ h(r)\ dr,$$

azaz

$$A(m) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r\ (m - 5 \log r + 5)\ D(r)\ r^2\ dr.$$

A valóságban $A(m)$ és $\varphi_r(M)$ ismeretében kell $D(r)$-et meghatározni; az előbbi formula $\varphi_r(M)$-re egy ún. elsőfajú Fredholm-féle integrálegyenletet szolgáltat; ezt a stellárstatisztikában *Schwarzschild-féle integrálegyenlet* néven tárgyalják.

3. A hullámhossz a c fénysebesség és a frekvencia hányadosa. Jelen felfogásban ez egy $\eta = c/\xi$ vsz. v.-nek tekinthető, amelynek van valamilyen $g(\lambda)$ s. f.-e. A keresett mennyiség jó közelítéssel $g(\lambda)\ \Delta\lambda$; elég tehát $g(\lambda)$-t meghatározni. Vsz. v. függvénye s. f.-éről van szó, ezt megadó képletünk itt alkalmazható; ennek alapján η s. f.-e

$$g(\lambda) = f\{\Psi^{-1}(\lambda)\} \left| \frac{d}{d\lambda}\ \psi^{-1}\ (\lambda), \right| \text{ ahol } \psi(x) = c/x,\ \psi^{-1}(\lambda) = c/\lambda \text{ és így}$$

$$g(\lambda) = [a\ (c/\lambda)^3 / (e^{b(c/\lambda)} - 1)]\ (c/\lambda^2) = a\ c^4/\lambda^5\ (e^{bc/\lambda} - 1).$$

(ha $\lambda \geqq 0$, egyébként $\equiv 0$). Ezzel egyszerű következményként kaptunk meg egy olyan formulát, amelyet legtöbbször külön szoktak levezetni. — Az itt látott felfogással sok más fizikai problémánál is dolgozhatunk (bizonyos tömeg, energia stb. folytonos vagy diszkrét eloszlású egy intervallumban stb.).

6. A vonzóerő értékét fejezze ki a φ vsz. v. Nyilván $\varphi = k \cdot \varrho^{-2}$ (k konst). A feltett kérdésre φ s. f.-e segítségével adhatunk választ. Ha φ és ϱ összefüggését $\varphi = h(\varrho)$-val jelöljük, vsz. v. függvénye s. f.-ének itt alkalmazható képlete alapján φ s. f.-e

$$g(F) = f[h^{-1}(F)] \left| \frac{dh^{-1}}{dF} \right| = 2\pi\ s\ k^{3/2}\ F^{-5/2} \exp\ [-4\pi\ s\ k^{3/2}\ F^{-3/2}/3]$$

($F \geqq 0$-ra! egyébként $\equiv 0$). Annak a vsz.-e tehát, hogy a vonzóerő abszolút értéke F és $F + \Delta F$ közé essék, a s. f. értelmezése alapján $g(F)\ \Delta F + o(\Delta F)$ lesz.

7. Feltevés szerint a komponensek független vsz. v.-k és η, ζ nem változik a kilépéskor (vagyis normális s. f.-ű marad), így tehát $h(u, v, w)\ \Delta u\ \Delta v\ \Delta w =$

$$= A^2 \exp\ [-\alpha\ (v^2 + w^2)]\ \Delta v\ \Delta w \cdot \mathbf{P}(u \leqq \xi' < u + \Delta u) + o(\Delta u, \ldots).$$ De

$\mathbf{P}(u \leqq \xi' < u + \Delta u) = f(u)\ \Delta u + o(\Delta u)$, ahol $f(u)$ ξ s. f.-e. Az 5. § 5. fel. tudjuk,

hogy $f(u) = \exp\,[-\alpha\,u^2]\Big/\int\limits_{\sqrt{E}}^{\infty} \exp\,[-\alpha\,u^2]\,du$ (ha $u \geqq \sqrt{E}$, egyébként $\equiv 0$). Ennek segítségével kiszámítjuk $\xi' = +\sqrt{\xi^2 - E}$ ($\xi \geqq \sqrt{E}$) s. f.-ét, $\Theta(y)$-t. Vsz. v. függvényének s. f.-ére vonatkozó általános képletünk itt alkalmazható (ξ értékkészletén $\sqrt{\xi^2 - E}$ monoton és deriváltja $\neq 0$), így tehát $\psi(u) = \sqrt{u^2 - E}$ transzformáló függvény esetén $\psi^{-1}(y) = \sqrt{y^2 + E}$, és így

$$\Theta(y) = \exp\,[-\alpha\,(y^2 + E)] \cdot y\Big/\sqrt{y^2 + E}\int\limits_{\sqrt{E}}^{\infty} \exp\,[-\alpha\,u^2]\,du$$

(ha $y \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$). Végül tehát

$$h(u, v, w) = A^2 \exp\,[-\alpha\,E] \cdot u \exp\,[-\alpha\,(u^2 + v^2 + w^2)]\Big/\sqrt{u^2 + E}\int\limits_{\sqrt{E}}^{\infty} \exp\,[-\alpha\,u^2]\,du$$

(ha $u \geqq 0$; egyébként $\equiv 0$). Persze, $-\infty < v < +\infty$; $-\infty < w < \infty$.

11. Ha $m = \pm\sqrt{k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $\mathbf{P}(\eta = m) = \mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda t}(\lambda\,t)^k/k!$; más m-ekre $\mathbf{P}(\eta = m) = 0$, mert ξ csak a közölt diszkrét értékeket veheti fel.

15. Legyen ξ_1 (ξ_2) az első (második) intervallumban befutó hívások száma. $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 = s)$-et keressük; független vsz. v.-k összegére vonatkozó tételünk értelmében ez a vsz. $\sum\limits_{k=0}^{s} \mathbf{P}_t(k)\,\mathbf{P}_t(s - k)$.

17. Legyenek a ξ_i-k ($i = 1, 2, \ldots$) ugyanazon paraméterű geometriai eloszlású független vsz. v.-k, vagyis legyen $\mathbf{P}(\xi_i = n) = pq^n$ ($n = 0, 1, \ldots$; p, q konst, $0 < p < 1$, $p + q = 1$). $\xi_1 + \ldots + \xi_k = \eta_k$ vsz. eloszlását keressük. η_2 és η_3-ét könnyű kiszámítani:

$$\mathbf{P}(\eta_2 = m) = \sum_{l=0}^{m} \mathbf{P}(\eta_1 = l)\;\mathbf{P}(\xi_1 = m - l) = \sum_{l=0}^{m} p\,q^l\,p\,q^{m-l} = p^2\,q^m\,(m + 1) =$$

$$= (m + 1)\,p^2\,q^m,$$

hasonlóan

$$\mathbf{P}(\eta_3 = m) = \sum_{l=0}^{m} (l + 1)\,p^2\,q^l\,p\,q^{m-l} = \binom{2 + m}{2} p^3\,q^m \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

Azt az ezekre alapozott sejtést, hogy $\mathbf{P}(\eta_j = m) = \binom{j - 1 + m}{j - 1} p^j\,q^m$ ($j = 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, \ldots$) teljes indukcióval bizonyíthatjuk; η_1 és η_2-re igaz volt: ha η_j-re is igaz,

$$\mathbf{P}(\eta_{j+1} = m) = \sum_{l=0}^{m} \mathbf{P}(\eta_j = l)\,\mathbf{P}(\xi_j = m - l) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \mathbf{P}(\eta_j = l)\,p\,q^{m-l} = \sum_{l=0}^{m} \binom{j - 1 + l}{j - 1} p^j\,q^l\,p\,q^{m-l} =$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{m} \binom{j - 1 + l}{j - 1}\right) p^{j+1}\,q^m = \binom{(j + 1) - 1 + m}{(j + 1) - 1} p^{j+1}\,q^m;$$

amivel sejtésünket igazoltuk. Következésképp a keresett

$$\mathrm{P}(\eta_k = m) = \binom{k-1+m}{k-1} p^k q^m \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

vagyis η_k tényleg negatív binomiális eloszlású vsz. v.

21. Feltételeink szerint ξ, illetve η s. f.-e $f(x) = \exp\left[-(x-R_0)^2/2\sigma_R^2\right]/\sqrt{2\pi}\,\sigma_R$, illetve $g(x) = \exp\left[-(x-r_0)^2/2\sigma_r^2\right]/\sqrt{2\pi}\sigma_r$. A 6. § 20. pl. alapján a párok megfelelő voltát jellemző $\zeta = \xi - \eta$ vsz. v. normális eloszlású, $m = R_0 - r_0$ és $\sigma^2 = \sigma_R^2 + \sigma_r^2$ paraméterekkel. A meg nem felelők arányát nagyjából $1 - \mathrm{P}(a \leqq \zeta < b)$ adja, és ez =

$$1 - \int_a^b \frac{\exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,dx = 1 - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\exp\left[-x^2/2\right]}{\sqrt{2\pi}}\,dx,$$

ahol $t_1 = (a-m)/\sigma = [a-(R_0-r_0)]/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_r^2}$ és $t_2 = (b-m)/\sigma = [b-(R_0-r_0)]/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_r^2}$, amiből a keresett százalék kiszámítható. (Megjegyezzük, hogy $a \leqq \xi \leqq b$ vsz.-e is ugyanannyi lett volna, mint $a \leqq \xi < b$-é, hiszen $\xi = b$ vsz.-e, folytonos s. f.-ű vsz. v.-ról lévén szó, zérus.)

23. Legyen a hosszúság ξ, a szélesség η, ahol ξ, η független, egyenletes eloszlású vsz. v.-k a $(h, h+m)$, illetve $(s, s+m)$ intervallumokon, vagyis s. f.-eik $f(y) = 1/m$ $(h < y < h+m$; egyébként $\equiv 0)$ és $g(y) = 1/m$ $(s < y < s+m$; egyébként $\equiv 0)$. Ekkor $\zeta = \xi \cdot \eta$ s. f.-e, $f(z) = \int_0^\infty f(z \mid y)\, g(y)\, \frac{dy}{y}$. Ez csak akkor $\not\equiv 0$, ha $hs < z < (s+m)(h+m)$, ezen belül fekvő z-nél pedig $\int_a^{\cdot} \frac{dy}{m^2 y} = (1/m^2)\log(a/b)$, ahol $b = \min[s+m, z/h]$, $a = \max[s, z/(h+m)]$, vagyis

$$b = \begin{cases} z/h & [z < h(s+m)] \\ s+m & [z \geqq h(s+m)] \end{cases} \qquad a = \begin{cases} s & [z \leqq s(h+m)] \\ z/(h+m) & [z > s(h+m)] \end{cases}$$

26. Az $\alpha_i/100$ értékek vehetők azon események vsz.-einek, hogy egy egyén a vonatkozó csoportba tartozik. Legyen A_i: [az egyén az i-edik csoportba tartozik $(i = 1, 2, 3)$], B: [egy egyént n vizsgálatból k $(= 0, 1, \ldots, n)$-szor tbc-snek nyilvánítanak]. Ekkor a keresett vsz. $\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(B \mid A_i)\ \mathrm{P}(A_i)$. De $\mathrm{P}(A_i) = \alpha_i/100$; $\mathrm{P}(B \mid A_i) = \binom{n}{k} p_i^k (1-p_i)^{n-k}$, s így a végeredmény 3 binomiális eloszlás keveréke konstans súlyokkal.

27. Közelítőleg mondható, hogy α, β, γ annak a vsz.-e, hogy az összességből találomra választott csillag „törpe" stb. Keressük annak a $\mathrm{P}(\xi = k, \eta = l)$ vsz.-ét, hogy a 3 vizsgálat közül k-ban „óriás" az osztályozás és l-ben „szuperóriás" $(k, l =$

$= 0,1,2,3$; $k + l \leqq 3$). $\xi = k$, $\eta = l$ úgy állhat elő, hogy 1. a csillag „törpe", és ezen feltétel mellett a 3 vizsgálatból k „óriás", l „szuperóriás" és $3 - k - l$ „törpe" osztályozást ad, 2. a csillag „óriás", és ezen feltétel mellett ... stb. stb., mint előbb, 3. a csillag „szuperóriás" és ... stb. stb. Az egyes feltételek mellett a k, l-szeri fellépés vsz.-ét polinomiális eloszlás k, l paraméterű tagja adja meg (a vsz.-eket a három alesetben a táblázatból kapjuk). A teljes vsz. tételét alkalmazva végül is

$$\mathbf{P}(\xi = k, \eta = l) = \alpha \frac{3!}{k!\,l!(3-k-l)!} p_1^k p_2^l (1 - p_1 - p_2)^{3-k-l} +$$

$$+ \beta \frac{3!}{k!\,l!(3-k-l)!} (1 - p_3 - p_4)^k p_1^l p_3^{3-k-l} +$$

$$+ \gamma \frac{3!}{k!\,l!(3-k-l)!} p_6^k (1 - p_5 - p_6)^l p_5^{3-k-l},$$

azaz polinomiális eloszlások keveréke. Ebből pl. $\mathbf{P}(\xi = k)$-t úgy kapjuk meg, hogy összegezzük l minden értékére 0-tól $3 - k$-ig; így

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \alpha \binom{3}{k} p_1^k (1 - p_1)^{3-k} + \beta \binom{3}{k} (1 - p_3 - p_4)^k (p_3 + p_4)^{3-k} +$$

$$+ \gamma \binom{3}{k} p_6^k (1 - p_6)^{3-k},$$

ami közvetlenül is könnyen belátható. Hasonlóan járunk el $\mathbf{P}(\eta = l)$ esetében.

28. Jó közelítéssel mondhatjuk, hogy $s/100$ annak a vsz., hogy találomra választott egyén beteg. A teljes vsz. tételének ismételt alkalmazásával $\xi = k$ ($k = 0, 1, \ldots, 3$) számú pozitív döntés így állhat elő: 1. a vizsgált egyén beteg, és ezen feltétel mellett A negatív, de B a 3-ból k-szor pozitív; vagy A pozitív és B a 3-ból $(k-1)$-szer pozitív, 2. a vizsgált egyén egészséges, de ezen feltétel mellett A negatív, de ... stb. stb., mint 1.-nél. Az egyes vsz.-eket felírva

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (s/100)\left[(1 - p_1)\binom{3}{k} p_2^k (1 - p_2)^{3-k} + p_1 \binom{3}{k-1} p_2^{k-1} (1 - p_2)^{4-k}\right] +$$

$$+ (1 - s/100)\left[(1 - p_3)\binom{3}{k} p_1^k (1 - p_4)^{3-k} + p_3 \binom{3}{k-1} p_1^{k-1} (1 - p_4)^{4-k}\right]$$

Ez is felfogható keverékként.

30. Legyen a beérkező korpuszkulák száma ξ, a regisztráltaké η vsz. v. A keresett vsz. $\mathbf{P}(\eta = k) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}(\eta = k \mid \xi = l)\ \mathbf{P}(\xi = l)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Feltevés szerint azonban $\mathbf{P}(\xi = l) = e^{-\lambda T} (\lambda T)^l / l!$ ($\lambda > 0$ konst; $l = 0, 1, \ldots$) és $\mathbf{P}(\eta = k \mid \xi = l) = \binom{l}{k} p^k (1 - p)^{l-k}$. Az előző feladat mintájára számolva tovább, végül is $\mathbf{P}(\eta = k) = e^{-p\lambda T} (p \lambda T)^k / k!$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

33. Ha $\sigma(x) = \text{konst} = \sigma_1$, ζ s. f.-ének a 6. § 32. pl. megadott alakja, $h(z) = \int_m^M \frac{\exp\left[-(z-x)^2/2\sigma^2\right] g(x)}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, dx$. Állapítsuk meg $g(x)$-et, a 6. § 32. pl.-beli ξ s. f.-ét; feltevés szerint az észlelés időpontja, τ, egyenletes eloszlású vsz. v. a $(0, 1]$-en, $s(t) = 1$ $(0 < x \leqq 1$; egyébként $= 0)$ s. f.-nyel. Ennek folytán $\xi(\tau) = a + b \cos 2\pi\tau$ e. f.-e, $G(x)$, tekintetbe véve, hogy az $x(t) = a + b \cos 2\pi t$ függvénynek nyilvánvalóan $t = 1/2$-nél egyetlen maximuma van (év közepén maximális az átlaghőmérséklet!), és e hely körül szimmetrikus függvény, egyszerű (nem szükségképpen vsz. v. függvénye e. f.-ének formulájára támaszkodó) meggondolás alapján $G(x) = (1/\pi) \arccos\left[(x-a)/b\right]$ (ha $m < x \leqq M$; ettől balra (jobbra) eső x-ekre $= 0$ (1)]. ξ s. f.-e tehát $g(x) = (1/\pi)\left(1/\sqrt{b^2 - (x-a)^2}\right)$; $(m < x \leqq M$; egyébként $= 0)$. Ezzel

$$h(z) = \int_m^M \frac{\exp\left[-(z-x)/2\sigma^2\right] dx}{\pi\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{b^2 - (x-a)^2}} = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} \frac{\exp\left[-(z-a-bw)^2/2\sigma^2\right]}{\sqrt{1-w^2}}\, dw.$$

[minthogy $x(t)$ fent említett alakja tulajdonságaiból az is következik, hogy $a > 0$, $b < 0$, és így $m = a - b$, $M = a + b$). — Ezt a modellt meteorológiai vizsgálatok támasztják alá.

34. Feltevés szerint a T alatt beérkező részecskék számának vsz. e.-a $\mathbf{P}(\xi = \nu) = e^{-\lambda T}(\lambda T)^\nu/\nu!$ $(\lambda > 0$ konst; $\nu = 0, 1, \ldots)$. Legyen $\xi_i = 1$, ha az i-edik $(i = 1, 2, \ldots)$ korpuszkula energiája $\geqq E_0$, és ellenkező esetben $\xi_i = 0$. $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = k)$ nyilván annak a vsz., hogy n $(= 1, 2, \ldots)$, korpuszkula közt épp k-nak lesz $\geqq E_0$ energiája, ez azonban $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Véletlentől függő számú diszkrét vsz. v. összegének e. f.-éről szóló tételünk szerint tehát

$$\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu = l) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!) \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} =$$

$$= e^{-\lambda T p} (\lambda T p)^l / l! \quad (l = 0, 1, \ldots),$$

vagyis a $\geqq E_0$ energiájú korpuszkulák száma ismét Poisson-eloszlású. (Ez a vsz.e. is binomiális eloszlás Poisson-eloszlással mint súllyal való keveréséből állt elő.)

7. §. *Valószínűségi változók jellemzői*

2. Feküdjön az első „rúd" az x tengelyben; eleje legyen az origóban, vége mutasson pozitív irányba. A k-adik „rúd"-nak a pozitív x tengellyel bezárt β_k irányát a következő rekurzív formula adja meg: $\beta_k = \beta_{k-1} + \xi_k \cdot \alpha$, ahol ξ_k vsz. v., amely a ± 1 értékeket $1/2$ vsz.-gel veheti fel. $k = 1, \ldots, n$, $\beta_1 = 0$, és a ξ_k-k függetlenek. Ebből $\beta_k = (\xi_1 + \ldots + \xi_k)\alpha$. A „lánc" vetülete az x, illetve y tengelyre nyilván $\sum_{k=1}^{n} \cos\beta_k$, illetve $\sum_{k=1}^{n} \sin\beta_k$, és így a kezdő- és végpont távolsága,

$$L_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \cos \beta_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \sin \beta_k\right)^2 \cdot L_n^2$$

is vsz. v. $M(L_n^2)$-et keressük; ezt is rekurzíve határozzuk meg. Egyszerű számolással:

$$L_n^2 - L_{n-1}^2 = 1 + 2\left(\sum_{k=1}^{n-1} \cos(\beta_n - \beta_k)\right) =$$

$$= 1 + 2\left(\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left[(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)\,\alpha\right]\right).$$

$$M(L_n^2 - L_{n-1}^2) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} M[\cos\left[(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)\,\alpha\right]]$$

(itt a tagok vsz. v.-k, de nyilván *nem* függetlenek, hisz pl. ξ_n mindben szerepel; a v. é. szempontjából azonban ez közömbös). $M[\cos\left[(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)\,\alpha\right]] =$ $= \sum P(\xi_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, \xi_n = x_n) \cos\left[(x_{k+1} + \ldots + x_n)\alpha\right]$, ahol $x_{k+1}, \ldots \pm 1$ lehet csak 1/2, 1/2-vsz.-gel, és az összegezés az összes szóba jövő $x_{k+1} \ldots$ értékekre szól. Számítsuk ezt ki. $x_{k+1} + \ldots + x_n$ elő tudja állítani az $(n-k) - 2r$ számokat, ahol $r = 0, 1, \ldots, n-k$, éspedig minden r-nél $\binom{n-k}{r}$-féleképpen (annak megfelelően, hogy bármelyik r lehet a tagok közül -1 s a többi tag $+1$, amidőn az összeg $(n-k) - 2r$). Lesz tehát $\binom{n-k}{r}$ olyan tag, amelyben $\cos\left[((n-k) - 2r)\alpha\right]$ szerepel. Mivel bármely $x_{k+1}, \ldots, x_n$ értékeloszlásnál a függetlenség folytán

$$P(\xi_{k+1} = x_{k+1}, \ldots) = (1/2)^{n-k}$$

a keresett v. é. így alakul:

$$M\{\cos\left[(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n)\,\alpha\right]\} =$$

$$\sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cos\left[((n-k) - 2r)\,\alpha\right] = (\cos\alpha)^{n-k}$$

Ezzel

$$M(L_n^2 - L_{n-1}^2) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} (\cos\alpha)^{n-k} = 1 + 2\cos\alpha\,\left[(\cos^{n-1}\alpha - 1)/(\cos\alpha - 1)\right].$$

Ebből rekurzíve

$$M(L_n^2) = M(L_n^2 - L_{n-1}^2) + M(L_{n-1}^2 - L_{n-2}^2) + \ldots +$$

$$+ M(L_2^2 - L_1^2) + M(L_1^2) = \sum_{i=2}^{\infty} \left(1 + 2\cos\alpha\,\left[(\cos^{i-1}\alpha - 1)/(\cos\alpha - 1)\right]\right) + 1$$

(ti. értelemszerűen $M(L_1^2) = 1$) — vagyis $M(L_n^2) = n\left[(1 + \cos\alpha)/(1 - \cos\alpha)\right] -$ $- 2\cos\left[(1 - \cos^n\alpha)/(1 - \cos\alpha)^2\right]$.

14. A 3. § 9. fel. értelmében annak a vsz.-e, hogy egy x évet megért egyén még $t(\geqq 0)$ évig elél, $p(x, t) = l(x + t)/l(x)$. $\xi(x, t)$ nyilván binomiális eloszlású vsz. v. N és $p(x, t)$ paraméterekkel. Így tehát (vö. 7. § 4. pl.)

$$M[\xi(x, t)] = N\,p(x, t) = N\,[l(x + t)/l(x)].$$

15. A 4. § 35. fel.-beli ξ_1, illetve ξ_2 vsz. v. v.-éről van szó. Ezek egyszerű meggondolással a definíció gépies alkalmazásánál elemibb módon is kiszámíthatók. A 4. § 35. feladatbeli adatok felhasználásával ti.

$$\mathbf{M}(\xi_1) = \sum_{x_1=0}^{100} x_1 \; \mathbf{P}(\xi_1 = x_1) = \sum_{x_1=0}^{100} x_1 \binom{100}{x_1} 0{,}06^{x_1} \cdot 0{,}94^{100-x_1} = 6.$$

Teljesen hasonlóan $\mathbf{M}(\xi_2) = 2$.

16. Legyen a mondott időtartam alatt egy szakadás vsz.-e p. Ha n szál van a gépben és ξ a szakadások száma, ξ binomiális eloszlású vsz. v., és így $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Mint tudjuk, kis p esetén ezt jól megközelíti a $\mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ $(k = 0, 1, \ldots)$ Poisson-eloszlás, ahol λ a ξ (szakadásszám) v. é.-e. A várható érték gyakorlatilag a ξ-re nagyszámú megfigyelésből kapott átlagértékkel vehető egyenlőnek; vagyis esetünkben $\lambda \approx 2$, és így $\mathbf{P}(\xi = k) \approx e^{-2}\, 2^k/k!$. Annak a vsz.-e, hogy 0 vagy 1 szakadás lesz a vizsgált időtartam alatt, $\mathbf{P}(\xi = 0) + \mathbf{P}(\xi = 1) \approx 0{,}406$, vagyis nagyszámú megfigyelésnél az eseteknek nagyjából 40 százalékában észlelünk 0 vagy 1 szakadást. (Itt az exakt Poisson-eloszlásra vezető meggondolást is lehetett volna alkalmazni; feltételeit ti. a tapasztalat igazolja.)

17. Feltevéseinkből következik, hogy a V térfogatban levő csillagszám, ξ, vsz. v, amely exakte Poisson-eloszlást követ, azaz $\mathbf{P}(\xi = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ $(n = 0, 1, \ldots;$ $\lambda > 0$ konst). Láttuk (7. § 5. pl.), hogy a Poisson-eloszlás v. é.-e a paramétere; esetünkben tehát a V térfogatban levő csillagszám átlaga $\approx$ a v. é. $= \lambda$, vagyis az átlagos sűrűség definíciója folytán $V s \approx \lambda$. Annak a $\mathbf{P}(\xi = n)$ vsz.-e tehát, hogy V-ben épp n csillag lesz, $\approx e^{-(Vs)}(Vs)^n/n!$ — Másik kérdésünkre már a jelenlegieknél kevesebb feltétel alapján is adhatnánk feleletet; exponenciális eloszlásra jutnánk. Jelenleg úgy okoskodhatunk: A keresett vsz. helyett kérdezzük: Mi a vsz.-e, hogy a legközelebbi csillag távolsága, amelyet az η vsz. v. jellemezzen, $< r$? Nyilván η e. f.-ét, $\mathbf{P}(\eta < r) \equiv$ $\equiv F(r)$-t keressük. Ez azonban annak a vsz.-e, hogy a $V = 4\pi r^3/3$ térfogatban legalább egy csillag van $= \mathbf{P}(\xi =$ legalább $1) = 1 - \mathbf{P}(\xi = 0) = 1 - e^{-\lambda} \approx 1 - e^{-Vs} =$ $= 1 - \exp\,[-4\pi s r^3/3]$, vagyis η e. f. jó közelítéssel $F(r)$. Annak a vsz.-e, hogy η r és $r + \Delta r$ közé esik, definíció szerint (magasabb rendű tagok elhanyagolásával) $\frac{dF(r)}{dr}\,\Delta r$. A keresett vsz. tehát jó közelítéssel

$$\frac{dF(r)}{dr}\,\Delta r \equiv f(r)\,\Delta r = 4\pi s r^2 \exp\,[-4\pi s r^3/3] \cdot \Delta r.$$

Ezzel a feladattal — a dolog lényegére mélyebben rámutató tárgyalásban — még találkozunk majd a *B)* részben.

18. Meg kell állapítanunk, hogyan függ az időtől a pont és a vonzó centrum r távolsága. A nagytengely pozitív felétől kiindulva, vezessük be a centrumból kiindulva a pont r és φ polárkoodinátáit. Ha m a pont, M a centrum tömege, γ a gravitációs állandó, v_0 és r_0 a pont sebessége és rádiuszvektora a pálya valamely fix pontjában, akkor a mechanika elemei szerint a pont mozgását az

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m r_0^2 - \gamma\frac{Mm}{r_0} \equiv \frac{Km}{2}$$

és $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2c$ (K, c konst) egyenletek határozzák meg (t az idő). Ezekből

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{K + \frac{2\gamma M}{r} - \frac{4c^2}{r^2}},$$ a pálya egyenlete pedig

$$r = (4c^2/\gamma M)/(1 - 2c/\gamma M)\left(\sqrt{K - \gamma^2 M^2/4c^2}\right) \cos \varphi.$$

A megfigyelés időpontja, τ, egyenletes eloszlású vsz. v. $(0, T]$-n, tehát s. f.-e $f(t) = \mu$ (konst.) $(0 < t \leqq T$; egyébként $\equiv 0)$. A pont és a vonzó centrum távolsága, ξ, szintén vsz. v.; annak a vsz.-e, hogy ξ *a pálya valamelyik felében* r *és* $r + \Delta r$ közé esik (Δr igen kicsi) r és t összefüggése alapján jó közelítéssel

$$g(r)\,\Delta r = \mu\,\Delta r/\sqrt{K + (2\gamma M/r) - (4c^2/r)} = \mu\, r\,\Delta r/\sqrt{K r^2 + 2\gamma M r - 4c^2}$$

(min $r < r \leqq$ max r; egyébként $\equiv 0$). Ha a fókusz és középpont távolsága s, egy keringés tartama alatt $r(a + s)$-től $(a - s)$-ig fogy, aztán ismét nő $(a + s)$-ig, azaz min $r = a - s$, max $r = a + s$. Minden ξ érték kétszer fordul elő, annak a vsz.-e tehát, hogy ξ *általában* r *és* $r + \Delta r$ közé esik, jó közelítéssel $2g(r)\Delta r$. ξ s. f.-e tehát $2\,g(r)$

$[a - s < r < a + s$; egyébként $\equiv 0]$ és így a keresett v. é. $\mathbf{M}(\xi) = \int_{a-s}^{a+s} r \cdot 2\,g(r)dr$.

(Az ebben szereplő μ-t $2\int_{a-s}^{a+s} g(r)\,dr = 1$-ből kell meghatároznunk.) A szereplő integrálok: $I_1 = \int \frac{r^2\,dr}{\sqrt{\alpha r^2 + \beta r - \delta}}$ és $I_2 = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\alpha r^2 + \beta r - \delta}}$ típusúak (α, β, $\delta > 0$). Ezek táblázatokban fellelhetők, értékeik ($R = \alpha r^2 + \beta r - \delta$):

$$I_1 = [(r/2\alpha) - (3\beta/4\alpha^2)]\sqrt{R} + (3\beta^2/8\alpha^2 + \delta/2\alpha)\int \frac{dr}{\sqrt{R}},$$

$$I_2 = \sqrt{R}/\alpha - (\beta/2\alpha)\int \frac{dr}{\sqrt{R}},$$

ahol

$$\int \frac{dr}{\sqrt{R}} = (1/\sqrt{\alpha})\log\left[2\sqrt{\alpha}\sqrt{R} + 2\alpha r + \beta\right].$$

A $g(r)$-ben szereplő konstansokat, valamint $(a + s)$-et, $(a - s)$-et α, β, δ-val kapcsolatba hozva, a keresett v. é. végül is $(3\beta^2 + 4\alpha\delta)/4\alpha\beta$, vagy — a-val és s-sel fejezve ki — $a(1 + s^2/2a^2)$. Mivel a pályaellipszis excentricitása, $e = s/a$, végül is az $\mathbf{M}(\xi) = a(1 + e^2/2)$ értékét kapjuk.

19. ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású vsz. v. volt, így tehát $\mathbf{M}(\xi) = 1/\lambda$. A IV. 5. fel.-ban láttuk, hogy két egymásra következő hívás közti időtartam is ugyancsak λ paraméterű exponenciális eloszlású vsz. v., így tehát utóbbi v. é.-e is $1/\lambda$.

20. A korpuszkula akkor tehet meg x hosszúságú utat ütközés nélkül (egy ütközés után), ha abba a henger alakú térrészbe, amelyet a korpuszkulának az x hosszú út megtétele közben elfoglalt helyzetei kitöltenek, egyéb részecske „nem ér bele". Ha a részecskék középpontjait tekintjük véletlenszerűen eloszolva, az előbbi azt jelenti,

hogy részecskecentrum nemcsak hogy az előbbi térrészbe, hanem még az e köré, felrakott, a részecskék sugara vastagságú rétegbe sem eshet. Igen kis hibával ez azzal ekvivalens, hogy a szóban forgó x magasságú, $V = \text{konst} \cdot x$ térfogatú hengerbe nem esik részecskecentrum. Feltevés szerint a részecskecentrumok száma bármely térrészben POISSON-eloszlású vsz.v., így tehát a mondott esemény vsz.-e $\approx e^{-\lambda V} = e^{-\mu x}$ (ahol μ újabb konstans). Ha az ütközés nélkül megtett út hossza ξ, nyilván $\mathbf{P}(\xi \geqq x) = e^{-\mu x}$, vagyis ξ e. f.-e $1 - e^{-\mu x}$ $(x > 0$; egyébként $\equiv 0)$. Ebből a ξ exponenciális eloszlású vsz. v. Innen $\mathbf{M}(\xi) = 1/\mu$. — $\mathbf{M}(\xi) \equiv a$ neve *„átlagos szabad úthossz"*; ez értelmezi szemléletesen μ-t. a értéke azon közeg fizikai jellemzőitől függ, amelyen a korpuszkula áthalad. a-val kifejezve, annak a vsz.-e, hogy x úton nem lesz ütközés, $e^{-x/a}$ lesz. — Ez a modell a legkülönbözőbb kísérleteknél szerepelhet.

21. Ha ütközés nem történik, a molekula által dt alatt megtett út $\xi\, dt$ lesz. Ennek keressük a v. é.-ét; ez $\mathbf{M}(\xi\, dt) = dt \cdot \mathbf{M}(\xi) = dt\, A \cdot \int_0^\infty x^3 \exp\,[-\alpha x^2\,]\, dx = (A/2\alpha^2)dt$.

$\int_0^\infty p(x)\, dx = 1$-ből $A = 4\sqrt{\alpha^3/\pi}$, és így $\mathbf{M}(\xi\, dt) = (2/\sqrt{\pi\alpha})\, dt$.

25. Legyen B_k az az esemény, hogy a munkás az $1, \ldots, n$ gép közül épp a k $(= 1, \ldots, n)$-adiknál van, és legyen $\mathbf{P}(B_k) = \text{konst} = 1/n$, továbbá annak a vsz.-e, hogy a gépek közül épp az i $(i = 1, \ldots, n)$-edik kívánja az ellátást, ugyancsak konst, vagyis $1/n$. Ekkor a megteendő út $\lambda_i^{(k)} = \begin{cases} (k-i)\,a & (k \geqq i) \\ (i-k)a & (k < i) \end{cases}$, és mindegyik esetnek $1/n$ a vsz.-e. Legyen a megteendő út hossza *általában* ξ, akkor B_k fennállása esetén $\mathbf{P}(\xi\,|B_k) = \mathbf{P}\,(\xi = \lambda_i^{(k)}) = 1/n$, és így $\mathbf{M}(\xi\,|B_k) = \sum_{i=1}^{k}(k-i)\,a/n + \sum_{i=k+1}^{n}(i-k)\,a/n$.

A feltételes v. é. képlete szerint $\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{M}[\mathbf{M}\,(\xi\,|B_k)\,] = \sum_{k=1}^{n}(1/n)\,(\sum_{i=1}^{k}(k-i)\,a/n + \sum_{i=k+1}^{n}(i-k)\,a/n) = a\,(n^2-1)/3\,n = (l/3)\,(1 + 1/n)$, ha $l = (n-1)\,a$ az első és utolsó gép távolsága. A sz. n. kiszámításához először $\mathbf{M}(\xi^2\,|B_k)$-t írjuk fel, ez $\sum_{i=1}^{k}(k-i)^2\,a^2/n + \sum_{i=k+1}^{n}(i-k)^2\,a^2/n$, aztán $\mathbf{M}(\xi^2) = \mathbf{M}[\mathbf{M}(\xi^2\,|B_k)\,] = \sum_{k=1}^{n}(1/n)\mathbf{M}(\xi^2\,|B_k)$-et; ez $= \sum_{k=1}^{n}(1/n)\,(\sum_{i=1}^{k}(k-i)^2\,a^2/n + \sum_{i=k+1}^{n}(i-k)^2\,a^2/n = (a^2/6)\,(n^2-1)$, s ebből $\mathbf{D}^2(\xi) = a^2\,(n^2-1)\,(n^2+2)/18\,n^2 = (l^2/18)\,[1 + 2/n + 1/n^2 + 6/n^2\,(n-1)\,]$.

27. Legyen a t idő alatt kilépő elektronok száma ξ_t; ekkor — exakt POISSON-eloszlás fellépte folytán — $\mathbf{P}(\xi_t = k) = e^{-\lambda t}\,(\lambda\,t)^k/k!$ $(k = 0, 1 \ldots)$; mint tudjuk; $\mathbf{M}(\xi_t) = \mathbf{D}^2(\xi_t) = \lambda\,t$. Az áramerősség = az időegység alatt a katódot elhagyó töltés $= I = \varepsilon\,\xi_t/t$ (ε az elektron töltése). I vsz. v. és $\mathbf{M}(I) = (\varepsilon/t)\,\mathbf{M}(\xi_t) = \varepsilon\lambda$. Továbbá $\mathbf{D}^2(I^2) = (\varepsilon^2/t^2)\,\mathbf{D}^2(\xi_t) = (\varepsilon^2/t)\,\lambda = \varepsilon\,\mathbf{M}(I)/t$, vagyis $\mathbf{D}(I) = \sqrt{\varepsilon\,\mathbf{M}(I)/t}$. $\mathbf{M}(I) \approx$ az áramerősség átlagértéke; ezt mérik a műszerek. Látjuk, hogy az áramerősség szórása annál kisebb, minél hosszabb a mérési idő; várható tehát, hogy egyre növelt mérési időtartamnál a (valóságos) pillanatnyi áramerősség egyre kevésbé tér el az átlagostól.

29. A feladatot úgy értelmezhetjük, hogy selejtes készülésének vsz.-e $\leqq 0{,}03$ legyen, vagyis az előző pl. jelöléseivel fenn kell állania, hogy

$$1 - \int_{m-1470\cdot 2/100}^{m+1470\cdot 2/100} \frac{\exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right]}{\sqrt{2\pi}}\, dx \leqq 0{,}03,$$

és ebből most σ-t kell meghatározni (mindjárt m százalékában, vagyis legyen $\sigma = 1470\, s/100$, ahol s ismeretlen). Ez másképp azt jelenti, hogy $2\,[1 - \Phi(2/s)] \leqq 0{,}03$, s ebből $2/s \geqq 2{,}18$, $s \leqq 0{,}91\ldots$, vagyis legfeljebb 0,91% szórást engedhetünk meg.

31. ξ exponenciális eloszlású vsz. v., így tehát a 7. § 11. pl. alapján $\mathbf{M}(\xi) = 1/\lambda$ és $\mathbf{D}^2(\xi) = 1/\lambda^2$.

43. Legyen egyszerűség kedvéért a gyémánt súlya egységnyi, és egy y súlyú darab értéke $A y^2$ ($A > 0$, konst). Legyenek a széthasadáskor kapott darabok súlyai $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$, $\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i = 1\right)$. Egy tetszőleges széthasadást jellemezhetünk a k dimenziós tér $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ pontjával, vagyis egy vsz. vektorral, amelynek koordinátái közt fennáll a $\sum_{i=1}^{k} \xi_i = 1$ összefüggés; az összes lehetséges széthasadásokat jellemző pontok tehát a $(k-1)$ dimenziós tér egy T hipersík-darabján vannak (a $\sum_{i=1}^{k} \xi_i = 1$ hipersíkból a koordinátasíkok által kivágott részen, ahol $1 \geqq \xi_i \geqq 0$). Az egyenlő vsz.-gel történő széthasadás azt jelenti, hogy a $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ vsz. vektor végpontjának eloszlása egyenletes T-n, vagyis s. f.-e $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = c$ (konst) [ha az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pont benne van T-ben; egyébként $\equiv 0$]. Határozzuk meg c-t, vagyis képezzük $I = \int_T c\, d\omega$-t ($d\omega$ a felületelem). A felületi integrál elméletéből tudjuk, hogy $I =$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{k-2}} dx_{k-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial g}{\partial x_{k-1}}\right)^2} \cdot c,$$

ahol $g = x_k = 1 - x_1 - \ldots - x_{k-1}$, amiből $I = c\sqrt{k}/(k-1)!$, vagyis $c = (k-1)!/\sqrt{k}$. Egy tetszőleges széthasadásnál, ahol az egyes részek súlyai $\xi_1, \ldots, \xi_n$, az összérték $A(\xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2) = A\,[\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{k-1}^2 + (1 - \xi_1 - \ldots - \xi_{k-1})^2]$. $\xi_1, \ldots, \xi_k$ ezen függvényének v. é.-ét keressük a fenti $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = c$ s. f. alapján. Ez

$$J = \int_T c\, A\, [x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2 + (1 - x_1 - \ldots - x_{k-1})^2]\, d\omega =$$

$$= \frac{A(k-1)!}{\sqrt{k}} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{k-2}} dx_{k-1}\, [x_1^2 + \ldots + (1 - x_1 - \ldots - x_{k-1})^2].$$

Tagonként integrálunk; az i-edik integrál, J_i $(i = 1, \ldots k-1)$:

$$J_i = [A(k-1)!] \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{i-1}} x_i^2\, dx_i \ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{k-2}} dx_{k-1} = [A(k-1)!]\cdot$$

$\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{i-1}} dx_i\, x_i^2 \frac{(1-x_1-\ldots-x_i)^{k-i-1}}{(k-i-1)!}$. x_i^2-et $\{[1-x_1-\ldots-x_{i-1}]-$ $-[1-x_1-\ldots-x_i]\}^2$ alakban írva fel, és az így fellépő három integrált kiszámítva,

$$J_i = A\,(k-1)!\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots 2\int_0^{1-x_1-\ldots-x_{i-1}} dx_{i-1} \frac{(1-x_1-\ldots-x_{i-1})^{k-i+2}}{(k-i+2)!} =$$

$$= A(k-1)!\, 2\,/(k+1)!;\ J_k \text{ is ugyanannyi.}$$

Könnyen igazolható, hogy a keresett $J = \sum_{i=1}^{k} J_i$, vagyis végül is

$$J = k\,A\,(k-1)!\ 2/(k+1)! = 2A/(k+1).$$

Mivel A az eredeti (egységnyi súlyú) gyémánt értéke, a k darabra tört gyémánt értékének v. é.-e az eredeti $2/(k+1)$-szerese.

44. Legyenek az ellenállásértékek ξ_1 és ξ_2; e. f.-ük itt közömbös. Keressük $\xi_1+\xi_2$ sz.-át. ξ_1 és ξ_2 függetlenségét kézenfekvő feltenni; ekkor $\mathbf{D}^2(\xi_1+\xi_2) = \mathbf{D}^2(\xi_1)+\mathbf{D}^2(\xi_1) =$ (az adatokból) $= 20^2 + 9{,}4^2$ és $\mathbf{D}(\xi_1+\xi_2) = 22{,}1$ ohm. Ennyi tehát a szórás az $\mathbf{M}(\xi_1+\xi_2) = \mathbf{M}(\xi_1)+\mathbf{M}(\xi_2) = 1470$ körül. Százalékban ez $1{,}5\%$.

45. Legyen ξ_1 a T idő alatt a kozmikus sugárzásból származó korpuszkulák száma, ξ_2 a preparátumból jövők száma. Feltevés szerint ezek POISSON-eloszlású, független vsz. v.-k; ezek paramétere legyen $\lambda_1 T$ és $\lambda_2 T$. Mi $\xi = \xi_1+\xi_2$-t észleljük; ez is POISSON-eloszlású, mint tudjuk (l. 6. § 16. pl.), $\lambda T = \lambda_1 T + \lambda_2 T$ paraméterrel, azaz $(\lambda_1+\lambda_2)T$ v. é.-kel és sz. n.-tel. Ez utóbbiakat különben csupán a vsz. v.-k összege v. é.-ére, illetve sz. n.-ére vonatkozó tételek segítségével, $\xi_1+\xi_2$ eloszlása ismerete nélkül, csak λ-ra és μ-re támaszkodva is kiszámíthattuk volna. — Ha tehát külön a kozmikus sugárzásnál s külön az összes sugárzásánál sokszor meghatározzuk a T idő alatt érkező korpuszkulák számát (ez ugyanaz, mintha egy mérést sokszor megismételnék; POISSON-eloszlásnál ugyanaz a jelenség lefolyása, bármikor kezdünk is észlelni, hisz csak a T *időtartamtól* függ) — ezek átlagából kb. megkapjuk $\lambda_1 T$-t, illetve $(\lambda_1+\lambda_2)T$-t, s ezekből $\lambda_2 T$-t, amely jellemzi a vizsgált anyagból jövő korpuszkulák számának vsz. eloszlását.

46. $X_6 = (X_1+X_2)-(X_3+X_4+X_5)$; a jobb oldal tagjai vsz. v.-k. A v. é.-re és sz. n.-re vonatkozó tételek értelmében $\mathbf{M}(X_6) = \mathbf{M}(X_1)+\mathbf{M}(X_2)-\mathbf{M}(X_3)-$ $-\mathbf{M}(X_4)-\mathbf{M}(X_5)$ és $\mathbf{D}^2(X_6) = \sum_{k=1}^{5} \mathbf{D}^2(X_k)$. Megtörténhetik, hogy (az X_i-k bizonyos e. f.-ei mellett) X_6 sz.-a oly nagy lesz, hogy 1-hez igen közeli vsz.-gel $\mathbf{D}(X_6) \gtrapprox \mathbf{M}(X_6)$; gyakorlatban ez azt jelenti, hogy nagy lesz annak a vsz.-e, hogy a példában szereplő rúd ez esetben összeszerelés után szorulni fog a gépben. Mivel az alkatrészek méreteinek sz. n.-e általában a gyártástól függ (értékét mérésekből jó közelítéssel megállapíthatjuk), az említett extrém esetben a méretlánc egyes tagjainak méretein változtatni kell, hogy végül is X_6 v. é.-e nagyobb legyen a sz.-nál, és így ne szoruljon a rúd.

47. A második relé hamarabb zár az elsőnél, ha $\xi_2 - \xi_1 < 0$. Ha ξ_2, illetve ξ_1 normális eloszlású, m_2, σ_2, illetve m_1, σ_1 v. é.-kel és sz.-sal, különbségük is normális

eloszlású, $m_2 - m_1$, $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ v. é.-kel és sz.-sal. A feladatot úgy foghatjuk fel, hogy milyen $(m_2 - m_1)$ v. é. különbség mellett lesz $\mathbf{P}(\xi_2 - \xi_1 < 0) = 0{,}001$. Kiírva, a követelmény $\int_{-\infty}^{0} \frac{\exp\left[-(x - m_2 + m_1)^2/2\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\right]}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\,dx = 0{,}001$, és ebből kell $m_2 - m_1$-et meghatároznunk, vagyis meg kell oldanunk a $\Phi[-(m_2 - m_1)/\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}] = 0{,}001$ egyenletet $m_2 - m_1$-re $\left(\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dv\right)$. Adott σ_1 és σ_2 mellett $\Phi(x)$ táblázata segítségével ez könnyen elvégezhető.

48. Legyen egy adag súlya ξ_1, és egy üres zacskóé ξ_2. Feltételeink értelmében ezek (25, 0,4), illetve (5, 0,2) v. é.-ű és sz.-ú normális eloszlású vsz. v.-k. Egy csomag súlya, $\xi_1 + \xi_2$, szintén normális eloszlású vsz. v. $25 + 5 = 30$ v. é. és $\sqrt{0{,}4^2 + 0{,}2^2} = 0{,}447$ sz.-sal. $\xi_1 + \xi_2 = 0{,}95$ vsz.-gel oly $30 - a$ és $30 + a$ határok közt lesz, amelyek mellett $\int_{30-a}^{30+a} \frac{\exp\left[-(x - 30)^2/2 \cdot 0{,}2\right]}{\sqrt{2\pi}\,0{,}447}\,dx = 0{,}95$, vagyis $\int_{-a/0{,}447}^{a/0{,}447} \frac{\exp\left[-y^2/2\right]}{\sqrt{2\pi}}\,dy = 0{,}95$. Ha $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$-t $\Phi(x)$-el jelöljük, a-t a $2\,\Phi(a/0{,}447) - 1 = 0{,}95$ egyenletből kell meghatároznunk. Az eredmény: $a = 1{,}96 \cdot 0{,}447 = 0{,}876\ldots$; egy csomag súlya 0,95 vsz.-gel lesz a $30 \pm 0{,}876\ldots$ intervallumban. — Ha egy doboz súlya, ξ_3, 30 és 1 v. é.-ű, illetve sz.-ú normális eloszlású vsz. v., egy megtöltött doboz súlya $10\,(\xi_1 + \xi_2) + \xi_3$ lesz. Ez szintén normális eloszlású vsz. v., $10 \cdot 30 + 30 = 330$ v. é.-kel és $\sqrt{10 \cdot 0{,}2 + 1} = \sqrt{3}$ sz.-sal. A továbbiakban egyszerűség kedvéért arra (a 8. §. 1. pl.-ban még tárgyalandó) tényre támaszkodunk, hogy *bármely* σ sz.-ú normális eloszlású vsz. v. értéke 0,9997 vsz.-gel lesz v. é.-e körül $\pm 3\sigma$ távol kijelölt intervallumon belül, így tehát a megtöltött dobozok súlya 0,9997 vsz.-gel a $330 \pm 3\sqrt{3}$ határok közt lesz.

8. §. *A nagy számok törvényei*

4. Alkalmazzuk az előző pl. eredményét (selejtes fellépte vagy fel nem lépte szerepel → binomiális eloszlás). Feltételünk szerint ξ/n relatív gyakoriság és p vsz. esetén $|\xi/n - p| < 0{,}001$-nek kell fennállnia, vagyis az előző példában $\varepsilon = 0{,}001$-et és az ottani $1 - 1/4\,\varepsilon^2 n = 1 - 1/4 \cdot 10^{-6} n \geqq 0{,}9973$-at kell venni kikötésünk értelmében. Innen: $n > 9{,}2 \cdot 10^7$. Mindez persze még nem jelent abszolúte is nagy pontosságot, mert pl. annak a lehetőségét se zártuk ki, hogy $p = 0{,}02$, amikor pedig a 0,001 eltérés nem jelent valami nagy pontosságot.

5. Ha a kísérletben selejtes fellépésének vsz.-e p és n kísérlet közül ξ-ben selejteset kaptunk, a 8. § 3. pl. szerint $\mathbf{P}(|\xi/n - p| < \varepsilon) > 1 - p\,(1 - p)/\varepsilon^2 n$. p-ről csak azt tudjuk, hogy $p_1 \leqq p \leqq p_2$-t tételezhetünk fel. Legyen p_i az 1/2-hez közelebb eső p_1 és p_2 közül; mivel $p\,(1 - p)$-nek $p = 1/2$-nél van max-a, $1 - p\,(1 - p)/\varepsilon^2 n \geqq 1 - p_i\,(1 - p_i)/\varepsilon^2 n$. A követelményeknek megfelel, ha olyan n-t választunk,

amelyre ez utóbbi $\geqq 0{,}9973$, az ehhez szükséges n érték $n \geqq p_i\,(1-p_i)/\varepsilon^2 \cdot 0{,}0027$. A második esetben a nagy számok törvényeinek a 8. § 3. pl.-ban közölt alakja így alakul: $\mathbf{P}(|\,\xi/n - p\,| < ps/100) > 1 - p\,(1-p)/(ps/100)^2\,n = 1 - (1-p)\,10^4/ps^2\,n$. Legyen p_j a 0-hoz közelebbi p_1 és p_2 közül, ekkor előző feltevésünk szerint $1-(1-p)\,10^4/ps^2\,n \geqq 1-(1-p_j)\,10^4/p_j\,s^2\,n$ és a keresett n-et biztosan megkapjuk abból a feltételből is, hogy az utóbbinak $\geqq 0{,}9973$-nak kell lennie. Innen $n \geqq (1-p_j)\,10^4/p_j\,s^2 \cdot 0{,}0027$. — Numerikus értékek: Az első esetben $p_i = 0{,}03$, $\varepsilon = 0{,}001$, s így $n \geqq 0{,}03\,(1-0{,}03)/10^{-6} \cdot 0{,}0027 \approx 10^7$. A másodikban $s = 1$ mellett $p_j = 0{,}02$, vagyis $n \geqq 0{,}98 \cdot 10^4/0{,}02 \cdot 0{,}0027 \approx 1{,}8 \cdot 10^8$. Ezek a meggondolások már sokkal jobban megfelelnek a valóságban elénk táruló helyzetnek. Bár az első esetben egy nagyságrenddel kisebb n-t kaptunk, mint megelőző feladatunkban, n korlátai még így is óriásiak. Később majd jobb korlátot is találunk; n nagyságát erősen befolyásolja az, hogy a „gyakorlatilag biztos" vsz.-i korlátot igen magasra szabtuk. — Azt mindenesetre látjuk, hogyan lehet *elvileg* (megadott értelemben) „gyakorlatilag biztosan" korlátok közé szorítani egyszerű alternatívával jellemezhető esemény vsz.-ét relatív gyakorisága alapján. Mivel egy esemény vsz.-ének megállapítását a gyakorlatban legtöbbször elég erre a szkémára vezetni vissza, megállapításaink igen fontosak. Ha mélyebb megállapításokat akarunk, természetesen a nagy számok „erős" törvényeihez kell folyamodnunk.

6. A készlet átlagos keménysége 36,21. A négyzetes középhiba 10,87. Ezeket az értékeket *közelítőleg* tekinthetjük egy darab keménysége, mint vsz. v. v. é.-ének és sz. n.-ének. Legyenek a kivett darabok keménységei $\xi_1, \ldots, \xi_{20}$. $\mathbf{P}\,[\,|\,(\xi_1 + \ldots + \xi_{20})/20 - 36{,}21\,| < 3\,]$-at kell megállapítanunk. Mint mondtuk, a ξ_i-k v. é.-eit, illetve sz. n.-eit 36,21, illetve 10,87-et tekintjük. E. f.-üket azonban nem ismerjük, s így legjobb esetben is csak a CSEBISEV-féle egyenlőtlenséget alkalmazhatjuk (bár csak $\mathbf{P}\,[\,|\,(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{20})/20 - 36{,}21\,| \geqq 3\,]$-ra), a BERNSTEJN-féle egyenlőtlenség feltételei nem teljesülnek. A $\mathbf{P}$ utáni zárójelet $[\,|\,(\xi_1 + \ldots + \xi_{20}) - 20 \cdot 36{,}21\,| \geqq 60\,]$ alakra hozva, $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_{20}$-szal s (feltételeink szerint) $\mathbf{M}(\xi) = 20 \cdot 36{,}21$-dal, $\mathbf{D}^2(\xi) = 20 \cdot 10{,}87$-dal, végül is a keresett vsz.-re $\geqq 1 - 0{,}06 = 0{,}94$-ot kapunk (vagyis biztos, hogy egy tizedesjegyre 0,9 a keresett vsz.). — Ezt az értéket kissé gyengíti, hogy nem a pontos v. é., illetve sz. n.-tel számoltunk; mélyebb vizsgálat azonban azt mutatja, hogy ez a gyakorlatban lényegtelen.

10. Tegyük fel, hogy tényleg 0,5 a vsz. Ebben az esetben a szóban forgó kísérletsorozatban a vizsgált esemény p vsz.-e és 0,5005 relatív gyakoriságának abszolút eltérése $< 0{,}0005$ lenne. A BERNSTEJN-féle egyenlőtlenség segítségével számítsuk ki (az itt alkalmazható!) hány kísérletet kellene végezni ahhoz, hogy annak a vsz.-e, hogy a relatív gyakoriság és a p vsz. abszolút eltérése $< 0{,}0005$ $(= \varepsilon)$; $1-\delta$ vagy ennél nagyobb legyen (mivel a gyakoriság $1/2$ körül van, feltehető, hogy $\varepsilon < p\,(1-p)$ fennáll). Mint tudjuk, ez az n kísérletszám, $n = (9/8\,\varepsilon^2)\log(2/\delta)$. Megállapodás szerint $(1-\delta)$-t 0,9973-nek vesszük; ekkor $n = (9/8 \cdot 0{,}0005^2)\log(2/0{,}0027) \approx$ $\approx 29{,}5 \cdot 10^6$. Ennyi kísérletet kellene végeznünk, hogy „gyakorlatilag biztosak" lehessünk a 0,0005 eltérésben; ettől azonban még messze jár a 24 000. Következésképp ennyi kísérlet után még korántsem várhatjuk, hogy a relatív gyakoriság ennyire megközelítse a vsz.-et: Nem következtethetünk a relatív gyakoriság alapján arra, hogy a vsz. a fenti értelemben „gyakorlatilag biztosan" 0,5. Más „gyakorlatilag biztos" szintnél persze nem volna már olyan kevés a 24 000 kísérlet. Az egész feladat megoldásának (valamint a rokon feladatok megoldásának) gondolatmenete tipikus vsz.-ek kísérleti megállapítása szempontjából.

11. A BERNSTEJN-féle egyenlőtlenség segítségével megállapítjuk, hogy a vsz. és relatív gyakoriság milyen ε értékű az előző feladatban használt értelemben „gyakorlatilag biztos" abszolút eltérésének eléréséhez kell 24 000 kísérletet végezni. Mivel 0,9973 vsz.-ű eseményeket vettünk „gyakorlatilag biztosnak", $24\,000 = (9/8\,\varepsilon^2) \log (2/0{,}0027)$-ből $\varepsilon = \sqrt{9 \cdot \log (2/0{,}0027)/824\,000} \approx 0{,}018$. Így tehát a „fej" előfordulása 0,5005 relatív gyakoriságának és p-nek az abszolút eltérése, $|0{,}5005 - p| < 0{,}018$, és így p korlátai: $0{,}4825 \leqq p \leqq 0{,}5185$ (az említett „gyakorlatilag biztos" szint mellett!).

12. A BERNSTEJN-féle egyenlőtlenség alkalmazása feltételét, $\varepsilon \leqq p\,(1-p)$-t minden esetre biztosan ellenőrizhetjük; *tegyük fel, hogy fennáll.* A relatív gyakoriság és vsz. ε-nál kisebb abszolút eltérése vsz.-ének alsó korlátja

$$1 - 2 \exp\left[-\varepsilon^2 n/2p\,(1-p)\,[1 + \varepsilon/2p\,(1-p)]^2\right] \qquad (\varepsilon \leqq p\,(1-p)\,!),$$

amelynek a 8. § 5. fel. értelmében $\geqq 0{,}9973$-nak kell lennie. Ebből

$$n \geqq \log (2/0{,}0027) \cdot 2p\,(1-p)\,[1 + \varepsilon/2p\,(1-p)]^2/\varepsilon^2$$

(a repetitórium-részben közölt becslés ennek az egyszerűsítéséből származik!). A 8. § 5. fel. szerint kiindulhatunk abból, hogy $p_1 \leqq p \leqq p_2$; legyen a korlátok közül az 1/2-hez közelebbi p_i, a távolabbi p_j. Miután $\varepsilon \leqq p_k\,(1-p_k)$ $(k = i, j)$ teljesülését feltettük, használhatjuk egyenlőtlenségünket; ennek jobb oldalát nyilván majoráljuk, ha a $p\,(1-p)$ szorzó helyett $p_i\,(1-p_i)$-t, a nevezőben levő $p\,(1-p)$ helyett $p_j\,(1-p_j)$-t írunk, következésképp

$$n \geqq \log (2/0{,}0027) \cdot 2\,p_i\,(1-p_i)\,[1 + \varepsilon/2\,p_j\,(1-p_j)]^2/\varepsilon^2$$

mindenképp megfelelő alsó korlát n-re. Feltevés szerint $p_j\,(1-p_j)$ is $\geqq \varepsilon$, tehát az ezt tartalmazó faktort még így is majorálja $(3/2)^2$, s így nem kell attól tartanunk, hogy a korlát igen nagy lesz, ha p_j kicsi. A 8. § 5. fel. numerikus értékeivel az itteni n-re $n \geqq \log (2/0{,}0027) \cdot 2 \cdot 0{,}3\,(1-0{,}3)\,[1 + 0{,}001/0{,}02\,(1-0{,}02)]^2/(0{,}001)^2 \approx$ $\approx 400\,416$-ot kapunk. (A 8. § 5. fel.-ban n alsó korlátja $\approx 10^7$ volt; az itteni majd 2 nagyságrenddel kisebb; és kisebb a 8. § 4. fel.-belinél is, amelyet általánosabb feltételek mellett kaptunk.) — Ha azonban ε-t p s százalékában adjuk meg (pl. $\varepsilon = ps/100$ alakban), és *feltesszük*, hogy $\varepsilon = ps/100 \leqq p\,(1-p)$,

$$n \geqq \log (2/0{,}0027)\,2p\,(1-p)\,[1 + (sp/100)/2p\,(1-p)]^2/(ps/100)^2 =$$
$$= \log (2/0{,}0027) \cdot 2 \cdot 10^4\,(1-p)\,[1 - s/200\,(1-p)]^2/ps^2$$

lesz; a négyzetes faktor korlátos, még ha p helyett az 1-hez közelebbi p_j-t írjuk is; az $(1-p)/p$ faktort azonban csak úgy majorálhatjuk, ha p helyett a 0-hoz közelebbi p_i-t írjuk, s így n-re biztos alsó korlát csak

$$n \geqq \log (2/0{,}0027) \cdot 2 \cdot 10^4\,(1-p_i)\,[1 + s/200\,(1-p_j)]^2/s^2\,p_i$$

-ből kapható, ez azonban minden határon túl nőhet, ha $p_i \to 0$. Ebben az esetben tehát nem lehet n-re általánosan érvényes becslést adni. — A 8. § 5. fel. numerikus adataival utóbbi esetben $(\varepsilon = sp/100 \leqq p\,(1-p)$ nyilván fennáll!) az

$$n \geqq \log (2/0{,}0027) \cdot 2 \cdot 10^4\,(1-0{,}02)\,[1 + 1/200\,(1-0{,}03)]^2/0{,}02 \approx 6\,419\,000$$

feltételt kapjuk; ez még mindig kb. egy nagyságrenddel kisebb, mint az említett fel.-ban kapott. — Ezek a korlátok persze így is rendkívül nagyok. Ennek az az oka, hogy mind a „gyakorlatilag biztos"-nál, mind a megengedhető eltérésnél erős megszorítást tettünk.

9. §. *Karakterisztikus függvény, generátorfüggvény*

12. A 9. § 8. pl.-ban láttuk, hogy ξ k. f.-e $\varphi_\xi(t) = (1 - it/\lambda)^{-1/2}$; a v. é., sz. n. nyilván létezik (az őket definiáló integrálok konvergensek), használhatjuk tehát az $i\,\mathrm{M}(\xi) = \left.\frac{d\varphi_\xi}{dt}\right|_{t=0}$, $i^2\,\mathrm{M}(\xi^2) = \left.\frac{d^2\varphi_\xi}{dt^2}\right|_{t=0}$ összefüggéseket; ezek alapján $\mathrm{M}(\xi) = 1/\lambda$, $\mathrm{M}(\xi^2) = 2/\lambda^2$ és $\mathrm{D}^2(\xi) = \mathrm{M}(\xi^2) - [\mathrm{M}(\xi)]^2 = 1/\lambda^2$. Ezt korábban közvetlen számítással kaptuk meg.

16. Feltevésünknek megfelelően ξ_1 s. f.-e $f_1(x) = \exp[-(x - m_1)^2/2\sigma_1^2]/\sqrt{2\pi}\sigma_1$, ξ_2-é pedig (l. 6. § 5. pl.) $f_2(x) = (1/\pi\sigma)\,(1/[1 + (x - m)^2/\sigma^2])$. $\xi_1 + \xi_2$ s. f.-ét egyrészt bonyolult konvolúciós integrállal határozhatnánk meg; másrészt azonban k. f.-ét azonnal felírhatjuk, mert $\varphi_{\xi_1}(t) = \exp[i m_1 t - \sigma_1^2 t^2/2]\,\varphi_{\xi_2}(t)$, $= \exp[i m_2 t - \sigma_2 |t|]$, s így

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \exp[i(m_1 + m_2)\,t - \sigma_1^2 t^2/2 - \sigma_2 |t|].$$

Ezt kellene visszatranszformálnunk, hogy a s. f.-t megkapjuk. Az ekkor kapott integrált elfogadhatjuk megoldásként; hasonló módon *sok s. f.-t igen egyszerűen adhatunk meg k. f.-e transzformációs integráljával előállítva. Sokszor már a k. f. alakjából is tudjuk, mi lesz az inverz transzformált* (vö.: 9. § 14. pl.).

21. A 9. § 4. pl. láttuk, hogy ha egy ξ vsz. v. k-adrendű negatív binomiális eloszlású, vagyis $\mathrm{P}(\xi = m) = \binom{k-1+m}{k-1} p^k q^m$ $(m = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots)$

$G_\xi(z) = [p/(1 - qz)]^k$. Az a kérdés, milyen feltételek mellett tart ez a POISSON-eloszlás $e^{\lambda(z-1)}$ ($\lambda > 0$ konst) típusú g. f.-éhez. Tudjuk, hogy $e^{\lambda(z-1)} = e^{-\lambda}/e^{-\lambda z} = \lim_{k\to\infty} (1 - \lambda/k)^k/(1 - \lambda z/k)^k$. E limeszt hozzuk kapcsolatba $G_\xi(z)$-vel. Legyen qk olyan $q(k)$ függvénye, hogy $k \to \infty$-nél $q(k) \to 0$, és $k\,q(k) \to a$ (konst); ez azt jelenti, hogy $k\,q(k) = a + \varepsilon_k$ (ahol $\varepsilon_k \to 0$, ha $k \to \infty$). Ekkor rögzített z-nél

$$\lim_{k\to\infty} G_\xi(z) = \lim_{k\to\infty} [1 - (a + \varepsilon_k)/k]^k / \lim_{k\to\infty} [1 - (az + \varepsilon_k z)/k]^k$$

így az említett kapcsolat megvan. A limesz pedig e^{-a}/e^{-az}, vagyis elértük a kívánt konvergenciát egy a paraméterű POISSON-eloszláshoz. A q-ra tett feltétel tehát mindenesetre elegendő a POISSON-eloszláshoz való konvergenciához; kimutatható, hogy szükséges is.

25. Vezessük be az

$$Y(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} Y_m^{(n)}\, w^n z^m$$

$$X(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} X_m^{(n)}\, w^n z^m \quad (|w|, |z| \leqq 1)$$

g. f.-eket. Ezeket így hozzuk rekurzív egyenleteinkkel kapcsolatba: Szorozzuk meg először első rekurzív egyenletünket $w^n z^m$-mel, és képezzük az egyenlet mindkét oldalán $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n}$-t ($n = 1$-től érvényes az egyenletek bal oldala!) Azt kapjuk, hogy

és

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_m^{(n)} w^n z^m = Q \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} X_m^{(n-1)} w^n z^m + (1-P)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_{(m-1)}^{(n-1)} w^n z^m.$$

De

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_m^{(n)} w^n z^m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_m^{(n)} w^n z^m - Y_0^{(0)} = Y(w,z) - (1-P).$$

A jobb oldal első tagja,

$$Q w \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} X_m^{(n-1)} w^{n-1} z^m = Q w \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} X_m^{(n)} w^n z^n,$$

$$\text{ami } X_{n}^{(n)}{}_{1} \equiv 0 \text{ folytán} = Q w \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} X_m^{(n)} w^n z^m = Q w X(w,z).$$

A jobb oldal második tagja

$$(1-P) wz \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_{m-1}^{(n-1)} w^{n-1} z^{m-1}, \text{ ami } Y_{-1}^{(n-1)} \equiv 0 \text{ folytán} =$$

$$= (1-P) wz \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} Y_{m-1}^{(n-1)} w^{n-1} z^{m-1} = (1-P) wz \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n+1} Y_m^{(n)} w^n z^m,$$

ami

$$Y_{n}^{(n)}{}_{1} \equiv 0 \quad \text{folytán} = (1-P)\ wz \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} Y_m^{(n)} w^n z^m = (1-P)\ wz\ Y(w,z).$$

Második rekurzív egyenletünkkel is hasonlóan járunk el. Végül is azt kapjuk, hogy

$$Y(w,z) = (1-P) + Q w X(w,z) + (1-P) zw Y(w,z)$$

$$X(w,z) = P + (1-Q) w X(w,z) + P zw Y(w,z).$$

Ezekből $Y(w,z)$-t és $X(w,z)$-t kifejezhetjük; mi mindjárt $X(w,z) + Y(w,z) = T(w,z)$-t adjuk, meg, amely nyilván a $T_m^{(n)}$-ek g. f.-e; ez

$$T(w,z) = (1-\varepsilon w)/\{1 - [(1-Q) + (1-P) z] w + \varepsilon z w^2\} \quad (\varepsilon = 1 - P - Q).$$

Ezt sorbafejtve, a $w^n z^m$ tag együtthatója definíciószerűen $T_m^{(n)}$-et adja. Differenciálásokkal dolgozni reménytelen; belátható azonban, hogy $T(w,z)$ mint z függvénye egyenletesen konvergens geometriai sor összege, s így a z szerinti hatványsor rögtön felírható. Az m-edik együttható ebben nyilván $\sum_{n=m}^{\infty} T_m^{(n)} w^n$; az említett geometriai sorból erre w egy függvényét kapjuk, amely (a geometriai sor m-edik deriváltja zárt alakjának képlete alapján) egyenletesen konvergens sor alakban is rögtön felírható (megint kikerültük a deriválást!); együttható-összehasonlítással végül is

$$T_m^{(n)} = (1-Q)^n \left(\frac{1-P}{1-Q}\right)^m \sum_{\varrho=0}^{n-m} \binom{m}{\varrho} \binom{n-\varrho}{m} \left(\frac{-\varepsilon}{(1-P)(1-Q)}\right)^{\varrho} -$$

$$- \varepsilon (1-Q)^{n-1} \left(\frac{1-P}{1-Q}\right)^m \sum_{\varrho=0}^{n-m-1} \binom{m}{\varrho} \binom{n-\varrho-1}{m} \left(\frac{-\varepsilon}{(1-P)(1-Q)}\right)^{\varrho}$$

Valamilyen A, B és C anyagokkal végrehajtva a frakcionáló megosztást, egyes $Y_m^{(n)}$, $X_m^{(n)}$, $T_m^{(n)}$ értékeket kimérve, azokból a rájuk vonatkozó képletek segítségével a C-re jellemző és minket érdeklő P, Q-t kiszámíthatjuk. — Ebben a példában már megmutatkozik a g. f.-ek óriási haszna: nélkülük nem tudtuk volna $T_m^{(n)}$-et kiszámítani, annyira bonyolult lett volna. Vegyük észre, hogy a g. f. alkalmazhatósága a rekurzív formulákból nyert összefüggések konstans tagján múlt, valamint azon, hogy sorfejtésük deriválások nélkül is sikerült. — $P+Q=1$-nél, mint látható, $T_m^{(n)}$ binomiális eloszlás egy tagja. Ha C több anyag keveréke, és mindegyikre $P+Q=1$, C *egyes komponenseinek* anyagmennyisége külön-külön binomiális eloszlás szerint oszlik meg az edényekben; C *teljes egészében* tehát binomiális eloszlások szuperpozíciója (keveréke) szerint oszlik meg az edényekben, s *csak ezt észlelhetjük*. Ha észlelésünkből C egyes komponenseinek jellemzőire akarunk következtetni, a binomiális eloszláskeveréket komponenseire kell bontani; ennek egy módszerét tárgyaltuk a 6. § 36. pl.-ban. — Ez a példa rávilágít a keverékfelbontás problémájának fontosságára.

10. §. *Határeloszlástételek*

3. Triviális (ζ_n-nek mint η_n függvényének az ismert tétel szerint kiszámítjuk az e. f.-ét). A centrális határeloszlástételnél ennek alapján az a helyzet, hogy a tétel feltételeinek eleget tevő ξ_k-knál $\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ elég nagy n-ek esetén már jó közelítéssel normális eloszlású vsz. v. $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(\xi_k)$ v. é.-kel és $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}^2(\xi_k)$ sz. n.-tel. A gyakorlatban mindig véges n szerepel, és a ξ_k-k korlátosak, tehát jellemzőik végesek, sőt legtöbbször kicsinyek is; amellett aránylag kis n-nél is már igen jó közelítéssel normális eloszlású a ζ_n; ζ_n tehát nagyon jól követheti a normális eloszlást, s emellett mégis végesek, sőt esetleg határozottan kicsik is a jellemzői.

5. Szolgáltasson az (ismeretlen) m_0 mennyiségre egy mérés m_0 helyett $m_0+\eta$ adatot. Az η „hibát" nagyszámú (N) közelebbről nem ismert „elemi" ok alakítja ki. Tegyük fel, hogy az egyes okok függetlenek, mind bizonyos komponenssel járulnak hozzá η-hoz, és hogy η egyszerű összegként áll elő ezekből a ξ_ν komponensekből ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Legyenek a ξ_ν-k független vsz. v.-k, hiszen működésüket közelebbről nem ismerjük, és teljesüljenek rájuk a centrális határeloszlástétel feltételei (mindig feltételezhető, hogy a ξ_ν-k a 10. § 2. pl.-beliek; ez pl. már elég is). Azt is nyugodtan feltehetjük, hogy a ξ_ν-k v. é.-ei és sz. n.-ei igen kicsik. Akkor η közel normális eloszlású vsz. v. lesz, $\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{M}(\xi_\nu)$ v. é.-kel és $\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{D}^2(\xi_\nu)$ sz. n.-tel, ezek feltevéseink után kis véges értékek lesznek. Az $m_0+\eta$-k pedig ugyancsak normális eloszlású vsz. v.-k, $m_0 + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{M}(\xi_\nu)$ v. é.-kel és $\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{D}^2(\xi_\nu)$ sz. n.-tel. Nagyon indokolt $\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{M}(\xi_\nu)$-t 0-nak tekinteni; ellenkező esetben ugyanis az elemi okok átlagban pozitív vagy negatív hibakomponenset adnának, bizonyos „tendencia" mutatkoznék a hibában, ami a véletlen jelleggel nem egyeztethető össze, mert a szisztematikus hibákkal volna egyenértékű. — Így tehát a mondott feltételek mellett a mérési eredmények közelítőleg normális eloszlást fognak mutatni; megfordítva, amidőn normális eloszlásukat tapasztaljuk, arra következtethetünk, hogy a háttérben a mondott „mechanizmus" áll.

6. Az egész láncmolekula vetülete valamilyen irányra nyilván az egyes „rudak" vetületeinek összege. Egy „rúd" vetülete azonban gömbfelületen egyenletes eloszlású végpontú vektor vetülete, s így (l. 6. § 13. pl.) egyenletes eloszlású vsz. v. A teljes vetület tehát N számú és feltevésünk szerint független vsz. v. összege. Ha N nagy (s ez a gyakorlati helyzet), a teljes vetület az itt alkalmazható centrális határeloszlástétel értelmében közelítőleg normális eloszlású lesz, amelynél a v. é. és sz. n. az egyes vetületek v. é.-einek, illetve sz. n.-einek összege. Utóbbiak értéke: Ha egy „rúd" l hosszú, a 6. § 13. pl. szerint vetületének s. f.-e $f(x) = 1/2\,l$ $(-l < x \leqq l$; egyébként $\equiv 0)$ lesz. Így tehát a vetület v. é.-e 0, sz. n.-e $l^2/3$, vagyis a teljes vetület normális e. f.-ében a v. é. 0, a sz. n. pedig $N\,l^2/3$. Ha a teljes vetület η, közelítőleg írhatjuk tehát

$$\mathbf{P}\,(\eta < y) = F(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{\sqrt{3}\; e^{-3z^2/2Nl^2}}{\sqrt{2\pi\, N}\, l}\, dz.$$

A molekula kezdő- és végpontjának távolsága e. f.-ét azonban nem számíthatjuk ki a három koordinátatengelyre való (η_1, η_2, η_3) vetületek e. f.-e segítségével, mert $\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}$ e.f.-ét csak az egyes vsz. v.-k függetlensége esetén ismerjük (l. 6. § 22. pl.), ami itt nehezen tételezhető fel; együttes e. f.-t meghatározni pedig igen nehéz és hosszadalmas.

9. Alkalmazhatjuk a 10. § 7. pl. gondolatmenetét, ha az ottani ξ_ν-nek $k_\nu\, \Delta\nu$-t, az ottani $G(\eta_N)$-nek pedig $(\eta_\nu - \eta_{\nu-1})$-t kicsinek tételezve fel,

$$G(\eta_N) \equiv \int_{y_0}^{\eta_N} \frac{dy}{y_m - y} = \log\left(\frac{y_m - y_0}{y_m - \eta_N}\right)$$

-et választjuk (η_N itt szóba jövő $(y_0 \leqq \eta_N \leqq \eta_m)$ értékkészletén $G^{-1}(x)$ eleget tesz a feltételeknek). Így tehát a 10. § 7. pl. végeredménye értelmében elég nagy N-nél η_N s. f.-e jó közelítéssel

$$\exp\left[-(1/2\,\sigma^2)\left(\log\left(\frac{y_m - y_0}{y_m - y}\right) - m\right)^2\right] \Big/ \sqrt{2\pi}\,\sigma\,(y_m - y)$$

típusú lesz, ha $y_0 \leqq y \leqq y_m$; egyébként $\equiv 0$ (m, σ valamilyen konst). Mivel η_N arányos az ingerküszöb elérését létrehozó megvilágítással, feltételeink teljesülése esetén várható, hogy nagyszámú egyénnél állapítva meg az ingerküszöb elérését létrehozó megvilágításértéket, ezek s. f.-e is közelítőleg az említett típusú lesz.

10. Megvizsgáljuk, mikor elégíti ki a 10. § 7. pl.-beli $l(y)$ a PEARSON-féle differenciálegyenletet.

$$l'(y) = [l(y)/g(y)]\left[-(1/\sigma^2)\left(\int_{y_0}^{y} \frac{dv}{g(v)} - m\right) - g'(y)\right]$$

és

$$l'(y)/l(y) = \left[-(1/\sigma^2)\left(\int_{y_0}^{y} \frac{dv}{g(v)} - m\right) - g'(y)\right] \Big/ g(y).$$

A jobb oldalnak (alkalmas paraméterekkel) $\equiv (y + \alpha)/(\beta y^2 + \gamma y + \delta)$-nak kell lennie, vagyis $g(y)$-nak ki kell elégítenie egy másodrendű, nem lineáris differenciálegyenletet. — Speciális esetekben egyszerűbb $l(y)$ kifejezésére támaszkodni.

AJÁNLOTT IRODALOM AZ A) RÉSZHEZ

MAGYAR NYELVEN

B. V. GNYEGYENKO—A. J. HINCSIN: Bevezetés a valószínűségszámításba. Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest. 1954. 141 o.

A. J. HINCSIN: A statisztikai mechanika analitikus módszerei. Akadémiai Kiadó, Budapest. 1951. 96 o.

JORDAN KÁROLY: Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból. Akadémiai Kiadó, Budapest. 1956. 610 o.

PRÉKOPA ANDRÁS: Bevezetés a valószínűségszámításba. Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest. 1956. 91 o.

RÉNYI ALFRÉD: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest. 1954. 746 o.

SZENTMÁRTONY TIBOR: Matematikai statisztika a műszaki gyakorlatban. Tudományos Könyvkiadó NV., Budapest. 1950. 115 o.

TAKÁCS LAJOS: A valószínűségszámítás néhány híradástechnikai alkalmazása. Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest. 1954. 56 o.

TAKÁCS LAJOS — L. ZIERMANN MARGIT: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest. 1955. 134 o.

IDEGEN NYELVEN

R.S. BURINGTON—D.C. MAY: Handbook of probability and statistics with tables. Handbook Publishers, Sandusky, 1953. 332 o.

H. CRAMÉR: The elements of probability theory and some of its applications. Wiley, New York, 1955. 281 o.

H. CRAMÉR: Mathematical methods of statistics. Princeton University Press, rinceton, 1951. 575 o. (Oroszra is lefordították.)

И. В. Дунин—Барковский — Н. В. Смирнов: Теория вероятностей и математическая статистика в технике (одщая часть). Гостехиздат, Москва, 1955. 556 o.

W. FELLER: An introduction to probability theory and its applications. Wiley, New York, 1950. 419 o. (Oroszra is lefordították.)

R. FORTET: Calcul des probabilités. CNRS, Paris, 1950. 330 o.

Б. В. Гнеденко: Курс теории вероятностей. Издание второе, переработанное. Гостехиздат, Москва, 1954. 411 o.

A. HALD: Statistical theory with engineering applications. Wiley, New York, 1952. 783 o. (Oroszra is lefordították.)

J. NEYMAN: First course in probability and statistics. Holt, New York, 1950. 350 o.

L. SCHMETTERER: Einführung in die mathematische Statistik. Springer, Wien, 1956. 405 o.

B) SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK

Írta: TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

A következő három fejezet a valószínűségszámítás egyik legújabb ágának, a sztochasztikus folyamatok elméletének elemeit ismerteti. A sztochasztikus folyamatok elmélete főleg időben véletlenszerűen lejátszódó természeti jelenségek matematikai leírásánál játszik fontos szerepet. Az elmélet, A. N. KOLMOGOROV 1931-ben végzett vizsgálataitól kezdve, óriási fejlődést mutat. Az elméleti alapokat időszerűen J. L. DOOB: Stochastic processes (New-York, 1952) című könyve foglalja össze. Az alkalmazásokkal több könyv és számos tudományos dolgozat foglalkozik, amelyek közül néhányat ezen könyvrész végén sorolunk fel. Jelenlegi rövid összefoglalásunk tartalmazza a sztochasztikus folyamatok elmélete, klaszszikusnak mondható, két legfontosabb fejezetének, a MARKOV-láncok elméletének és a MARKOV-folyamatok elméletének elemeit. Továbbá ismertetésre kerülnek a stacionárius sztochasztikus sorozatok és folyamatok alapelemei és a másodlagos sztochasztikus folyamatokra vonatkozó néhány újabb eredmény. Az elméleti részben a legfontosabb alapfogalmak és tételek vannak felsorolva. A bizonyításokat általában mellőzzük, csak legfeljebb a bizonyítás menetét vázoljuk. Az elméleti részt számos feladat követi, amelyek az elméleti és kísérleti fizika, a technika és az ipar köréből vannak véve. Sok feladatnál rámutatunk a speciális gyakorlati alkalmazás lehetőségeire. Kitűzünk több olyan feladatot is, amelyek ugyanazon matematikai modellel leírható, különböző gyakorlati problémák megoldására alkalmazhatók. A feladatok mind megoldhatók az ismertetett tételek felhasználásával, bár ez sokszor bonyolult okoskodást és hosszadalmas számítást igényel. A feladatok megoldását egy külön fejezet tartalmazza.

A 11. §.- és a 12. §-ban ismertetett tételek több kézikönyvben fel vannak sorolva, a 13. § legtöbb eredménye csak tudományos dolgozatokban található meg. A legtöbb kitűzött feladat újabb keletű tudományos dolgozatokban tárgyalt problémák egyszerűsített változataival egyezik meg. Ezért az ajánlott irodalomban a könyvek mellett több tudományos dolgozatot is felsorolunk, amelyekből az érdeklődő olvasó további részleteket ismerhet meg.

11. §. MARKOV-LÁNCOK

a) **A Markov-lánc definíciója**

A MARKOV-lánc fogalmához legegyszerűbben a független kísérletek fogalmának általánosításával jutunk el. Tekintsük egymás után végrehajtott kísérletek sorozatát. Legyen E_1, $E_2, \ldots, E_i, \ldots$ egy teljes eseményrendszer (egymást kizáró és kimerítő események). Vizsgáljuk az egyes kísérletek eredményét az E_i események bekövetkezése szempontjából. Definiáljuk a ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változókat úgy, hogy $\xi_n = i$, ha az n-edik kísérletnél az E_i esemény előfordul. Független kísérletek esetében érvényes, hogy

$$\mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} = \mathbf{P}\{\xi_n = j\}$$

minden n-re, és a szóban forgó valószínűségi változók valamennyi lehetséges értékére. A MARKOV-lánc fogalmára akkor jutunk, ha a fenti esetnél általánosabban feltesszük, hogy a ξ_n változó függ az előző $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ változóktól is.

Ha fennáll minden n-re és a változók összes lehetséges értékeire, hogy

(1) $$\mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} = \mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}\}$$

úgy azt mondjuk, hogy az egymást követő kísérletek, illetve a $\{\xi_n\}$ *valószínűségi változók* MARKOV-*láncot alkotnak.*

Megjegyezzük, hogy r-edrendű MARKOV-láncról beszélünk akkor, ha rögzített r-nél minden n-re és a változók összes lehetséges értékeire fennáll

$$\mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} = \mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{n-r} = i_{n-r}, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\}.$$

Így az előbbi definíciót, az elsőrendű MARKOV-lánc definíciójának tekinthetjük. A következőkben csupán elsőrendű MARKOV-láncokkal foglalkozunk, anélkül, hogy ezt külön megmondanánk.

Fizikai alkalmazásokat szem előtt tartva a MARKOV-láncokkal kapcsolatban rendszerint a következő terminológia szokásos: az E_i eseményeket a rendszer *állapotainak* nevezzük. A ξ_0 változó $\mathbf{P}\{\xi_0 = i\} = P_i(0)$ eloszlását *kezdeti eloszlásnak* és a $\mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i\}$ feltételes valószínűségeket *átmenetvalószínűségeknek* nevezzük. Ha pedig $\xi_{n-1} = i$ és $\xi_n = j$, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer az *n-edik lépésben* $E_i \to E_j$ *átmenetet* tett.

Ha egy MARKOV-láncnál ismerjük a kezdeti eloszlást és az átmenetvalószínűségeket, úgy ezek segítségével az összes ξ_n változó eloszlása egyértelműen meghatározható. Fontos feladat annak megvizsgálása, hogy a ξ_n változóknak $n \to \infty$-re létezik-e határeloszlása, és ha létezik, hogyan határozható meg.

A MARKOV-láncok fontos speciális esetét képezik a *homogén* MARKOV-*láncok*. Ezeknél a $\mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i\}$ átmenetvalószínűségek függetlenek az n-től, azaz

$$\mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i\} = p_{ij}$$

írható. Ha az átmenetvalószínűségek n-től is függnek, úgy *inhomogén* MARKOV-*láncról*

beszélünk. Jelenleg csak homogén MARKOV-láncokkal foglalkozunk. Továbbá megjegyezzük, hogy az E_i állapotok száma lehet véges, vagy megszámlálhatóan végtelen.

Megjegyzés: A MARKOV-láncok fogalmára *A. A. Markov* (1856—1922) orosz matematikus jutott Puskin „Anyegin" című művében a magán- és mássalhangzók váltakozását vizsgálva. A MARKOV-láncoknak azóta gazdag irodalma fejlődött ki *A. A. Markov, V. I. Romanovszkij, A. N. Kolmogorov, W. Doeblin, J. L. Doob, W. Feller, K. L. Chung* és mások munkája révén. Végül megemlítünk két MARKOV-láncokról szóló könyvet: *V. I. Romanovszkij* és *T. A. Szarümszakov* könyvét (lásd az irodalom jegyzéket), továbbá, *W. Feller:* An Introduction to Probability Theory and its Applications (New York 1950) című könyvét, amelynek 15. és 16. fejezete tárgyalja a MARKOV- láncokat.

b) Az átmenet- és abszolút valószínűségek

Tekintsünk egy homogén MARKOV-láncot

$$p_{ij} = \mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i\} \tag{2}$$

átmenetvalószínűségekkel. Legyen továbbá $\mathbf{P}\{\xi_n = j\} = P_j(n)$.

Nyilvánvalóan fennáll, hogy $p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + \ldots = 1$ és $p_{ij} \geqq 0$.

A p_{ij} átmenetvalószínűségek elrendezhetők a következő matrixalakban:

$$\pi = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \tag{3}$$

π az ún. *átmenetvalószínűségek matrixa.* A π matrix négyzetes, elemei nem negatívak, és a sorok összege 1. Egy ilyen matrixot *sztochasztikus matrixnak* nevezünk.

Egy MARKOV-lánc egyértelműen meg van határozva a π matrix és a $\{P_j(0)\}$ kezdeti eloszlás megadásával. A $\{P_j(n)\}$ eloszlás meghatározására vezessük be *az n lépéses átmenetvalószínűségek* fogalmát. Ezeket a következőképpen értelmezzük:

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}\{\xi_{m+n} = j \mid \xi_m = i\}. \tag{4}$$

Könnyen látható, hogy homogén MARKOV-lánc esetén ez a feltételes valószínűség nem függ m-től. Most a teljes valószínűségi tétel alapján a $P_j(n)$ *abszolút valószínűségek* a következőképpen határozhatók meg:

$$P_j(n) = \sum_i P_i(0) \cdot p_{ij}^{(n)}. \tag{5}$$

A $p_{ij}^{(n)}$ n-lépéses átmenetvalószínűségek kiszámítása visszavezethető a p_{ij} átmenetvalószínűségek ismeretére a következő rekurzív képlet alapján:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}\, p_{kj}^{(n-1)} \tag{6}$$

amely a teljes valószínűségi tétel alkalmazásával igazolható. Speciálisan $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Ha a $p_{ij}^{(n)}$ átmenetvalószínűségeket is elrendezzük matrixalakban, úgy ez a matrix π^n, azaz a π matrix n-edik hatványa lesz. Ez teljes indukcióval igazolható, a matrixok szorzási szabálya alapján, a fenti rekurzív képlet tekintetbe vételével.

c) A Markov-láncok és állapotainak osztályozása

Az mondjuk, hogy az E_k állapot *elérhető* az E_j állapotból, ha létezik olyan n, hogy $p_{jk}^{(n)} > 0$. Egy MARKOV-láncot *irreducibilisnek* nevezünk akkor, ha minden állapota elérhető minden állapotából. A nem irreducibilis MARKOV-láncok vizsgálata visszavezethető egymástól független irreducibilis MARKOV-láncok tárgyalására.

Egy MARKOV-lánc állapotainak C halmazát *zártnak* mondjuk, ha egylépéses átmenettel nem lehet kijutni ebből a halmazból, azaz $p_{jk} = 0$, ha $E_j \in C$ és $E_k \notin C$. Nyilvánvalóan ekkor tetszőleges n-re is fennáll $p_{jk}^{(n)} = 0$, ha $E_j \in C$ és $E_k \notin C$. Az irreducibilis MARKOV-láncok állapotai egyetlen zárt halmazt alkotnak. Ha csupán egy zárt C halmaz állapotait tekintjük, úgy egy rész MARKOV-láncot nyerünk, amely a többi állapottól függetlenül vizsgálható. Egy MARKOV-láncot *szétbonthatónak* mondunk, ha állapotai két vagy több zárt halmazra bomlanak.

Ha egyetlen E_k állapot képez egy zárt halmazt, akkor az E_k állapotot *abszorbeáló állapotnak* nevezzük. Ekkor $p_{kk} = 1$.

Tekintsünk egy tetszőleges, de rögzített E_j állapotot. Tegyük fel, hogy a rendszer kezdetben E_j állapotban van ($\xi_0 = j$). Jelölje $f_j^{(n)}$ annak a valószínűségét, hogy az első *visszatérés az* E_j állapotba az n-edik lépésnél következik be ($f_j^{(0)} = 1$). Az $f_j^{(n)}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$) valószínűségek sorjában meghatározhatók a

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_j^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} \tag{7}$$

rekurzív képletek alapján. Annak a valószínűsége, hogy a rendszer *egyáltalában visszatér* az E_j állapotba,

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} \tag{8}$$

Ha $f_j = 1$, azaz a visszatérés biztos, úgy a visszatérésig megtett lépésszám várható értéke, az *átlagos visszatérési idő*

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}. \tag{9}$$

A fentiek előrebocsátása után a MARKOV-lánc állapotait a következőképpen osztályozhatjuk:

Az E_j állapotot *rekurrens állapotnak* mondjuk, ha az E_j állapotba való visszatérés biztos, azaz $f_j = 1$. Az E_j állapotot *tranziens állapotnak* mondjuk, ha az E_j állapotba való visszatérés nem biztos, azaz $f_j < 1$. Az E_j rekurrens állapotot *zérus állapotnak* nevezzük, ha az átlagos visszatérési idő végtelen, azaz $f_j = 1$ és $\mu_j = \infty$.

Az E_j állapotot *periodikusnak* mondjuk, t periódussal, ha az E_j állapotba való visszatérés csupán a t, $2t$, $3t$, ... lépésnél következhetik be, és $t > 1$ a legnagyobb ilyen tulajdonsággal rendelkező szám. Ekkor $p_{jj}^{(n)} = 0$, ha n nem osztható t-vel.

Az E_j rekurrens állapotot *erősodikusnak* mondjuk, ha nem zérus állapot és nem periodikus.

1. tétel. *Egy irreducibilis* MARKOV*-lánc állapotai mind ugyanazon osztályhoz tartoznak: vagy mind tranziensek, vagy rekurrens zérus állapotok, vagy rekurrens nem zérus állapotok. Mindegyik esetben az összes állapot periódusa megegyezik.*

Megjegyzés. Egy véges sok állapotú láncnak nem lehet zérus állapota, és nem lehet az összes állapota tranziens.

d) **Nem periodikus Markov-lánc határeloszlás-tételei**

Egy MARKOV-láncot *ergodikusnak* mondunk, ha a $\{P_j(n)\}$ valószínűségeloszlások a kezdeti $\{P_j(0)\}$ eloszlástól független $\{P_j\}$ határeloszláshoz konvergálnak, azaz $\lim_{n\to\infty} P_j(n) = P_j$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$. Egy MARKOV-lánc ergodikus, ha valamennyi állapota ergodikus.

A kezdeti $\{P_j(0)\}$ eloszlást *stacionárius eloszlás*nak mondjuk abban az esetben, ha valamennyi $\{P_j(n)\}$ eloszlás megegyezik a kezdeti eloszlással.

2. **tétel.** *Tegyük fel, hogy egy irreducibilis* MARKOV*-lánc állapotai nem periodikusak, nem tranziensek és nem zérus állapotok. Ekkor a $\{P_j(0)\}$ kezdeti eloszlástól függetlenül léteznek a*

$$\lim_{n\to\infty} P_j(n) = P_j \tag{10}$$

határértékek. Továbbá $\{P_j\}$ egy valószínűségeloszlás pozitív elemekkel, azaz

$$P_j > 0 \quad \text{és} \quad \sum_j P_j = 1. \tag{11}$$

A $\{P_j\}$ valószínűségeloszlás egyértelműen meghatározható az alábbi lineáris egyenletrendszer segítségével:

$$P_j = \sum_i P_i p_{ij}. \tag{12}$$

Végül fennáll, hogy az E_j állapot átlagos visszatérési ideje, $\mu_j = 1/P_j$.

Megjegyezzük, hogy ha egy irreducibilis MARKOV-lánc állapotai nem periodikusak, de az összes állapotai tranziensek vagy zérus állapotok, úgy a kezdeti eloszlástól függetlenül fennáll $\lim_{n\to\infty} P_j(n) = 0$.

Megemlítünk néhány kritériumot egy MARKOV-lánc ergodikus voltának eldöntésére.

A. A. Markov tétele szerint véges sok állapottal bíró, nem periodikus és irreducibilis MARKOV-lánc állapotai ergodikusak, és így érvényes a 2. tétel.

Egy tetszőleges, nem periodikus és irreducibilis MARKOV-lánc ergodikus, ha a (12) alatti

$$\sum_i x_i p_{ij} = x_j$$

egyenletrendszernek létezik olyan nem zérus megoldása, amelyre

$$\sum_i |x_i| < \infty.$$

A 2. tételből következik, hogy ha a MARKOV-lánc ergodikus, úgy egyetlen stacionárius eloszlás létezik, éspedig ez a $\{P_j\}$ határeloszlással egyezik meg. Ha pedig egy irreducibilis és nem periodikus MARKOV-lánc állapotai tranziensek vagy zérus állapotok, úgy nem létezik stacionárius eloszlás.

Fizikai rendszereknél a statisztikai egyensúly-állapotot a stacionárius eloszlással írjuk le, és azt a tényt, hogy a $\{P_j(n)\}$ eloszlások konvergálnak a $\{P_j\}$ határeloszláshoz, úgy értelmezzük, mint az egyensúlyi állapothoz való közeledést.

e) A periodikus Markov-láncok

Egy irreducibilis, periodikus MARKOV-lánc összes állapotai t számú $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$ csoportra bonthatók úgy, hogy az egylépéses átmenetek G_ν-ből mindig $G_{\nu+1}$-be vezetnek ($G_t = G_0$). Ha a MARKOV-láncot csupán $n = t, 2t, 3t, \ldots$ időpontokban vizsgáljuk, úgy egy új MARKOV-láncot nyerünk, amelynél az átmenetvalószínűségek matrixa π^t, és minden egyes G_ν egy irreducibilis zárt halmazt alkot.

A 2. tétel segítségével periodikus irreducibilis láncok esetén is megállapíthatjuk a $p_{jk}^{(n)}$ átmenetvalószínűségek aszimptotikus viselkedését.

Ha a MARKOV-lánc valamennyi állapota tranziens vagy zérus állapot, úgy $\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = 0$ minden j és k-ra.

Egyébként minden egyes E_k állapot átlagos visszatérési ideje μ_k véges, és ha $E_j \in G_\nu$, úgy a G_ν állapotok fölött értelmezhető egy irreducibilis, nem periodikus MARKOV-lánc $p_{jk}^{(t)}$ átmenetvalószínűségekkel. Így tehát léteznek a következő határértékek:

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(nt)} = \begin{cases} P_k^* & \text{ha } E_k \in G_\nu \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

és

$$\mu_k = \frac{t}{P_k^*},$$

ugyanis az eredeti lánc t lépése az új láncnál egy lépésnek felel meg. Hasonlóan érvényes, hogy $p_{ik}^{(nt-1)} \to P_k^*$, ha $E_k \in G_{\nu+1}$, $p_{jk}^{(nt-2)} \to P_k^*$, ha $E_k \in G_{\nu+2}$, s. í. t.

Most a $\{P_k^t/t\}$ mennyiségek a MARKOV-lánc stacionárius eloszlását szolgáltatják, és nincs más stacionárius eloszlás.

f) Az abszorpció valószínűsége

Az eddigiekben megállapítottuk a $p_{jk}^{(n)}$ aszimptotikus viselkedését abban az esetben, midőn E_j rekurrens állapot. Láttuk azt is, hogy $p_{jk}^{(n)} \to 0$, ha E_k tranziens. Hátra van annak az esetnek megvizsgálása, midőn E_j tranziens és E_k rekurrens. Tegyük fel, hogy az E_k állapot hozzátartozik a C zárt halmazhoz. Jelölje π_j^* annak a valószínűségét, hogy a rendszer egyáltalában eléri a C zárt halmazt. Ha T jelöli a tranziens E_k állapotok halmazát, úgy a π_j^* *abszorpciós* valószínűség a következő egyenletrendszer megoldásával határozható meg:

$$\pi_j^* - \sum_T p_{j\nu}\, \pi_\nu^* = \sum_C p_{jk}, \tag{13}$$

ahol az első összeg azon ν értékekre terjesztendő ki, amelyekre $E_\nu \in T$, míg a második összeg azon k-ra, amelyekre $E_k \in C$.

Feladatok:

1. Mutassuk meg, hogy a $\{\xi_n\}$ MARKOV-láncra érvényes, hogy

$$\mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{n_1} = i_1, \xi_{n_2} = i_2, \ldots, \xi_{n_s} = i_s\} = \mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{n_s} = i_s\}$$

ha $n_1 < n_2 < \ldots < n_s < n$. [Útmutatás: (1) tekintetbevételével a feltételes valószínűség definíciója alapján végezhető el a bizonyítás.]

2. Igazolandó (6), azaz, hogy fennáll

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}\, p_{kj}^{(n-1)}.$$

[Útmutatás: Használjuk fel a teljes valószínűségi tétel következő általánosítását

$$\mathbf{P}\{A \mid C\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{B_k \mid C\}\, \mathbf{P}\{A \mid B_k\, C\},$$

ahol a B_k események teljes eseményrendszert alkotnak, és $P\{C\} > 0$. Ennek igazolása viszont egyszerűen visszavezethető a teljes valószínűségi tételre, ha mindkét oldalt $\mathbf{P}\{C\}$-vel szorozzuk.]

3. Igazolandó, hogy rekurrens E_j állapotra a

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$$

sor divergens, míg tranziens E_j állapotra konvergens. [Útmutatás: Alkalmazzuk a (7) rekurzív képletet.]

4. Legyen $F_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} z^n$ és $P_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} z^n$. Igazolandó, hogy

$$F_j(z) = \frac{P_j(z)}{1 + P_j(z)}.$$

[Útmutatás: A (7) egyenletből térjünk át generátorfüggvényekre.]

5. Tekintsünk egy MARKOV-láncot E_1 és E_2 lehetséges állapottal és $p_{11} = p_{22} = p$, $p_{12} = p_{21} = q$ átmenetvalószínűségekkel (ahol $0 < p < 1$ és $p + q = 1$) és $\mathbf{P}\{\xi_0 = 1\} = \alpha$, $\mathbf{P}\{\xi_0 = 2\} = \beta$ (ahol $\alpha + \beta = 1$) kezdeti eloszlással. Meghatározandók a $p_{ij}^{(n)}$ n-lépéses átmenetvalószínűségek, a $P_j(n)$ abszolút valószínűségek és a P_j határvalószínűségek.

6. Meghatározandó a $\mathbf{P}\{\xi_0 = i \mid \xi_n = j\}$ feltételes valószínűség. [Útmutatás: Alkalmazzuk *Bayes* tételét.]

7. Meghatározandó az 5. feladat esetén a $\mathbf{P}\{\xi_0 = 1 \mid \xi_n = 1\}$ feltételes valószínűség. [Lásd 2. §. 41. feladatot, amely $\alpha = p = \frac{1}{3}$-nak és $n = 3$-nak felel meg.]

8. Osztályozzuk a rendszer állapotait az alábbi átmenetvalószínűség-mátrixszal bíró MARKOV-láncoknál:

a)
$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

(b)
$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(c)
$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

9. Tekintsünk egy MARKOV-láncot, amelynél az átmenetvalószínűségek matrixa

$$\pi = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix},$$

ahol p, q, r pozitívak és $p + q + r = 1$. Meghatározandó π^n, és igazolandó, hogy $\lim_{n\to\infty} P_j(n) = \frac{1}{3}$ $(j = 1, 2, 3)$.

10. *N* fehér és *N* fekete golyót szétosztunk két urnában úgy, hogy mindegyik urnában *N* golyó legyen. Azt mondjuk, hogy a rendszer E_i állapotban van, ha az első urnában i fehér golyó van. Mindegyik lépésben mindkét urnából kiveszünk egy-egy golyót véletlen húzással, és a golyókat kicserélve tesszük vissza az urnákba. Meghatározandók a p_{jk} átmenetvalószínűségek és a $\{P_j\}$ határvalószínűség-eloszlás.

11. *A centrális erő hatására történő diffúzió Ehrenfest-féle modellje.* Tekintsünk egy MARKOV-láncot $E_0, E_1, \ldots, E_a$ állapotokkal és $p_{j,j+1} = 1 - \frac{j}{a}$, $p_{j,j-1} = \frac{j}{a}$ átmenetvalószínűségekkel. Meghatározandó a stacionárius $\{P_j\}$ eloszlás.

12. *Véletlen bolyongás abszorbeáló falak jelenlétében.* Tekintsünk az x tengelyen történő bolyongást, midőn $x = 0$ és $x = a$ helyeken abszorbeáló fal van. Legyenek a lehetséges állapotok $E_0, E_1, \ldots, E_a$, ahol E_i annak felel meg, hogy a bolyongó pont az $x = i$ helyen van. $1 \leqq i \leqq a - 1$ esetén a rendszer E_i állapotból vagy az E_{i-1}, vagy az E_{i+1} állapotba juthat, de ha egyszer elérte az E_0 vagy E_a állapotot, úgy többé nem változtatja meg állapotát. Most az átmenetvalószínűségek $p_{00} = p_{aa} = 1$ és $p_{j,j+1} = p$, $p_{j,j-1} = q$, ahol $p + q = 1$. Tegyük fel, hogy a kezdeti állapot E_z, azaz $P_z(0) = 1$, míg $P_j(0) = 0$, ha $j \neq z$. Meghatározandó $P_j(n)$ és

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = 0 \mid \xi_0 = z\} = \pi_z^*.$$

13. *Véletlen bolyongás visszaverő falak jelenlétében.* Tekintsünk az x tengelyen történő bolyongást, midőn az $x = \frac{1}{2}$ és $x = a + \frac{1}{2}$ helyeken visszaverő fal van. Legyenek a lehetséges állapotok $E_1, E_2, \ldots, E_a$, ahol E_i annak felel meg, hogy a bolyongó pont az $x = i$ helyen van. $2 \leqq i \leqq a - 1$ esetén a rendszer E_i állapotból vagy az E_{i-1}, vagy az E_{i+1} állapotba juthat, míg E_1 állapotból vagy E_2-be, vagy helyben marad, és hasonlóan E_a állapotból vagy E_{a-1}-be vagy helyben marad. Most az átmenetvalószínűségek legyenek $p_{11} = q$, $p_{aa} = p$ és $p_{j,j+1} = p$, $p_{j,j-1} = q$ $(p + q = 1)$. Meghatározandó a $\{P_j\}$ határeloszlás, és meghatározandók a $p_{jk}^{(n)}$ átmenetvalószínűségek.

14. *Várakozási idő probléma.* Tekintsünk egy kiszolgálót, akihez $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ időpontokban érkeznek személyek. Feltesszük, hogy a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ időkülönbségek egyforma eloszlású független, pozitív valószínűségi változók ugyanazon

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

eloszlásfüggvénnyel. Ha a kiszolgáló szabad, úgy azonnal megkezdi egy érkező sze-

mély kiszolgálását. Ha a kiszolgáló el van foglalva, úgy az érkező személynek addig kell várnia, amíg a korábban érkezettek kiszolgálása befejeződik és sor kerül reá. Tegyük fel, hogy az egymást követő kiszolgálási idők független pozitív valószínűségi változók ugyanazon $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Tekintsük az egymást követő kiszolgálások befejezése utáni időpillanatokat. Ha ekkor a várakozók száma $\xi_n = i$, úgy azt mondjuk, hogy a rendszer E_i állapotban van. Meghatározandó az E_i állapot határvalószínűsége.

[Útmutatás: A p_{jk} átmenetvalószínűségekre nyilvánvalóan felírható, hogy $\mathbf{P}\{\xi_n = k + j - 1 \mid \xi_{n-1} = k\} = \pi_j$, ha $k \geqq 1$ és $j = 0, 1, 2, \ldots$, míg $\mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = 0\} = \pi_j$ ha $j = 0, 1, 2, \ldots$, ahol

$$\pi_j = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!}\, dH(x).]$$

15. *Erlang képlete.* Egy telefonközpontba az előfizetők részéről $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ időpontokban érkeznek hívások. Feltesszük, hogy a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ időkülönbségek egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók közös $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. A központ a beszélgetéseket m összekötő vonalon továbbítja. Ha van szabad összekötő vonal, úgy létrejön kapcsolat, különben a hívás elvész. Tegyük fel, hogy az egymást követő foglaltsági idők egymástól és a $\{\tau_n\}$ időpontoktól is független valószínűségi változók ugyanazon

$$H(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

eloszlásfüggvénnyel. Jelölje ξ_n valószínűségi változó a $\tau_n - 0$ időpontban foglalt összekötő vonalak számát. Ekkor $\xi_n = 0, 1, \ldots, m$ lehet, és ennek megfelelően $E_0, E_1, \ldots, E_m$ állapotokról szólunk. Meghatározandó a $\{P_j\}$ határeloszlás. [Útmutatás: A p_{jk} átmenetvalószínűségekre fennáll, hogy

$$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{j+1-k}\, dF(x) \quad (j = 0, 1, \ldots, m-1)$$

és

$$p_{m,k} = p_{m-1,k}.]$$

16. Tekintsük a $\{\xi_n\}$ változók következőképpen értelmezett sorozatát:

$$\xi_n = \begin{cases} \xi_{n-1} - k + \eta_{n-1} & \text{ha } \xi_{n-1} \geqq k \\ \xi_{n-1} + \eta_{n-1} & \text{ha } \xi_{n-1} < k, \end{cases}$$

ahol az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változók egyforma eloszlású független valószínűségi változók

$$P\{\eta_n = k\} = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

eloszlással. Mutassuk meg, hogy a $\{\xi_n\}$ változók sorozata MARKOV-láncot alkot, és határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = j\} = P_j$ határvalószínűségeket.

17. Tekintsünk egy MARKOV-láncot $E_0, E_1, E_2, \ldots$ állapotokkal és

$$p_{jk} = e^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{j}{\nu} p^{\nu} q^{j-\nu} \frac{\lambda^{k-\nu}}{(k-\nu)!}$$

átmenetvalószínűségekkel (ahol $p + q = 1$). Kimutatandó, hogy a $\{P_j\}$ határeloszlás létezik és fennáll,

$$P_j = e^{-\lambda/q} \frac{(\lambda/q)^j}{j!}.$$

18. Egy MARKOV-lánc lehetséges állapotai legyenek $E_1, E_2, \ldots, E_{2a}$. Ha a rendszer E_i állapotban van, úgy csak az E_{i+1} és az E_{i-1} állapotba juthat, p, illetve q (ahol $p + q = 1$) valószínűséggel ($E_{2a+1} \equiv E_1$ és $E_0 \equiv E_{2a}$). Meghatározandók a $p_{ij}^{(n)}$ átmenetvalószínűségek határértékei és a MARKOV-lánc stacionárius eloszlása.

19. *Láncreakció.* Az alábbi MARKOV-lánc leírja az elektronsokszorozóban lejátszódó elektronsokszorozás folyamatát vagy az atommagreaktorokban végbemenő láncreakció folyamatát. Jelölje az n-edik generációban levő individuumok számát ξ_n valószínűségi változó ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Feltesszük, hogy az n-edik generáció elemei úgy adódnak, hogy az $n-1$-edik generáció elemei létrehozhatnak egymástól függetlenül $0, 1, 2, \ldots$ utódot, rendre $p_0, p_1, p_2, \ldots$ valószínűséggel. Ekkor $\{\xi_n\}$ homogén MARKOV-lánc. Meghatározandó π_j^*, a folyamat kihalásának valószínűsége, azaz annak a valószínűsége, hogy a sokaság elemeinek száma 0 lesz, ha kezdetben j volt.

g) Markov-láncok folytonos állapot esetén

Az eddigiekben feltettük, hogy a MARKOV-lánc állapotainak száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen, vagyis a MARKOV-láncot alkotó $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ valószínűségi változók értékkészlete megszámlálható sokaságot alkot (rendszerint az egész számok sokaságát). Most ennél általánosabban azt az esetet vizsgáljuk, midőn a MARKOV-lánc lehetséges állapotai folytonos sokaságot alkotnak. Mégpedig feltesszük, hogy a $\{\xi_n\}$ változók értékkészlete a valós számok összessége. (További általánosításként feltehetnénk, hogy a $\{\xi_n\}$ változók értékkészlete bizonyos absztrakt halmaz, ezzel az esettel azonban jelenleg nem foglalkozunk.)

Tekintsük tehát a valós értékű $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ valószínűségi változók összességét Ha a

$$\text{(14)} \quad \mathbf{P}\{\xi_n \leqq x \mid \xi_1 = y_1, \xi_2 = y_2, \ldots, \xi_{n-1} = y_{n-1}\} = \mathbf{P}\{\xi_n \leqq x \mid \xi_{n-1} = y_{n-1}\}$$

összefüggés fennáll minden n-re és a szóban forgó valószínűségi változók minden lehetséges értékére, úgy azt mondjuk, hogy a $\{\xi_n\}$ valószínűségi változók sorozata MARKOV-*láncot alkot.*

Ha egy MARKOV-láncnál ismerjük a ξ_0 változó $\mathbf{P}\{\xi_0 \leqq x\} = P_0(x)$ *kezdeti eloszlását* és a $\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x \mid \xi_{n-1} = y\}$ *átmenetvalószínűségeket*, úgy ezzel a MARKOV-lánc egyértelműen meg van határozva. Nevezetesen a ξ_n valószínűségi változó $\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x\} = P_n(x)$ eloszlásfüggvénye is egyértelműen meghatározható. *Homogén* MARKOV-*láncról beszélünk*, ha az átmenetvalószínűségek függetlenek n-től. Ekkor

$$\text{(15)} \quad \mathbf{P}\{\xi_n \leqq x \mid \xi_{n-1} = y\} = K(x, y)$$

írható.

Egy MARKOV-láncot *ergodikusnak* mondunk, ha a $\{P_n(x)\}$ valószínűségeloszlások a kezdeti $P_0(x)$ eloszlástól független $P(x)$ határeloszláshoz konvergálnak, azaz fennáll $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$ minden x-re.

A teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$P_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\, dP_{n-1}(y). \tag{16}$$

Innen következik, hogy ha a MARKOV-lánc ergodikus, akkor a $P(x)$ határeloszlás kielégíti a

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\, d\,P(y) \tag{17}$$

integrálegyenletet.

A $P_0(x)$ kezdeti eloszlást *stacionáriusnak* mondjuk abban az esetben, ha valamennyi $P_n(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik $P_0(x)$-szel.

A (17) egyenlet valamennyi olyan $P(x)$ megoldása, amely eloszlásfüggvény egyben stacionárius eloszlás is.

Feladatok:

20. Egy részecskeszámlálóval atombomlás jelenséget vizsgálunk. A számlálócső $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ időpontokban rendre $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n, \ldots$ *volt* nagyságú feszültségimpulzusokat szolgáltat a mérőberendezés bemenő ellenállásán. Feltesszük, hogy a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ időkülönbségek egyforma eloszlású független, pozitív valószínűségi változók $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel, és a χ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ változók is egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók ugyanazon $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. A bemenő ellenálláson levő feszültség időben exponenciálisan csökken RC időállandóval. $\alpha = 1/RC$. Jelölje ξ_n a bemenő ellenálláson levő feszültség értékét $t = \tau_n - 0$ időpontban. Megmutatandó, hogy a $\{\xi_n\}$ MARKOV-lánc ergodikus, és meghatározandó a ξ_n változók $P(x)$ határeloszlása abban az esetben, ha $\chi_n \equiv \mu$ (állandó) és *a)* $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$, *b)* $G(x) = 1 - e^{-\lambda(x-\tau)}$, ha $x \geqq \tau$ és $G(x) = 0$ egyébként. [Megjegyezzük, hogy a $P(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében elektronsokszorozóval és Geiger—Müller számlálóval történő részecskeszámlálás korrekcióelméletére vonatkozó képletek nyerhetők.]

21. A (0, 1) intervallumon választunk m számú egymástól független egyenletes eloszlású pontot. Jelölje a pontok nagyság szerinti koordinátáit rendre $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Mutassuk meg, hogy a $\{\xi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ változók sorozata MARKOV-láncot alkot, és határozzuk meg a $\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x \mid \xi_{n-1} = y\}$ átmenetvalószínűségeket.

22. *Várakozási idő probléma.* Egy kiszolgálóhoz $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ időpontokban érkezik egy-egy személy. A kiszolgáló érkezési sorrendben végzi a kiszolgálást, és az egymást követő kiszolgálások időtartamai legyenek rendre $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n, \ldots$ Feltesszük, hogy a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ időkülönbségek és a χ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ kiszolgálási idők is egyforma eloszlású független, pozitív valószínűségi változók közös $F(x)$, illetve $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Jelölje ξ_n valószínűségi változó a τ_n időpontban érkező személy várakozási idejét. Kérdés, a $\{\xi_n\}$ változóknak milyen feltételek mellett létezik határeloszlása, és hogyan határozható meg?

h) Stacionárius valószínűségi sorozatok

A $\{\xi_n\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ valós valószínűségi változók sorozatát (tágabb értelemben) *stacionárius* valószínűségi sorozatnak nevezzük, ha a ξ_n változók várható értéke és szórásnégyzete nem függ n-től, és a ξ_n és ξ_m változók korrelációs koefficiense csupán az $m - n$ különbségtől függ. Legyen $\mathrm{M}\{\xi_n\} = a$, $\mathrm{D}^2\{\xi_n\} = \sigma^2$ és $\mathrm{R}\{\xi_n, \xi_m\} = \dfrac{\mathrm{M}\{\xi_n \xi_m\} - a^2}{\sigma^2} = R(m - n)$. Stacionárius sorozat $R(n)$ korrelációs függvényére fennáll $R(-n) = R(n)$, és $R(n)$ mindig előállítható

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} d F(\lambda) \tag{18}$$

alakban, ahol $F(\lambda)$ egy eloszlásfüggvény. $F(\lambda)$-t a sorozat *spektrális függvényének* nevezzük. Viszont minden ilyen $R(n)$ függvény egy stacionárius sorozat korrelációs függvényének tekinthető. Ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} | R(n) | < \infty,$$

úgy $F'(\lambda) = f(\lambda)$ létezik, és $f(\lambda)$-t a sorozat *spektrális sűrűségfüggvényének* nevezzük. Az $f(\lambda)$ függvény Fourier-sora,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)\, e^{-in\lambda}. \tag{19}$$

Feladatok:

23. Az $R(n) = a^{|n|}$ függvény, ahol a valós és $| a | < 1$, lehet-e egy stacionárius sorozat korrelációs függvénye?

24. Mutassuk meg, hogy a $\xi_n = \sqrt{1 - a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{n-k}\, a^k$ sorozat korrelációs függvénye a 23. alatti $R(n)$, ha $\{\eta_n\}$ korrelálatlan valószínűségi változók stacionárius sorozata, 0 várható értékkel és 1 szórással.

25. Legyen alkalmasan választott C állandóval $f(\lambda) = \dfrac{C}{2\pi} \dfrac{| e^{i\lambda} - b |^2}{| e^{i\lambda} - a |^2} = \dfrac{C}{2\pi} \dfrac{(e^{i\lambda} - b)(e^{-i\lambda} - b)}{(e^{i\lambda} - a)(e^{-i\lambda} - a)}$, ahol a és b valósak, $| a | < 1$, $| b | < 1$. Meghatározandó $R(n)$.

26. *Lineáris extrapoláció.* Megadott m esetén meghatározandók olyan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ valós állandók, amelyekkel $L_m(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_{n-k}$ a legkisebb négyzetek elve alapján legjobban megközelíti ξ_{n+m}-et, azaz, amelyekre $\mathrm{M}\{[\xi_{n+m} - L_m(n)]^2\}$ minimális lesz. Jelölje ezt a minimumot σ_m^2. Meghatározandók az a_k együtthatók és σ_m^2 abban az esetben, ha $f(\lambda) = C \dfrac{| e^{i\lambda} - b |^2}{| e^{i\lambda} - a |^2}$, ahol a és b valós állandók, amelyekre $| a | < 1$, $| b | < 1$.

12. §. MARKOV-FOLYAMATOK

a) Bevezetés

A MARKOV-láncok tárgyalásánál valószínűségi változók $\{\xi_n\}$ sorozatának vizsgálatával foglalkoztunk. Ha egy fizikai rendszer állapotának időbeli változását vizsgáljuk, és $t = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ időpontokban a rendszer állapotát $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ változókkal jellemezzük, úgy sok esetben a $\{\xi_n\}$ változók MARKOV-láncot alkotnak, és ekkor alkalmazhatjuk a MARKOV-láncokra vonatkozó eredményeket. Sokszor azonban ez a tárgyalás nem kielégítő, és a rendszer állapotának pontos időbeli változása érdekel bennünket. Ilyenkor bevezetjük a ξ_t valószínűségi változót, amely a rendszer állapotát t időpontban jellemzi, és ezt a valós t paraméter véges vagy végtelen intervallumba eső értékeire tekintjük. A ξ_t valószínűségi változók bármely ilyen összességét *sztochasztikus folyamatnak* nevezzük. Miként a $\{\xi_n\}$ sztochasztikus sorozatok vizsgálatánál a MARKOV-láncok játszottak fontos szerepet, úgy a sztochasztikus folyamatok körében a MARKOV-típusú folyamatok bírnak kiterjedt alkalmazási területtel.

Megjegyzés: A sztochasztikus folyamatok matematikai elméletének alapjait *A. N. Kolmogorov* 1931-ben dolgozta ki. Azóta számos elméleti eredménnyel és gyakorlati alkalmazással gazdagodott a sztochasztikus folyamatok irodalma, és ma a valószínűségszámítás egyik legfontosabb diszciplinája lett. Ezen a területen kimagasló eredményeket értek el: *Sz. N. Bernstejn, A. Blanc—Lapierre, S. Bochner. K. L. Chung, H. Cramér, W. Doeblin, J. L. Doob, W. Feller, R. Fortet, M. Fréchet, B. V. Gnyegyenko, A. J. Hincsin, K. Ito, S. Kakutani, K. Karhunen, G. Kendall, P. Lévy, E. Szlucki, N. Wiener, K. Yosida* és mások.

b) A Markov-folyamatok definíciója

Tekintsük a t paraméter véges vagy végtelen intervallumba eső értékeire értelmezett valós ξ_t valószínűségi változók összességét. A $\{\xi_t\}$ sztochasztikus folyamatot MARKOV-*folyamatnak* nevezzük, ha fennáll

$$\mathbf{P}\{\xi_t \leqq x \mid \xi_{u_1} = y_1, \xi_{u_2} = y_2, \ldots, \xi_{u_n} = y_n\} = \mathbf{P}\{\xi_t \leqq x \mid \xi_{u_n} = y_n\} \tag{1}$$

valamennyi $u_1 < u_2 < \ldots < u_n < t$-re és a szóban forgó változók összes lehetséges értékeire. Ilyen módon a MARKOV-folyamatok a MARKOV-láncok közvetlen általánosításának tekinthetők.

Ha egy MARKOV-folyamatnál ismerjük a ξ_0 változó $\mathbf{P}\{\xi_0 \leqq x\} = P(0, x)$ *kezdeti eloszlását* és a következő feltételes eloszlásfüggvényeket,

$$\mathbf{P}\{\xi_t \leqq x \mid \xi_s = y\} = F(s, y; t, x) \quad \text{(ahol } s < t\text{)}, \tag{2}$$

az ún. *átmenetvalószínűségeket*, úgy ezzel a folyamat egyértelműen meg van határozva.

Speciálisan a $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq x\} = P(t, x)$ eloszlásfüggvényt

$$P(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(0, y, t, x)\, d_y\, P(0, y)$$

szolgáltatja.

A teljes valószínűség tétele szerint könnyen belátható, hogy az $F(s, y, t, x)$ átmenetvalószínűségekre fennáll az

$$F(s, y, t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u, z, t, x)\, d_z\, F(s, y, u, z) \tag{3}$$

ún. *Chapman—Kolmogorov* egyenlet, ahol $s < u < t$.

A $\{\xi_t\}$ MARKOV-folyamatot időben *homogénnek* nevezzük, ha az $F(s, y, t, x)$ átmenetvalószínűség y-on és x-en kívül csupán a $t-s$ különbségtől függ. A $\{\xi_t\}$ MARKOV-folyamatot *additívnek* (vagy független növekményűnek, vagy differenciális folyamatnak) nevezzük, ha az $F(s, y, t, x)$ átmenetvalószínűség s-en és t-n kívül csupán az $x - y$ különbségtől függ. Ekkor a $\xi_t - \xi_s$ változó eloszlása független a ξ_s és egyéb olyan ξ_u változók értékeitől, amelyekre $u \leqq s$.

A $\{\xi_t\}$ MARKOV-folyamatot *ergodikusnak* nevezzük, ha $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_t \leqq x \mid \xi_0 = y\}$ határeloszlásfüggvény létezik és független y-tól. Ekkor $\lim_{t\to\infty} P(t, x)$ is létezik és az előzővel megegyezik.

A ξ_0 változó $P(0, x)$ eloszlását *stacionárius*nak mondjuk, ha $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq x\} = P(t, x)$ valamennyi t értékre megegyezik $P(0, x)$-szel. A $\{\xi_t\}$ MARKOV-folyamatot osztályozhatjuk még aszerint is, hogy ξ_t értékkészlete diszkrét vagy ξ_t változása folytonos, vagy ξ_t változása folytonos és ugrásszerű is lehet.

c) A Poisson-folyamat

A MARKOV-folyamatok legegyszerűbb speciális esetét a POISSON-folyamat képezi. Tegyük fel, hogy a $\{\xi_t\}$ MARKOV-folyamat homogén, additív, a $\xi_t - \xi_s$ különbségek minden $s < t$ értékekre nem negatív egész számok, és ezenkívül teljesül az ún. „ritkasági feltétel":

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{P}\{\xi_{t+\Delta t} - \xi_t > 1\}}{\mathbf{P}\{\xi_{t+\Delta t} - \xi_t = 1\}} = 0. \tag{4}$$

Ha $\{\xi_t\}$ kielégíti a fenti feltételeket, úgy azt mondjuk, hogy $\{\xi_t\}$ homogén POISSON folyamatot alkot.

Ha $\xi_0 \equiv 0$, úgy a ξ_t változót úgy tekinthetjük, mint a $(0, t)$ időközben előforduló bizonyos események számát. Ekkor a ritkasági feltétel azt jelenti, hogy igen kicsiny annak a valószínűsége, hogy igen rövid idő alatt egynél több esemény fordul elő, annak a valószínűségéhezképest, hogy pontosan egy esemény fordul elő. Ha $\xi_0 \equiv 0$, úgy legyen $\mathbf{P}\{\xi_t = n\} = P_n(t)$, $t \geqq 0$-ra. Az általános esetben ekkor $\mathbf{P}\{\xi_t - \xi_s = n\} = P_n(t - s)$.

1. tétel. *Ha $\{\xi_t\}$ homogén* POISSON*-folyamat, úgy létezik olyan $\lambda \geqq 0$ állandó, hogy*

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \tag{5}$$

Bizonyítás. A $\{\xi_t\}$ folyamat additivitása következtében a $\xi_{u+t} - \xi_u$ és $\xi_{u+t+s} - \xi_{u+t}$ valószínűségi változók $0 < t$ és $0 < s$ esetén függetlenek, és így fennáll $\mathbf{P}\{\xi_{u+t+s} - \xi_u = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_{u+t} - \xi_u = 0\} \cdot \mathbf{P}\{\xi_{u+t+s} - \xi_{u+t} = 0\}$, azaz

$$P_0(t+s) = P_0(t)\, P_0(s).$$

Mivel $P_0(t)$ monoton nem növekvő függvény, tehát $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ (ahol $\lambda \geqq 0$) az egyetlen olyan függvény, amely kielégíti ezt a függvényegyenletet. Ez (5)-öt $n = 0$-ra igazolja. A teljes valószínűségi tétel szerint továbbá felírható, hogy

$$P_n(t+s) = \sum_{j=0}^{n} P_j(t)\, P_{n-j}(s).$$

Most $\lim_{s\to 0} \frac{1 - P_0(s)}{s} = \lambda$, és így a (4) feltétel szerint $\lim_{s\to 0} \frac{P_1(s)}{s} = \lambda$ és $\lim_{s\to 0} \frac{P_n(s)}{s} = 0$, (ha $n > 1$) is fennáll. Ezek alkalmazásával a fenti egyenletből $\lim_{s\to 0} \frac{P_n(t+s) - P_n(t)}{s}$ határátmenettel

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

differenciálegyenlet-rendszert nyerjük a $P_n(t)$ ismeretlenek meghatározására. Most $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ és $P_n(0) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ezek tekintetbevételével a differenciálegyenlet-rendszer segítségével sorjában meghatározható $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t), \ldots$, amely (5)-tel megegyező eredményt ad.

Ebben az esetben az $F(s, y, t, x)$ átmenetvalószínűség x-ben lépcsős függvény, éspedig

$$F(s, y, t, x) = \sum_{n=0}^{\lfloor x-y \rfloor} \frac{\lambda^n}{n!} (t-s)^n e^{-\lambda(t-s)},$$

ha y nem negatív egész szám, $y \leqq x$ és $s < t$.

Megjegyzés. Ha az előbbi esetben nem tesszük fel, hogy a folyamat homogén, úgy azt nyerjük, hogy létezik egy $\Lambda(t)$ monoton nem csökkenő folytonos függvény, amellyel

$$\mathbf{P}\{\xi_t - \xi_s = n\} = e^{-[\Lambda(t)-\Lambda(s)]} \frac{[\Lambda(t) - \Lambda(s)]^n}{n!}. \tag{6}$$

Ha speciálisan $\Lambda(t) - \Lambda(s) = \lambda(t-s)$, úgy a homogén POISSON-folyamatot nyeriük.

d) Markov-folyamat megszámlálható sok állapottal

Tegyük fel, hogy a vizsgált fizikai rendszer veges vagy megszámlálhatóan végtelen sok $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ lehetséges állapottal rendelkezik, és legyen $\xi_t = j$, ha t időpontban E_j állapotban van a rendszer. Az *átmenetvalószínűségeket* definiáljuk most a következőképpen:

$$\mathbf{P}\{\xi_t = j \mid \xi_s = i\} = P_{ij}(s, t) \quad (s < t). \tag{7}$$

Ennek segítségével a (2) alatti átmenetvalószínűségek a következőképpen fejezhetők ki:

$$F(s, y, t, x) = \sum_{j \leq x} P_{yj}\ (s, t).$$

A *Chapman—Kolmogorov*-egyenlet ebben az esetben a következő, (3)-mal egyenértékű egyszerűbb alakban is kifejezhető:

$$P_{ik}\ (s, t) = \sum_{j} P_{ij}\ (s, u)\ P_{jk}\ (u, t). \tag{8}$$

A *Kolmogorov-féle egyenletek:* Tegyük fel, hogy

1. Minden egyes E_n állapotnak megfelel egy folytonos $c_n(t) \geqq 0$ függvény úgy, hogy t-ben egyenletesen

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P_{nn}\ (t, t + \Delta t)}{\Delta t} = c_n\ (t). \tag{9}$$

Ez a feltétel a következőt jelenti: Ha t időpontban a rendszer E_n állapotban van, úgy annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben változás történik: $c_n(t)\ \Delta t + o(\Delta t)$.

2. Bármely két különböző E_j és E_k állapothoz tartozik egy $p_{jk}(t)$ átmenetvalószínűség úgy, hogy t-ben egyenletesen fennáll

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{jk}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = c_j\ (t)\ p_{jk}\ (t). \tag{10}$$

A $p_{jk}(t)$-k t-ben folytonosak, $p_{jj}(t) = 0$ és

$$\sum_{k} p_{jk}\ (t) = 1. \tag{11}$$

A $p_{jk}(t)$ annak a feltételes valószínűségét jelenti, hogy ha t időpontban a rendszer E_j állapotban van, és változás történik, akkor ezzel a rendszer E_k állapotba jut.

3. Rögzített k esetén a (10) határátmenet j-ben egyenletes.

Az 1., 2. és 3. feltételek teljesülése esetén fennáll *Kolmogorov első differenciálegyenlet-rendszere:*

$$\frac{\partial P_{ik}\ (s, t)}{\partial t} = -\ c_k\ (t)\ P_{ik}\ (s, t) + \sum_{j \neq k} P_{ij}\ (s, t)\ c_j\ (t)\ p_{jk}\ (t). \tag{12}$$

Ez $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ik}(s, t + \Delta t) - P_{ik}\ (s, t)}{\Delta t}$ határátmenet elvégzésével adódik, ha még tekintetbe vesszük, hogy $P_{ik}(s, t + \Delta t) = \sum_{i} P_{ij}\ (s, t)\ P_{jk}\ (t, t + \Delta t)$. A (12) egyenletrendszerben i és s paraméterek, amelyek csupán

$$P_{ik}\ (s, s) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = i \\ 0 & \text{ha } k \neq i \end{cases}$$

kezdeti feltételekben mutatkoznak.

Hasonlóképpen nyerjük az 1. és 2. feltételek teljesülése esetén *Kolmogorov második differenciálegyenlet-rendszerét:*

$$\frac{\partial P_{ik}(s,t)}{\partial s} = c_i(s)\,P_{ik}(s,t) - c_i(s)\sum_{j\neq i} p_{ij}(s)\,P_{jk}(s,t). \tag{13}$$

Ez az egyenletrendszer $\lim_{\Delta s\to 0} \frac{P_{ik}(s-\Delta s,t) - P_{ik}(s,t)}{\Delta s}$ határátmenet elvégzésével adódik, ha előbb $P_{ik}(s-\Delta s,t) = \sum_j P_{ij}(s-\Delta s,s)\,P_{jk}(s,t)$ előállítást alkalmazzuk. Most a kezdeti feltételek:

$$P_{ik}(t,t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = k \\ 0 & \text{ha } i \neq k. \end{cases}$$

A (12) és (13) differenciálegyenlet-rendszerek mindegyike egyértelműen meghatározza a $P_{ik}(s,t)$ átmenetvalószínűségeket, és a P_{ik} (s, t) valószínűségek kielégítik a (8) összefüggést és a kezdeti feltételeket.

Megjegyezzük, hogy $\{(P_{ik}(s,t)\}$ nem mindig szolgáltat valódi eloszlásfüggvényt, hanem megtörténhetik, hogy

$$\sum_k P_{ik}(s,t) < 1.$$

Ekkor $1 - \sum_k P_{ik}(s,t)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy (s, t) időintervallumban végtelen sok átmenet történik.

Ha a ξ_t változó eloszlását $\mathbf{P}\{\xi_t = k\} = P_k(t)$ jelöli, akkor, ha ismerjük a $\{P_k(0)\}$ kezdeti eloszlását, felírható, hogy

$$P_k(t) = \sum_i P_i(0)\,P_{ik}(0,t)$$

és $P_k(t)$ (12) szerint kielégíti a

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -c_k(t)\,P_k(t) + \sum_{j\neq k} c_j(t)\,p_{jk}(t)\,P_j(t) \tag{14}$$

differenciálegyenlet-rendszert.

Ha a $\{\xi_t\}$ MARKOV-folyamat *homogén*, akkor $c_i(t) \equiv c_i$ és $p_{jk}(t) \equiv p_{jk}$, t-től független állandók. Ekkor $P_{ik}(s,t) = P_{ik}(t-s)$ írható, és az *első differenciálegyenlet-rendszer,*

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = -c_k P_{ik}(t) + \sum_{j\neq k} c_j\,p_{jk}\,P_{ij}(t), \tag{15}$$

a *második differenciálegyenlet-rendszer* pedig

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = -c_i P_{ik}(t) + c_i \sum_{j\neq i} p_{ij}\,P_{jk}(t) \tag{16}$$

lesz.

Most, ha $\mathbf{P}\{\xi_t = k\} = P_k(t)$, úgy (14) szerint ez kielégíti a

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -c_k P_k(t) + \sum_{j \neq k} c_j p_{jk} P_j(t) \tag{17}$$

differenciálegyenlet-rendszert.

A $\{\xi_t\}$ homogén MARKOV-folyamat *ergodikus*, ha a $\lim_{t\to\infty} P_{jk}(t) = P_k$ határértékek léteznek, j-től függetlenek és $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás. Ha $\{\xi_t\}$ ergodikus, úgy $\lim_{t\to\infty} P_k(t) = P_k$ is fennáll. A $\{P_k\}$ határeloszlás a

$$c_k P_k = \sum_{j \neq k} c_j p_{jk} P_j \tag{18}$$

lineáris egynletrendszer megoldásával egyértelműen meghatározható.

Ha a $\{\xi_t\}$ homogén MARKOV-folyamatnál az állapotok száma véges, és bármely állapot bármely más állapotból elérhető, úgy $\{\xi_t\}$ ergodikus és a $\{P_k\}$ határeloszlás a (18) egyenletrendszer megoldásával egyértelműen meghatározható.

e) **Markov-folyamat folytonos állapotváltozással**

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszer állapota egy valós x paraméterrel van jellemezve, és ekkor legyen egyúttal $\xi_t = x$, ha t időpontban az állapotot x jellemzi. Tegyük fel most, hogy az $F(s, y, t, x)$ átmenetvalószínűségek x-ben abszolút folytonosak. Ekkor felírható, hogy

$$F(s, y, t, x) = \int_{-\infty}^{x} f(s, y, t, x)\, dx, \tag{19}$$

ahol

$$f(s, y, t, x) \geqq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s, y, t, x)\, dx = 1,$$

és a *Chapman—Kolmogorov*-egyenlet megfelelője

$$f(s, y, t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, y, u, z)\, f(u, z, t, x)\, dz. \tag{20}$$

Az $f(s, y, t, x)$ függvényt *átmenetvalószínűség-sűrűségfüggvénynek* nevezzük.

A $\{\xi_t\}$ sztochasztikus folyamatot *folytonosnak* nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra fennáll, hogy

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}\{|\xi_{t+\Delta t} - \xi_t| > \varepsilon\}}{\Delta t} = 0.$$

A Kolmogorov-féle egyenletek. Tegyük fel, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra léteznek az alábbi határértékek :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y| > \varepsilon} f(t, y, t + \Delta t, x)\, dy = 0, \tag{21}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y|>\varepsilon} (x-y)\, f(t, y, t+\Delta t, x)\, dy = a(t, x), \tag{22}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y|>\varepsilon} (x-y)^2\, f(t, y, t+\Delta t, x)\, dy = b(t, x) > 0. \tag{23}$$

A (21)-ből következik, hogy a $\{\xi_t\}$ folyamat folytonos. A (22) és (23) pedig csak látszólag függ ε-tól.

Továbbá tegyük fel, hogy a

$$\frac{\partial f(s, y, t, x)}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 f(s, y, t, x)}{\partial y^2} \tag{24}$$

deriváltak léteznek és y szerint folytonosak.

Most (21), (22), (23) és (24) teljesülése esetén a (20) összefüggés felhasználásával megkapjuk *Kolmogorov első differenciálegyenletét:*

$$\frac{\partial f(s, y, t, x)}{\partial s} + a(s, y) \frac{\partial f(s, y, t, x)}{\partial y} + \frac{1}{2} b(s, y) \frac{\partial^2 f(s, y, t, x)}{\partial y^2} = 0. \tag{25}$$

Hasonlóképpen nyerhetjük *Kolmogorov második differenciálegyenletét,* amely a következő:

$$\frac{\partial f(s, y, t, x)}{\partial t} + \frac{\partial a(t, x)\, f(s, y, t, x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b(t, x)\, f(s, y, t, x)}{\partial x^2} = 0. \tag{26}$$

Az $f(s, y, t, x)$ függvényt a (25) vagy a (26) differenciálegyenlet egyértelműen meghatározza, és a megoldás kielégíti az összes feltételeket.

Ha a $\{\xi_t\}$ folyamat homogén és additív, úgy $f(s, y, t, x) = g(t-s, x-y)$ írható, és $a(t, x) \equiv a$, $b(t, x) \equiv b$ állandók. Ekkor $g(t, x)$ a (25) és (26) szerint egyaránt fennálló

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} + a \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} - \frac{b}{2} \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial x^2} = 0 \tag{27}$$

parciális differenciálegyenletnek tesz eleget.

f) Markov-folyamat folytonos és ugrásszerű állapotváltozással

Tegyük fel, hogy a $\{\xi_t\}$ MARKOV-folyamatnál $\xi_t = x$ valós értékeket vehet fel, és a rendszer állapotváltozása történhetik folytonosan vagy ugrásszerűen. Ekkor az $F(s, y, t, x)$ átmenetvalószínűségekre fennáll a következő összefüggés:

$$F(t, y, t+\Delta t, x) = \\ = [1 - p(t, y)\, \Delta t]\, G(t, y, t+\Delta t, x) + p(t, y)\, \Delta t\, P(t, y, x) + o(\Delta t), \tag{28}$$

ahol $p(t, y)$ és $P(t, y, x)$ nem negatív függvények, $P(t, y, x)$ mint x függvénye eloszlásfüggvény, és $G(s, y, t, x)$ egy folytonos MARKOV-folyamat átmenetvalószínűségfüggvénye. A szóban forgó mennyiségek jelentése a következő: Ha $\xi_t = y$, úgy annak a valószínűsége, hogy a rendszer $(t, t+\Delta t)$ időközben ugrásszerű változást szenved, $p(t, y)\, \Delta t + o(\Delta t)$, és $P(t, y, x)$ annak a valószínűsége, hogy ha t időpontban

ugrásszerű változást szenved a rendszer, úgy ugrás után $\xi_{t+0} < x$ lesz. $G(s, y, t, x)$ folytonos állapotváltozásnak megfelelő átmenetvalószínűség.

Feltesszük, hogy $p(t, y)$ és $P(t, y, x)$ mint t függvényei folytonosak, és $G(s, y, t, x)$ kielégíti tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y|>\varepsilon} d_y\, G(t, y, t + \Delta t, x) = 0 \tag{29}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y|<\varepsilon} (x - y)\, d_y\, G(t, y, t + \Delta t, x) = a(t, x) \tag{30}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y|<\varepsilon} (x - y)^2\, d_y\, G(t, y, t + \Delta t, x) = b(t, x) \tag{31}$$

feltételeket. Továbbá tegyük fel, hogy

$$\frac{\partial F(s, y, t, x)}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 F(s, y, t, x)}{\partial y^2}$$

léteznek és y-ban folytonosak.

Ekkor fennáll a *Kolmogorov—Feller-féle első integro-differenciálegyenlet:*

$$\frac{\partial F(s, y, t, x)}{\partial s} + a(s, y) \frac{\partial F(s, y, t, x)}{\partial y} + \frac{1}{2} b(s, y) \frac{\partial^2 F(s, y, t, x)}{\partial y^2} - \tag{32}$$

$$- p(s, y) \left[F(s, y, t, x) - \int_{-\infty}^{\infty} F(s, z, t, x)\, d_z\, P(t, y, z)\right] = 0$$

és a *második integro-differenciálegyenlet:*

$$\frac{\partial F(s, y, t, x)}{\partial t} + \frac{\partial a(t, x)\, F(s, y, t, x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial b(t, x)\, F(s, y, t, x)}{\partial x^2} + \tag{33}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x} p(t, z)\, d_z\, F(s, y, t, z) - \int_{-\infty}^{\infty} p(t, z)\, P(t, z, x)\, d_z\, F(s, y, t, z) = 0.$$

Az $F(s, y, t, x)$ átmenetvalószínűségek a (32), illetve (33) integro-differenciálegyenlet segítségével egyértelműen meghatározhatók, és a megoldás kielégíti az összes feltételeket.

Feladatok:

1. Jelölje egy rádioaktív preparátumban $(0, t)$ időközben elbomló atomok számát ξ_t valószínűségi változó. Ha feltesszük, hogy a preparátumban levő atomok száma igen nagy és a bomlási állandó kicsiny, úgy a $\{\xi_t\}$ folyamat homogén Poisson-folyamatnak tekinthető. Ekkor $\mathrm{P}\{\xi_t = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, ahol λ pozitív állandó. Diszkutálandó λ különböző jelentése.

2. Legyen $\{\xi_t\}$ homogén POISSON-folyamat λ eseménysűrűséggel. Jelölje az események előfordulási időpontjait $\{\tau_n\}$ sorozat. Bebizonyítandó, hogy a $\tau_{n+1} - \tau_n$ időkülönbségek egyforma eloszlású független valószínűségi változók közös $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ és $F(x) = 0$, ha $x < 0$ eloszlásfüggvénnyel.

3. Legyen $\{\xi_t\}$ homogén POISSON-folyamat λ eseménysűrűséggel. Jelölje az η_t valószínűségi változó a t időpontnak a közvetlen utána következő esemény előfordulási pontjától számított távolságát. Igazolandó, hogy $\mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$.

4. Tegyük fel, hogy egy λ eseménysűrűségű $\{\xi_t\}$ POISSON-folyamat eseményeit megritkítjuk olyképpen, hogy minden egyes eseményt a többitől függetlenül p valószínűséggel tartunk meg. Ha ζ_t jelöli a $(0, t)$ időközben előforduló ritkított események számát, úgy bebizonyítandó, hogy $\{\zeta_t\}$ is POISSON-folyamat λp eseménysűrűséggel. Ez a helyzet például akkor, ha egy rádioaktív preparátumban levő atomok elbomlásának időpontjai λ eseménysűrűségű POISSON-folyamatot alkotnak, de a mérő számlálócsövön egy kilövelt részecske csak p valószínűséggel halad át. Ekkor a mérőberendezés jelzéseinek időpontjai is POISSON-folyamatot alkotnak, de λp eseménysűrűséggel.

5. *Rutherford* és tanítványai $N = 2608$ esetben $t = 7{,}5$ sec-os intervallumokban megfigyelték, hogy egy rádioaktív anyag sugárzásából hány részecske érte el a számlálót. Azt találták, hogy k részecskét N_k esetben jelzett a számláló, ahol

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\geqq 10$
N_k	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16

Kérdés, magyarázhatók-e ezek az észlelési értékek POISSON-folyamat feltevésével.

6. Bebizonyítandó, hogy ha $\{\xi_t\}$ és $\{\eta_t\}$ egymástól független λ, illetve μ eseménysűrűségű POISSON-folyamat, akkor $\{\xi_t + \eta_t\}$ is POISSON-folyamat $\lambda + \mu$ eseménysűrűséggel. Például, ha részecskeszámlálóval rádioaktív bomlás folyamatát vizsgáljuk, és λ jelenti a részecskéknek a számlálócsőhöz történő érkezési sűrűségét, és a mérést zavarja a kozmikus sugárzásnak a csövön való áthaladása, amely utóbbiról feltesszük, hogy μ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint történik, úgy a számlálócső jelzései végül is $\lambda + \mu$ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint folynak le.

7. Jelölje ξ_t egy λ eseménysűrűségű POISSON-folyamatban $(0, t)$ időközben előforduló események számát, és jelölje $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ az események előfordulási időpontjait. Bebizonyítandó, hogy $\xi_t = n$ feltétel mellett a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ időpontok együttes eloszlása megegyezik a $(0, t)$ intervallumon n számú egymástól független egyenletes eloszlású pont nagyság szerint rendezett koordinátáinak együttes eloszlásával.

8. Egy elektroncső katódjáról az elektronok λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint lépnek ki. Tegyük fel, hogy az egyes elektronok repülési idejei egymástól független valószínűségi változók közös $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. A jelenséget vizsgáljuk $t = 0$ időponttól kezdve, és jelölje η_t a t időpontban a cső terében tartózkodó elektronokat. Meghatározandó η_t eloszlása és a $t \to \infty$-re vett határértéke.

9. Jelölje ξ_t egy λ eseménysűrűségű POISSON-folyamatban $(0, t)$ időközben előforduló események számát. Meghatározandó ξ_t és $\xi_{t+\tau}$ korrelációs koefficiense.

10. Tegyük fel, hogy $\{\xi_t\}$ homogén, additív MARKOV-folyamat, és a $\xi_t - \xi_s$ különbségek $s < t$-re nem negatív egész számok. Ekkor a $\{\xi_t\}$ folyamatot *összetett* POISSON-*folyamatnak* nevezzük. Meghatározandó $\xi_t - \xi_s$ eloszlása.

11. Tekintsük egy véges dimenziós euklideszi tér $\{A\}$ mérhető részhalmazait. Legyen A mértéke $\mu(A)$. Minden egyes mérhető A részhalmazhoz rendeljünk hozzá egy $\xi(A)$ nem negatív egész értékű valószínűségi változót, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: 1. $\xi(A)$ eloszlása csupán a $\mu(A)$ mértéktől függ, 2. $\xi(A_1+A_2)= = \xi(A_1) + \xi(A_2)$, és $\xi(A_1)$ és $\xi(A_2)$ függetlenek, ha A_1 és A_2 közös pont nélküliek, 3. $\mathrm{P}\{\xi(A) > 1\}/\mathrm{P}\{\xi(A) = 1\} \to 0$, ha $\mu(A) \to 0$. Bebizonyítandó, hogy

$$\mathrm{P}\{\xi(A) = n\} = e^{-\lambda\mu(A)} \frac{[\lambda\,\mu(A)\,]^n}{n!},$$

ahol $\lambda \geqq 0$ állandó.

12. A csillagok térbeli eloszlására a 11. feladat feltevéseivel élhetünk, ha $\xi(A)$ jelenti az A tartományban levő csillagok számát. Meghatározandó egy csillagnak a szomszédos csillagtól való távolságának eloszlásfüggvénye és várható értéke.

13. Egy λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat $(0, t)$ időközben előforduló eseményeit ábrázoljuk egy t kerületű kör pontjaival. Minden egyes eseménynek megfelelő ponttól kezdve mérjünk fel egy α hosszúságú intervallumot a kör kerületén. Jelölje η_t az olyan pontok számát, amelyeket nem fed le egyetlen ilyen intervallum sem. Meghatározandó η_t eloszlása.

14. Jelölje egy λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat $0 \leqq t < \infty$ időközben előforduló eseményeinek előfordulási időpontjait $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$. Meghatározandó τ_n eloszlásfüggvénye: $G_n(t)$, sűrűségfüggvénye: $g_n(t)$ és momentumai.

15. Legyenek egy MARKOV-folyamatnál a lehetséges állapotok: $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ Legyen $\xi_t = n$, ha t időpontban E_n állapotban van a rendszer. Ha t időpontban E_n állapotban van a rendszer, úgy legyen $c_n(t)\,\Delta t + o(\Delta t) = \lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ közben állapotváltozás történik. Tegyük fel, hogy csupán $E_n \to E_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ átmenet lehetséges, és legyen $p_{n,n+1}(t) = 1$. Bebizonyítandó, hogy $\{\xi_t\}$ homogén POISSON-folyamat.

16. *Erlang formulája.* Egy telefonközpontba λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint érkeznek hívások. A központ a beszélgetéseket m számú összekötő vonalon továbbítja. Ha van szabad vonal, úgy létrejön kapcsolás, ha nincs szabad vonal, úgy a hívás elvész. Tegyük fel, hogy a különböző foglaltsági idők egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$ (ha $x \geqq 0$) eloszlásfüggvénynyel. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban E_j állapotban van, ha a foglalt vonalak száma j. Legyen ekkor $\xi_t = j$. Meghatározandók a $\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\xi_t = j\} = P_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ határvalószínűségek.

17. *Várakozásiidő-probléma.* Egy üzemben egyetlen kiszolgáló felügyeletére m számú textilgép van bízva. A gépek véletlen hibák következtében időnként leállnak. Legyen annak a valószínűsége, hogy egy működő gép t és $t + \Delta t$ időpontok között leáll, a többi gép állapotától függetlenül, $\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$. Feltesszük, hogy ha van álló gép, akkor a kezelő okvetlenül javít és az egyes javítási idők egyforma eloszlású független valószínűségi változók $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$ (ha $x \geqq 0$) eloszlásfüggvénnyel. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban E_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ állapotban van, ha az egyidejűleg működő gépek száma j. Legyen ekkor $\xi_t = j$. Mutassuk meg, hogy $\{\xi_t\}$

MARKOV-folyamat, és határozzuk meg a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_t = j\} = P_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ határvalószínűségeket.

18. Tekintsük az előző feladatot azzal a módosítással, hogy a kezelők száma s, egyébként minden maradjon változatlan. Meghatározandó a $\{P_j\}$ határeloszlás.

19. Legyen jelen $t = 0$ időpontban egy rádioaktív preparátumban N egyforma rádioaktív atom. Legyen érvényes mindenegyes atomra, hogy annak a valószínűsége, hogy egy adott időponttól számított t időtartamon belül elbomlik, ha addig még nem bomlott el, minden időpontra és minden atomra ugyanaz. Jelölje ξ_t a t időpontban jelenlevő atomok számát. Bebizonyítandó, hogy $\{\xi_t\}$ MARKOV-folyamat, és meghatározandó ξ_t eloszlása. Jelölje τ_j azt az időtartamot, amely eltelik addig, amíg az atomok száma j-re csökken. Meghatározandó τ_j várható értéke.

20. Egy számlálócső $t = 0$ időponttól kezdve λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint szolgáltat impulzusokat. A regisztrálókészülék előtt egy leosztó működik, amely minden m-edik impulzust enged tovább. Jelölje ξ_t a $(0, t)$ időközben előforduló események számát, és η_t a $(0, t)$ időközben történő regisztrálások számát. Meghatározandó $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_{t+u} - \eta_t = n\}$.

21. Egy üzemben m számú gép működik, amelyek valamilyen szolgáltatást (pl. áramfogyasztást) véletlenszerűen vesznek igénybe. Tegyük fel, hogy az egyes gépek egymástól függetlenül működnek, és ha egy gép t időpontban nem működik, úgy legyen $\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben igénybe veszi a szolgáltatást. A működés időtartamai legyenek független valószínűségi változók azonos $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$ (ha $x \geqq 0$) eloszlásfüggvénnyel. Legyen $\xi_t = j$, ha t időpontban j a működő gépek száma, vagyis E_j állapotban van a rendszer. Legyen $\xi_0 = m$. Meghatározandó $\mathbf{P}\{\xi_t = j\} = P_j(t)$ és $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_t = j\} = P_j$.

22. *Kaszkád-folyamat.* Tegyük fel, hogy $t = 0$ időpontban kozmikus sugárzásból származó nagy energiájú nukleon éri légkörünket. Ez a nukleon a légkörben levő atomokkal ütközve újabb nukleonokat hoz létre, és a keletkezett másodlagos nukleonok is hasonlóképpen sokszorozódnak. Tegyük fel, hogy minden egyes nukleonra $\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy Δt idő alatt létrehoz egy másodlagos nukleont. Jelölje ξ_t a t időpontban jelenlevő nukleonok számát. Meghatározandó ξ_t eloszlása.

23. Egy rendszer lehetséges állapotai legyenek $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$. Tegyük fel, hogy ha t időpontban E_n állapotban van, úgy annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben $E_n \to E_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ átmenet történik, $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$, és másfajta átmenetek nem lehetségesek. Legyen $t = 0$ időpontban E_0 állapotban a rendszer. Meghatározandó $P_n(t)$, és megmutatandó, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) < 1$, akkor és csakis akkor áll fenn, ha $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ konvergens.

24. *Születés-halálozás folyamat.* Azt mondjuk, hogy egy sokaság t időpontban E_n állapotban van, ha a sokaság tagjainak száma $\xi_t = n$. Tegyük fel, hogy minden egyes egyénre a többitől függetlenül $\eta\,\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben létrehoz egy utódot, és $\gamma\,\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy elpusztul, ha t időpontban élt. Legyen $\xi_0 = 1$. Meghatározandó a $\{P_n(t)\}$ eloszlás és a $\lim_{t\to\infty} P_0(t) = P_0$ kihalási valószínűség.

25. Jelölje egy $t = 0$ időpontban egyetlen nukleonnal induló kozmikus záporban t időpontban jelenlevő nukleonok számát $\xi_t = n$, amikor is E_n állapotról beszélünk. Ha t időpontban E_n állapotban van a rendszer, úgy legyen annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben $E_n \to E_{n+1}$ átmenet történik, $n\eta\,\Delta t + o(\Delta t)$, és az $E_n \to E_{n-1}$ átmenet valószínűsége legyen $n\gamma t\,\Delta t + o(\Delta t)$. Meghatározandó a $\{P_n(t)\}$ eloszlás.

26. *Pólya-processzus.* A $\{\xi_t\}$ változó lehetséges értékei legyenek $\xi_t = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, amikoris E_n állapotról szólunk. Legyen $\xi_0 = 0$, és ha t időpontban E_n állapotban van a rendszer, akkor legyen annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben $E_n \to E_{n+1}$ átmenet történik, $\eta_n(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$, ahol $\eta_n(t) = \dfrac{1 + nd}{1 + td}$, és egyéb átmenetek nem lehetségesek. Meghatározandó a $\mathbf{P}\{\xi_t = n\} = P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ eloszlás.

27. *A diffúzió folyamata.* Jelölje egydimenziós diffúzió esetén ξ_t a részecske helyzetét t időpontban. Legyen a $\{\xi_t\}$ folytonos MARKOV-folyamat homogén és additív, és legyen az átmenetvalószínűség-sűrűsége $f(s, y, t, x)$, ahol $f(s, y, t, x)$ kielégíti a (21), (22) és (23) feltételeket $a(t, x) \equiv 0$, és $b(t, x) = 1$ értékkel. Meghatározandó $f(s, y, t, x)$.

28. Tegyük fel, hogy az előző feladatban a $\{\xi_t\}$ folyamat nem homogén, de additív. Ekkor $a(t, x) = a(t)$ és $b(t, x) = b(t)$ írható. Határozzuk meg $f(s, y, t, x)$-et.

29. *Kövek sodródása folyó fenekén.* Legyen $t = 0$ időpontban egy kő a folyó fenekén $x = 0$ helyen. Legyen $\xi_t = x$, ha t időpontban x helyen van. Tegyük fel, hogy annak a valószínűsége, hogy a kő $(t, t + \Delta t)$ időközben elmozdulást szenved, $\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$, függetlenül t-től és a kő aktuális helyzetétől. Tegyük fel, hogy az egymást követő elmozdulások egyforma eloszlású független valószínűségi változók közös $U(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Meghatározandó a $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq x\}$ eloszlás.

30. Egy elektronsokszorozóval λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint érkező részecskéket számlálunk. Az elektronsokszorozó minden egyes részecskére egy feszültségimpulzust szolgáltat. A feszültségimpulzusok egymástól független, egyforma eloszlású pozitív valószínűségi változók $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Az erősítő bemenő ellenállásán levő feszültség időben exponenciálisan csökken RC időállandóval $(\alpha = 1/RC)$. Jelölje a feszültség értékét a bemenő ellenálláson t időpontban ξ_t. Legyen $\xi_0 \equiv 0$. Meghatározandó $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq x\}$ és $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_t \leqq x\}$.

31. *Várakozásiidő-probléma.* Egy kiszolgálóhoz λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint érkeznek személyek. A kiszolgáló érkezési sorrendben szolgálja ki a sorbanállókat. Az egymást követő kiszolgálási idők egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók közös $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Jelölje ξ_t egy esetleg t időpontban érkező személy várakozási idejét. Legyen $\xi_0 \equiv 0$, és meghatározandó a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_t \leqq x\}$ határeloszlás.

32. Atommagreaktorok neutron lassításának kérdése. Tekintsünk egy $t = 0$ időpontban E_0 kezdeti energiával rendelkező neutront, amely r különböző típusú atomból álló (végtelen kiterjedésű) homogén közegben mozog. A neutron a közeg atommagjaival történő ütközésekkel állandóan veszít energiát. Jelölje a neutron energiáját t időpontban E_t, és legyen a neutron letargiája $\xi_t = \log E_0/E_t$. Tegyük fel, hogy ha $\xi_t = x$, úgy annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben a neutron az

i-edik típusú atommagon ütközést szenved, $\lambda_i e^{-x/2}\Delta t + o(\Delta t)$, és ütközés alkalmával a letargianövekedés eloszlásfüggvénye

$$H_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - \alpha_i} & \text{ha } 0 \leqq x \leqq \log 1/\alpha_i \\ 1 & \text{ha } x > \log 1/\alpha_i, \end{cases}$$

ahol $\alpha_i = \left(\dfrac{A_i - 1}{A_i + 1}\right)^2$ és A_i az i-edik típusú atommag tömegszáma. Az ilyen típusú ütközés az ún. izotróp ütközés. Meghatározandó ξ_t eloszlásfüggvénye és az $\mathrm{M}\{E_t\}$ várható érték.

33. Egy gépalkatrész élettartamának eloszlásfüggvénye legyen $H(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (ha $t \geqq 0$). Tegyük fel, hogy az alkatrész igénybevétele nem folyamatosan, hanem szakaszosan történik. Ha t időpontban az alkatrész nem működik, úgy legyen $\eta\,\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben működésbe lép, és ha t időpontban működik, úgy legyen $\gamma\,\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben megszűnik a működése. Meghatározandó az alkatrész látszólagos élettartamának eloszlásfüggvénye, $F(t)$, várható értéke, m és szórásnégyzete, σ^2.

13. §. NEM MARKOV-TÍPUSÚ FOLYAMATOK

A nem MARKOV-típusú $\{\xi_t\}$ sztochasztikus folyamatok tárgyalására nézve általában nem rendelkezünk olyan általános tételekkel, mint amilyeneket a MARKOV-folyamatokra megismertünk. A nem MARKOV-típusú folyamatok közül legtöbb ismerettel a stacionárius folyamatokra és az úgynevezett rekurrens (vagy regeneratív, vagy beágyazott MARKOV-féle) folyamatokra rendelkezünk. Ezen utóbbi folyamatoknál meg tudunk adni olyan időpontokat (ún. MARKOV-pontokat vagy regenerációs pontokat), amelyektől számítva a folyamat jövő sztochasztikus viselkedését nem befolyásolja a folyamat múltja. Sokszor nem MARKOV-típusú sztochasztikus folyamatokat sikerrel lehet MARKOV-félékre való visszavezetés útján tárgyalni.

a) **A sztochasztikus folyamatokról általában**

A valós ξ_t valószínűségi változók végtelen $\{\xi_t, t \in T\}$ összességét sztochasztikus folyamatnak nevezzük. Ha a T halmaz megszámlálható, úgy *diszkrét paraméterű processzusról* vagy *sztochasztikus sorozatról* szólunk. Ha T véges vagy végtelen intervallum, úgy *folytonos paraméterű processzusról* vagy *sztochasztikus folyamatról* beszélünk.

Kolmogorov bebizonyította, hogy ha a $\{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n}\}$ valószínűségi változók együttes eloszlását minden n-re és valamennyi T-hez tartozó $t_1, t_2, \ldots, t_n$ értékre ismerjük, úgy ezáltal a $\{\xi_t\}$ sztochasztikus folyamat egyértelműen meg van határozva.

A $\{\xi_t\}$ sztochasztikus folyamatot (szűkebb értelemben) *stacionárius folyamatnak* nevezzük, ha a $\{\xi_{t_1+\tau}, \xi_{t_2+\tau}, \ldots, \xi_{t_n+\tau}\}$ változók együttes eloszlása minden olyan τ értékre megegyezik a $\{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n}\}$ változók együttes eloszlásával, amelyre a $t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots, t_n+\tau$ értékek szintén hozzá tartoznak T-hez. A $\{\xi_t\}$ sztochasztikus folyamatot *tágabb értelemben stacionárius folyamatnak* nevezzük, ha $\mathbf{M}\{\xi_t\}$ és $\mathbf{M}\{\xi_t^2\}$ léteznek és nem függnek t-től, továbbá $\mathbf{M}\{\xi_t\, \xi_{t+\tau}\}$ csupán τ-tól függ, ahol $t \in T$ és $t + \tau \in T$.

A $\{\xi_t\}$ sztochasztikus folyamatot *homogénnek* nevezzük, ha minden n-re a $\xi_{t_k} - \xi_{u_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ változók együttes eloszlása változatlan marad az idő eltolásával szemben.

b) **Rekurrens folyamatok**

A homogén POISSON-*folyamat* közvetlen általánosításával jutunk el a legegyszerűbb típusú nem MARKOV-folyamathoz, az ún. rekurrens folyamathoz. Mint láttuk, a homogén POISSON-folyamatnál, ha $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ jelöli a $0 \leqq t < \infty$ időközben előforduló események időpontjait, akkor érvényes, hogy a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; \tau_0 = 0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók ugyanazon $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (ha $x \geqq 0$) eloszlásfüggvénnyel. Ha most ennél általánosabban feltesszük, hogy a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; \tau_0 = 0)$ időkülönbségek egytorma

eloszlású, független pozitív valószínűségi változók tetszőleges $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, és ξ_t jelöli a $(0, t]$ időközben előforduló események számát, akkor azt mondjuk, hogy (ξ_t) *rekurrens folyamatot* alkot. Megjegyezzük, hogy általában megengedhető, hogy a τ_1 változó eloszlása eltérő legyen $F(x)$-től. Abban az esetben, ha $F(x)$ átlaga

$$\mu = \int_0^\infty x\, dF(x) \text{ véges, és } \tau_1 \text{ eloszlásfüggvénye, } F^*(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F(y)]\, dy, \text{ úgy}$$

a (ξ_t) folyamatos *stacionáriusnak* mondjuk.

A ξ_t változó eloszlása. Legyen $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq n\} = W(t, n)$. Mivel $\xi_t \leqq n$ akkor teljesül, ha $t < \tau_{n+1}$, ezért felírható, hogy

$$W(t, n) = \mathbf{P}\{t < \tau_{n+1}\} = 1 - \mathbf{P}\{\tau_{n+1} \leqq t\} = 1 - F_{n+1}(t), \tag{1}$$

ahol $F_n(t)$ jelöli az $F(t)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolúcióját ($F_0(t) = 1$, ha $t \geqq 0$, és $F_0(t) = 0$, ha $t < 0$). Ugyanis $\tau_{n+1} = (\tau_1 - \tau_0) + (\tau_2 - \tau_1) + \ldots + (\tau_{n+1} - \tau_n)$ előállítása szerint látszik, hogy τ_{n+1} egyenlő $n + 1$ számú független valószínűségi változó összegével, amelyek mindegyikének eloszlásfüggvénye $F(x)$.

A ξ_t várható értéke és momentumai. Jelölje $m(t)$ a $(0, t]$ időközben előforduló események várható számát, azaz $m(t) = \mathbf{M}\{\xi_t\}$. Erre fennáll

$$m(t) \sum_{n=0}^\infty = [1 - W\ (t, n)] = \sum_{n=0}^\infty F_{n+1}(t). \tag{2}$$

Ugyanis $m(t) = \sum_{n=0}^\infty n\, \mathbf{P}\{\xi_t = n\} = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}\{\xi_t > n\}$. Legyen ξ_t r-edik momentuma $m_r(t) = \mathbf{M}\{\xi_t^r\}$. Erre fennáll

$$m_r(t) = \sum_{n=0}^\infty n^r\, [W(t, n) - W(t, n-1)] = \sum_{n=0}^\infty [(n+1)^r - n^r]\, F_{n+1}(t), \tag{3}$$

ahol a jobb oldal Abel-féle sorátrendezéssel nyerhető. A fenti sorok konvergensek, ha $F(0) < 1$. Ez esetünkben teljesül, feltettük ugyanis, hogy $F(0) = 0$.

Most ξ_t várható értéke $m(t) = m_1(t)$, és szórásnégyzete $d^2(t) = \mathbf{D}^2\{\xi_t\} = m_2(t) - [m_1(t)]^2$.

Az (1), (2) és (3) függvények könnyen meghatározhatók Laplace-transzformáció segítségével. Legyen ugyanis

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x), \qquad (\Re(s) \geqq 0),$$

úgy $\Re(s) > 0$-ra fennáll

$$\int_0^\infty e^{-st}\, W(t, n)\, dt = \frac{1 - [\varphi(s)]^{n+1}}{s} \tag{4}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)} \tag{5}$$

és

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dm_r(t) = \sum_{j=1}^{r} S_r^j \frac{j!\,[\varphi(s)]^j}{[1-\varphi(s)]^j}, \tag{6}$$

ahol S_r^j a másodfajú Stirling-számokat jelöli. A fenti Laplace-transzformáltak megfordításával a kérdéses függvények egyértelműen meghatározhatók.

Legyen

$$\mu = \int_0^\infty x\, dF(x) \tag{7}$$

és

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x-\mu)^2\, dF(x). \tag{8}$$

Elemi úton igazolhatók a következő aszimptotikus képletek *(S. Täcklind)*:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \tag{9}$$

és ha $\sigma^2 < \infty$, úgy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d^2(t)}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}. \tag{10}$$

Ha feltesszük, hogy $F(x)$ nem rácsos eloszlásfüggvény (azaz nincs olyan $d > 0$ szám, amelyre $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau_1 = j\,d\} = 1$) és $\mu < \infty$, akkor tetszőleges $h > 0$-ra fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} = \frac{1}{\mu} \tag{11}$$

(*D. Blackwell* és *J. L. Doob*). Ha $F(x)$ rácsos eloszlás $d > 0$ lépéssel, akkor fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(nd+d) - m(nd)}{d} = \frac{1}{\mu}. \tag{12}$$

Megjegyezzük, hogy $F(x)$-re vonatkozó bizonyos megszorító feltevések (abszolút folytonosság stb.) mellett az is érvényes, hogy

$$\lim_{t\to\infty} m'(t) = \frac{1}{\mu} \tag{13}$$

(W. Feller, D. R. Cox és *W. L. Smith)*.

Az η_t eloszlása. Jelölje az η_t valószínűségi változó a t időpontnak a közvetlen utána következő eseménytől vett távolságát. Ennek eloszlására fennáll

$$\mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = \int_t^{t+x} [1 - F(t+x-u)]\, dm(u). \tag{14}$$

Ez a következőképpen indokolható: $\eta_t \leqq x$ akkor teljesül, ha $(t, t+x]$ intervallumban legalább egy esemény előfordul. Ez pedig több egymást kizáró módon jöhet létre: $(t, t+x]$ időintervallumban az utolsó előforduló esemény lehet a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ Így tehát

$$\mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{t < \tau_n \leqq t+x < \tau_{n+1}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{t+x} [1 - F(t+x-u)]\, dF_n(u),$$

amely (2)-re való tekintettel megegyezik (14) fenti alakjával.

Ha $F(x)$ nem rácsos eloszlás, és $\mu < \infty$, akkor létezik $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = F^*(x)$ határeloszlás, és

$$F^*(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)]\, dy. \tag{15}$$

Ez a következőképpen igazolható: Legyen (14)-ben rögzített x mellett $g_t(u) = m(t+x) - m(t+x-u)$. Ekkor

$$\mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = \int_0^x [1 - F(u)]\, dg_t(u).$$

Mivel $\lim_{t\to\infty} g_t(u) = \frac{u}{\mu}$, az $F(u)$ monotonitásának felhasználásával könnyen igazolható, hogy $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = F^*(x)$.

A (14) és (15) eloszlás is könnyen meghatározható Laplace-transzformáció segítségével, mégpedig fennáll

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\, d_x \mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = [1 - \varphi(s)]\, e^{st} \int_t^{\infty} e^{-su}\, dm(u) \tag{16}$$

és

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\, dF^*(x) = \frac{1 - \varphi(s)}{\mu s}. \tag{17}$$

Stacionárius folyamat. Ha a fentiektől eltérően feltesszük, hogy τ_1 eloszlása a többi $(\tau_{n+1} - \tau_n)$ különbség eloszlásától különbözik, éspedig $\mathbf{P}\{\tau_1 \leqq x\} = F^*(x)$, akkor stacionárius folyamatot nyerünk. Jelölje ennél a folyamatnál ξ_t^* a $(0, t]$ időközben előforduló események számát.

Ha $F(x)$ nem rácsos eloszlás, és $\mu < \infty$, akkor a $\{\xi_t\}$ folyamat nagy t értékekre $(t \to \infty)$ úgy viselkedik, mint a $\{\xi_t^*\}$ folyamat.

Legyen $\mathbf{P}\{\xi_t^* \leqq n\} = W^*(t, n)$, erre fennáll

$$W^*(t, n) = 1 - F^*(t) * F_n(t). \tag{18}$$

Ugyanis $W^*(t, n) = 1 - \mathbf{P}\{\tau_{n+1} \leqq t\}$ és $\tau_{n+1} = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + \ldots + (\tau_{n+1} - \tau_n)$ előállítás szerint τ_{n+1} egyenlő $n+1$ számú független valószínűsége változó összegével,

amelyek közül n számú eloszlásfüggvénye $F(x)$, míg egyé $F^*(x)$, $W^*(t, n)$ Laplace-transzformáltja

$$\int_0^\infty e^{-st}\, W^*(t, n)\, dt = \frac{1}{s} - \frac{[1 - \varphi(s)]\ [\varphi(s)]^n}{\mu s^2}. \tag{19}$$

Legyen a ξ_t^* változó r-edik momentuma $\mathrm{M}\{\xi_t^{*r}\} = m_r(t)$. Erre fennáll

$$m_r^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r]\ [1 - W^*(t, n)] \tag{20}$$

és ennek Laplace—Stieltjes-transzformáltja

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dm_r^*(t) = \frac{1}{\mu s} \sum_{j=1}^{r} S_r^j\, \frac{j!\ [\varphi(s)]^{j-1}}{[1 - \varphi(s)]^{j-1}}. \tag{21}$$

Speciálisan az $m^*(t) = m_1^*(t)$ várható értékre fennáll, hogy

$$m^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W^*(t, n)] = \frac{t}{\mu}. \tag{22}$$

Megjegyzés: A stacionárius $\{\xi_t^*\}$ folyamatnál az *eseménysűrűségen* az $f = \frac{1}{\mu}$ mennyiséget értjük. Az $\{\xi_t\}$ folyamatnál az eseménysűrűségnek többféle értelmezést adhatunk: $f = \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t}$ mindig létezik, $f = \lim_{t\to\infty} \frac{m(t+h) - m(t)}{h}$ létezik, ha $F(x)$ nem rácsos eloszlás és $\mu < \infty$, $f = \lim_{t\to\infty} m'(t)$ létezik, ha $F(x)$ abszolút folytonos és egyéb feltételek is teljesülnek.

Az eddigiekben megállapítottuk a ξ_t és ξ_t^* valószínűségi változók eloszlását és momentumait $F(x)$ ismeretében. Számos gyakorlati feladatnál előfordul azonban, hogy $F(x)$-et nem ismerjük, vagy igen körülményes meghatározni, de könnyen meg tudjuk határozni az $m(t)$ *átlagfüggvényt*, a $(0, t]$ időközben előforduló események várható számát. $m(t)$ ismeretében $F(x)$ egyszerűen meghatározható, és akkor a fenti tárgyalás alkalmazható a kérdéses eloszlások és momentumok meghatározására. Legyen

$$\mu(s) = \int_0^\infty e^{-st} dm(t), \qquad [\Re(s) > 0], \tag{23}$$

az $m(t)$ Laplace—Stieltjes-transzformáltja, akkor (5) szerint felírható, hogy

$$\mu(s) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}, \tag{24}$$

ahonnan

$$\varphi(s) = \frac{\mu(s)}{1 + \mu(s)} \,, \tag{25}$$

és ennek megfordításával $F(x)$ egyértelműen meghatározható.

Speciálisan $W(t, n)$ (4) alatti Laplace-transzformáltja

$$\int_0^\infty e^{-st}\, W(t, n)\, dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\left[\frac{\mu(s)}{1 + \mu(s)}\right]^n$$

lesz, és $W^*(t, n)$ (19) alatti Laplace-transzformáltja pedig

$$\int_0^\infty e^{-st}\, W^*(t, n)\, dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{\mu s^2} \frac{[\mu(s)]^n}{[1 + \mu(s)]^{n+1}} \,.$$

c) Stacionárius sztochasztikus folyamatok

A következőkben csupán tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamatokkal fogunk foglalkozni, vagyis valós valószínűségi változóknak olyan $\{\xi_t\}$ sokaságával $(-\infty < t < \infty)$, amelyekre $\mathrm{M}\{\xi_t\}$ és $\mathrm{M}\{\xi^2\}$ léteznek, és t-től független állandók és a ξ_s és ξ_t változók $\mathrm{R}\{\xi_s, \xi_t\}$ korrelációs koefficiense csupán a $|t-s|$ különbségtől függ. Legyen $\mathrm{R}\{\xi_s, \xi_t\} = R(t - s)$. Az $R(t)$ páros függvényt a folyamat *korrelációs függvényének* nevezzük.

Ha $R(+0) = 1$, úgy a $\{\xi_t\}$ stacionárius folyamat folytonos, és az $R(t)$ korrelációs függvény mindenütt folytonos.

Ha $\{\xi_t\}$ és $\{\eta_t\}$ független stacionárius sztochasztikus folyamatok, úgy $\{\xi_t + \eta_t\}$ is stacionárius sztochasztikus folyamat.

Hincsin tétele. Arra nézve, hogy az $R(t)$ függvény egy folytonos stacionárius sztochasztikus folyamat korrelációs függvénye legyen, szükséges és elegendő, hogy

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos t\, x\, dF(x) \tag{26}$$

alakban legyen előállítható, ahol $F(x)$ egy bizonyos eloszlásfüggvényt jelent. Az $F(x)$ oszlásfüggvényt a folyamat *spektrális függvényének* nevezzük.

Sztochasztikus integrálok. Tekintsük az $a \leqq t \leqq b$ intervallumon értelmezett $f(t)$ valós vagy komplex függvényt és a $\{\xi(t)\}$ valós vagy komplex sztochasztikus folyamatot. Az

$$I = \int_a^b f(t)\, \xi(t)\, dt$$

sztochasztikus integrálon az $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ felosztáshoz tartozó

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \xi(t_i)\, (t_i - t_{i-1})$$

valószínűségi változók valamilyen értelemben vett határértékét értjük, midőn $\max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Az

$$I^* = \int_a^b f(t)\, d\xi(t)$$

sztochasztikus Stieltjes-integrálon az $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ felosztáshoz tartozó

$$I_n^* = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,[\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})]$$

valószínűségi változók valamilyen értelemben vett határértékét értjük, midőn $\max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$.

A következőkben a konvergenciát olyan értelemben tekintjük, hogy $n \to \infty$ esetén,

$$\mathrm{M}\{(I_n - I)^2\} \to 0, \text{ illetve } \mathrm{M}\{(I_n^* - I^*)^2\} \to 0$$

teljesül.

Ha $\{\xi(t)\}$ stacionárius sztochasztikus folyamat, amelyre $\mathrm{M}\{\xi(t)\} = 0$, $\mathrm{M}\{(\xi(t))^2\} = 1$, és a korrelációs függvénye $R(t)$, akkor fennáll

$$\mathrm{M}\{\int_a^b f(t)\,\xi(t)\,dt\} = 0 \tag{27}$$

és

$$\mathrm{M}\{[\int_a^b f(t)\,\xi(t)\,dt]^2\} = \int_a^b \int_a^b R(t-s)\,f(t)\,f(s)\,ds\,dt. \tag{28}$$

Kolmogorov és Cramér tétele. A $\{\xi(t)\}$ stacionárius sztochasztikus folyamatra legyen $\mathrm{M}\{\xi(t)\} = 0$ és $\mathrm{M}\{(\xi(t))^2\} = 1$, ekkor $\{\xi(t)\}$ előállítható a következő sztochasztikus Stieltjes-integrál alakjában:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\zeta(\lambda), \tag{29}$$

ahol a $\{\zeta(\lambda)\}$ additív sztochasztikus folyamat, amelyre $\mathrm{M}\{\zeta(\lambda)\} = 0$ minden λ-ra és

$$\mathrm{M}\{(\zeta(\lambda_1 + \Delta\lambda_1) - \zeta(\lambda_1))\,\overline{[\zeta(\lambda_2 + \Delta\lambda_2) - \zeta(\lambda_2)]}\} = 0$$

ha $(\lambda_1, \lambda_1 + \Delta\lambda_1)$ és $(\lambda_2, \lambda_2 + \Delta\lambda_2)$ közös pont nélküli intervallumok. A felülvonás a fenti képletben a konjugált komplex képzését jelenti.

A (29) előállítást a $\{\xi(t)\}$ folyamat *spektrális felbontásának* nevezzük. A $\{\xi(t)\}$ folyamat $F(x)$ spektrális függvényére most fennáll, hogy

$$F(\lambda + \Delta\lambda) - F(\lambda) = \mathrm{M}\{[\zeta(\lambda + \Delta\lambda) - \zeta(\lambda)]^2\}. \tag{30}$$

A $\{\zeta(\lambda)\}$ folyamatot a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\zeta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{i\lambda t}}{it}\, \xi(t)\, dt.$$

Stacionárius sztochasztikus folyamatok lineáris extrapolációja. Tegyük fel, hogy a $\{\xi(u)\}$ stacionárius sztochasztikus folyamat empirikus értékeit ismerjük az $u \leqq t$ időpontokra, és ezek alapján meg akarjuk becsülni $\xi(t+\tau)$ értékét, ahol $0 < \tau$. Feltesszük, hogy a becslés jóságát a négyzetes eltéréssel mérjük, és a becsült $\xi(t+\tau)$ érték lineárisan függ a $\xi(u)$, $u \leqq t$ értékektől, azaz

$$\xi(t+\tau) \sim L_\tau(t)$$

becslést fogjuk alkalmazni, ahol az $L_\tau(t)$ valószínűségi változót úgy akarjuk meghatározni, hogy

$$\mathrm{M}\{[\xi(t+\tau) - L_\tau(t)]^2\} \tag{31}$$

minimum legyen. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\mathrm{M}\{\xi(t)\} = 0$ és $\mathrm{M}\{(\xi(t))^2\} = 1$, ami lineáris transzformációval mindig elérhető. Mégpedig $\{\xi(t)\}$ helyett a $\{[\xi(t) - \mathrm{M}\{\xi(t)\}]/\mathrm{D}\{\xi\}\}$ folyamatot kell tekinteni. Ha

$$L_\tau(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi(t - s_k),$$

úgy legyen

$$\Phi_\tau(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-is_k\lambda}. \tag{32}$$

Ennek segítségével felírható, hogy

$$L_\tau(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Phi_\tau(\lambda)\, d\zeta(\lambda). \tag{33}$$

A $\Phi_\tau(\lambda)$ függvényt a $\{\xi(t)\}$ folyamat extrapolációjára vonatkozó *spektrális karakterisztikus függvénynek* nevezzük. A $\xi(t+\tau)$-t legjobban megközelítő valószínűségi változót egyértelműen meghatározza $\Phi_\tau(\lambda)$. A $\Phi_\tau(\lambda)$ meghatározására a következő feltételt nyerjük:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\, [e^{i\tau\lambda} - \Phi_\tau(\lambda)]\, dF(\lambda) = 0 \qquad \text{ha } s \geqq 0. \tag{34}$$

A (31) alatti négyzetes eltérés várható értékének minimuma most

$$\sigma_\tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - |\Phi_\tau(\lambda)|^2]\, dF(\lambda) \tag{35}$$

lesz.

Abban az esetben, ha feltesszük, hogy $F'(\lambda) = f(\lambda)$ létezik, korlátos és $f(\lambda)$ a λ-nak racionális függvénye, úgy $\Phi_\tau(\lambda)$ egyszerűen meghatározható komplex függvénytani úton. A (34) feltétel akkor teljesül, ha

1. Az $[e^{i\tau\lambda} - \Phi_\tau(\lambda)]\, f(\lambda)$ függvény λ-nak analitikus függvénye a felső félsíkon, és $|\lambda| \to \infty$ esetén $1/|\lambda|^{1+\varepsilon}$-nál gyorsabban tűnik el ($\varepsilon > 0$).

2. A $\Phi_\tau(\lambda)$ függvény λ-nak analitikus függvénye az alsó félsíkon, és $|\lambda| \to \infty$ esetén nem nő gyorsabban, mint $|\lambda|$ valamely hatványa.

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty.$$

d) **Sztochasztikus folyamatok által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatok**

Tekintsünk egy $\{\xi_t\}$ POISSON- vagy rekurrens sztochasztikus folyamatot, ahol ξ_t jelöli a $(0, t]$ időközben előforduló események számát. Tegyük fel, hogy minden egyes esemény bekövetkezésének időpontjában elindít egy véletlen jelet. Tegyük fel, hogy egy jel nagyságának időbeli változását $f(u, x)$ függvény írja le, ahol u jelenti a jel kezdőpontjától számított időtartamot, és az x egy paraméter, amelyet véletlenszerűen választunk. Feltesszük továbbá, hogy az egyes jelek lineárisan szuperponálódnak, és jelölje η_t változó az egyes jelek értékeinek összegét t időpontban. Az $\{\eta_t\}$ folyamatot nevezzük másodlagos sztochasztikus folyamatnak. A fentiek szerint η_t a következőképpen írható:

$$\eta_t = \sum_{0 \leqq \tau_k \leqq t} f(t - \tau_k, \chi_k), \tag{36}$$

ahol $\{\tau_k\}$ jelenti a $(0, t]$ időközben bekövetkező események előfordulási időpontjait és $\{\chi_k\}$ a véletlen paraméterek értékeit. A következőkben feltesszük, hogy a $\{\chi_k\}$ paraméterek egyforma eloszlású független valószínűségi változók ugyanazon $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

Az $\{\eta_t\}$ folyamatot előállíthatjuk a következő sztochasztikus integrál alakjában is:

$$\eta_t = \int_0^t f(t - u, \chi_u)\, d\xi_u,$$

ahol a $\{\chi_u\}$ változók egymástól függetlenek és $H(x)$ eloszlásúak.

Legyen $\mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = F(t, x)$. Ha a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = F(x)$ határeloszlás létezik, és $\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\{\eta_t\} = M$ és $\lim_{t\to\infty} \mathbf{D}^2\{\eta_t\} = D^2$ végesek, úgy definiálhatjuk az $\{\eta_t^*\}$ *stacionárius folyamatot*, mint $\eta_t^* = \lim_{u\to\infty} \eta_{u+t}$, ahol a limesz valószínűségi értelemben (sztochasztikus konvergencia) veendő. Az $\{\eta_t^*\}$ folyamatra fennáll, hogy $\mathbf{P}\{\eta_t^* \leqq x\} = F(x)$, $\mathbf{M}\{\eta_t^*\} = M$, $\mathbf{D}^2\{\eta_t^*\} = D^2$ és $\mathbf{R}\{\eta_t^*, \eta_{t+\tau}^*\} = R(\tau)$ korrelációs koefficiens létezik és csupán τ-tól függ.

Feladatok:

1. Határozzuk meg közvetlenül a (2) alatti $m(t)$ várható értékeket, és mutassuk meg, hogy fennáll (5).

2. Igazoljuk (9) fennállását a következő Tauber-tétel felhasználásával: Ha $f(t)$ monoton nem csökkenő függvény $\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, df(t)$ létezik $s > 0$-ra és $\lim_{s\to} s\,\psi(s) = C$, úgy $\lim_{t\to\infty} f(t)/t = C$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sigma^2 < \infty$, úgy ξ_t aszimptotikusan normális eloszlást követ, azaz fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leqq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du.$$

4. Bebizonyítandó, hogy ha $F(x)$ nem rácsos eloszlás és $\mu < \infty$, úgy $\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_{u+t} - \xi_u \leqq n\} = W^*(t, n)$, ahol $W^*(t, n)$-et (18) definiálja.

5. Tekintsük a $\{\xi_t\}$ folyamatot. Válasszunk a $(0, t)$ intervallumon egy egyenletes eloszlású pontot, és jelölje ezen pontnak a legközelebbi utána következő eseménytől vett távolságát η_t^*. Meghatározandó $\mathbf{P}\{\eta_t^* \leqq x\}$, és bebizonyítandó, hogy ha $\mu < \infty$, akkor $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_t^* \leqq x\} = F^*(x)$, ahol $F^*(x)$-et (15) definiálja.

6. Tekintsük a $\{\xi_t\}$ folyamatot. Válasszunk a $(0, T)$ intervallumon egy egyenletes eloszlást mutató τ pontot, és határozzuk meg a $\xi_{\tau+t} - \xi_\tau$ változó határeloszlását, midőn $T \to \infty$. Mutassuk meg, hogy ha $\mu < \infty$, úgy $\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_{\tau+t} - \xi_\tau \leqq n\} = W^*(t, n)$, ahol $W^*(t, n)$-et (18) értelmezi.

7. Meghatározandó az η_t változó $\mathbf{M}\{\eta_t\}$ várható értékének határértéke $t \to \infty$ esetén. Adjunk példát arra a paradoxonnak látszó tényre, hogy $\mathbf{M}(\eta_t) > \mu$ is lehet.

8. Mutassuk meg, hogy ha $F(x)$ nem rácsos eloszlás, és $\sigma^2 < \infty$, úgy fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \left[m(t) - \frac{t}{\mu}\right] = \frac{\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{1}{2}.$$

9. *Felújításelmélet.* Tegyük fel, hogy egy folyamatosan működő gépnél egy alkatrész élettartamának sűrűségfüggvénye, $f(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!}\lambda$. $t = 0$ időpillanatban beállítunk egy alkatrészt. Ha elromlik, úgy azonnal jóval cseréljük ki. Kérdés $(0, t)$ időközben mennyi lesz a cserék várható száma.

10. Tegyük fel, hogy a b) pontban vizsgált rekurrens folyamatnál a τ_1 változó eloszlása a többitől eltérően $\hat{F}(x)$, és legyen ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja $\hat{\varphi}(s)$. Meghatározandó $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq n\}$ és $\mathbf{M}\{\xi_t\}$, és számítsuk ki ezek Laplace-transzformáltjait.

11. λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint érkező részecskéket elektronsokszorozóval számlálunk. A számláló minden egyes részecske hatására létrehoz egy α ideig tartó impulzust. A regisztráló azonban csak azokat a részecskéket jelzi külön, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn nincs folyamatban impulzus. Meghatározandó a t időtartam alatt regisztrált részecskék számának eloszlása és az eloszlás aszimptotikus kifejezése.

12. λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint érkező részecskéket Geiger—Müller-számlálóval számlálunk. A számláló minden egyes észlelt részecske hatására létrehoz egy α ideig tartó impulzust. Ez alatt az idő alatt, az ún. holt idő alatt a számlálócsőhöz érkező részecskék hatástalanok maradnak a számlálóra. Meghatározandó t időtartam alatt regisztrált részecskék számának eloszlása és az eloszlás aszimptotikus kifejezése.

13. λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint érkező részecskéket olyan számlálócsővel számlálunk, amely minden olyan részecske hatására létrehoz α ideig tartó impulzust, amelyek olyankor érkeznek a számlálócsőhöz, midőn nincs folyamatban impulzus. Azok a részecskék, amelyek olyankor érkeznek a számlálócsőhöz, midőn folyamatban van impulzus, egymástól függetlenül p valószínűséggel hoznak létre α ideig tartó impulzusokat. Csupán azon részecskék lesznek regisztrálva, amelyek olyankor érkeznek a számlálócsőhöz, midőn nincs folyamatban impulzus. Meghatározandó a t időtartam alatt regisztrált részecskék számának aszimptotikus eloszlása és a regisztrált események sűrűsége.

14. Tekintsük a 11. feladatot azzal a módosítással, hogy a létrehozott impulzusok időtartamai egyforma eloszlású független valószínűségi változók $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $\alpha = \int_0^\infty x\, dH(x)$.

15. Tekintsük a 12. feladatot azzal a módosítással, hogy a létrehozott impulzusok időtartamai egyforma eloszlású független valószínűségi változók $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $\alpha = \int_0^\infty x\, dH(x)$ és $\beta^2 = \int_0^\infty (x-\alpha)^2\, dH(x)$.

16. *Szukcesszív transzformáció.* Tegyük fel, hogy egy számlálócső rekurrens folyamat szerint szolgáltat impulzusokat. Az impulzusok azonban nem lesznek mind regisztrálva, hanem feltesszük, hogy az erősítő holtideje τ, azaz minden impulzus észlelése után τ ideig nem jelez újabb impulzusokat. Meghatározandó a regisztrálások sűrűsége.

17. Alkalmazzuk a 16. feladatot a 11. feladat esetére.

18. Alkalmazzuk a 16. feladatot a 12. feladat esetére.

19. *Véletlen koincidenciák.* Tegyük fel, hogy n számú, egymástól független λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint érkező részecskéket számlálunk Geiger—Müller-számlálócsővel. Feltesszük, hogy minden egyes számlálócsőnél a kiváltott impulzusok időtartamának eloszlásfüggvénye, $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$, ha $x \geqq 0$. Azt mondjuk, hogy egy adott időpillanatban E_j állapotban van a rendszer, ha egyidejűleg j számlálócsőnél folyamatban van impulzus. Egy adott időpillanatban j-szeres véletlen koincidenciáról beszélünk, ha $E_{j-1} \to E_j$ átmenet lép fel. Meghatározandó az m-szeres véletlen koincidenciák sűrűsége és a koincidenciák számának aszimptotikus eloszlása.

20. *Véletlen leosztás.* Tegyük fel, hogy egy leosztóhoz rekurrens folyamat szerint érkeznek impulzusok. A leosztó csak minden $\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \ldots, \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n, \ldots$-edik impulzust engedi tovább, ahol a $\{\nu_n\}$ változók egyforma eloszlású független valószínűségi változók $\mathrm{M}\{\nu_n\} = a$ várható értékkel és $\mathrm{D}^2\{\nu_n\} = b^2$ szórásnégyzettel. Meghatározandó a t idő alatt regisztrált impulzusok számának aszimptotikus eloszlása.

21. A $\{\xi_t\}$ stacionárius sztochasztikus folyamat korrelációs függvénye legyen $R(t) = e^{-\alpha|t|}$. Meghatározandó az $F(x)$ spektrális eloszlásfüggvény.

22. Megmutatandó, hogy egy $\{\xi_t\}$ stacionárius sztochasztikus folyamat $R(t)$ korrelációs függvénye folytonos, ha $R(+0) = 1$.

23. Legyen $\xi_t = \xi \cos \alpha t + \eta \sin \alpha t$, ahol ξ és η korrelálatlan változók, amelyekre $\mathrm{M}\{\xi\} = \mathrm{M}\{\eta\} = 0$, és $\mathrm{M}\{\xi^2\} = \mathrm{M}\{\eta^2\} = 1$. Mutassuk meg, hogy $\{\xi_t\}$ stacionárius sztochasztikus folyamat, és határozzuk meg az $R(t)$ korrelációs függvényt és az $F(x)$ spektrális eloszlásfüggvényt.

24. Legyen $\{\xi(t)\}$ stacionárius sztochasztikus folyamat, amelyre $R(t) = e^{-\alpha|t|}$, ahol $\alpha > 0$. Megbecsülendő $\xi(t+\tau)$ a $\xi(s)$, $s \leqq t$ értékek segítségével.

25. Legyen a $\{\xi(t)\}$ stacionárius sztochasztikus folyamat spektrális sűrűségfüggvénye, $f(\lambda) = \dfrac{C}{\lambda^4 + \alpha^4}$, ahol $\alpha < 0$. Megbecsülendő $\xi(t+\tau)$ a $\xi(s)$, $s \leqq t$ értékek ismeretében.

26. A $\{\xi_t\}$ stacionárius sztochasztikus folyamat spektrális sűrűségfüggvénye legyen $f(\lambda) = C\,\dfrac{\lambda^2 + \alpha^2}{\lambda^4 + \alpha^4}$, ahol $\alpha > 0$. Megbecsülendő $\xi(t+\tau)$ a $\xi(s)$, $s \leqq t$ értékek segítségével.

27. *Sörétzaj.* Elektroncsövek katódjából az elektronok feltehetőleg λ eseménysűrűségű POISSON-folyamat szerint lépnek ki. Amíg az egyes elektronok áthaladnak a katódtól az anódig, az elektroncső külső áramkörében egy áramlökést influálnak. Az intenzitás időbeli lefolyása legyen $f(u, x)$, ahol u jelöli az elektron repülési idejét és x a kilépő elektron sebességét. Legyen a sebességeloszlás $H(x)$. Meghatározandó stacionárius esetben az η_t^* anódáram eloszlása, várható értéke és szórása.

28. Meghatározandó az előbbi feladatnál az $\{\eta_t^*\}$ folyamat korrelációs függvénye és az áram spektrális eloszlása.

29. Meghatározandó a T időtartamra közepelt áram, $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \eta_t^*\,dt$, várható értéke és szórásnégyzete.

30. Tekintsünk sík diódát, amelynek katódjából az elektronok zérus kezdősebességgel lépnek ki. Tekintsünk el a tértöltéstől. Meghatározandó az η_t^* anódáram eloszlása, szórása, korrelációs függvénye és spektrális eloszlása.

31. Határozzuk meg az előbbi feladatnál az $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \eta_t^* dt$ közepes áram szórását.

32. Tekintsük a 12. §. 30. feladatát. Meghatározandók a $\mathrm{P}\{\xi_t \leqq x\} = F(t, x)$ és $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\xi_t \leqq x\} = F(x)$ eloszlások. Tegyük fel, hogy a részecskék regisztrálása akkor történik, ha az erősítő bemenő ellenállásán a feszültség a küszöbérték fölé emelkedik. Meghatározandó a regisztrálások időbeli sűrűsége. Tekintsük azt a speciális esetet, midőn a feszültségimpulzusok amplitudója μ állandóval egyenlő.

33. Tekintsük a 11. §. 20. feladatát. Tegyük fel, hogy a részecskék regisztrálása akkor történik, ha az erősítő bemenő ellenállásán a feszültség az a küszöbérték fölé emelkedik. Meghatározandó a regisztrálások időbeli sűrűsége stacionárius esetben.

A B) RÉSZ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

11. §. *Markov-láncok*

1. (1) tekintetbevételével a feltételes valószínűség definíciója alapján végezhető el a bizonyítás.

2. Legyen A esemény $\xi_n = j$, B_k esemény $\xi_1 = k$ és C esemény $\xi_0 = i$.

3. A (7) képlet alapján azt nyerjük, hogy mindig fennáll

$$f_j = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}},$$

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty$, úgy $f_j = 1$, vagyis E_j rekurrens állapot. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$, úgy $f_j < 1$, vagyis E_j tranziens állapot.

4. A generátorfüggvényekre fennáll $F_j(z) + F_j(z)\, P_j(z) = P_j(z)$.

5. Most a π matrix

$$\pi = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

és ennek n-edik hatványa

$$\pi^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-q)^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Innen

$$P_1(n) = \alpha\, p_{11}^{(n)} + \beta\, p_{21}^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{(\alpha - \beta)\,(p-q)^n}{2}$$

és

$$P_2(n) = \alpha\, p_{12}^{(n)} + \beta\, p_{22}^{(n)} = \frac{1}{2} - \frac{(\alpha - \beta)\,(p-q)^n}{2},$$

továbbá

$$\lim_{n\to\infty} P_1(n) = \lim_{n\to\infty} P_2(n) = \frac{1}{2}.$$

Ezen utóbbi határeloszlás a 2. tétel szerint fennálló

$$P_1 = P_1 p + P_2 q$$
$$P_2 = P_1 q + P_2 p$$

egyenletrendszer megoldásával is nyerhető.

6. $$\mathbf{P}\{\xi_0 = i \mid \xi_n = j\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi_0 = i\}\,\mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\}}{\mathbf{P}\{\xi_n = j\}} = \frac{P_i(0)\,p_{ij}^{(n)}}{P_j(n)}.$$

7. $$\mathbf{P}\{\xi_0 = 1 \mid \xi_n = 1\} = \frac{\alpha\, p_{11}^{(n)}}{P_1(n)} = \frac{\alpha + \alpha\,(p-q)^n}{1 + (\alpha - \beta)\,(p-q)^n}.$$

8. *a)* A lánc irreducibilis és ergodikus. *b)* A lánc periodikus $t = 3$ periódussal, $G_1 = \{E_1, E_2\}$, $G_2 = \{E_4\}$, $G_3 = \{E_3\}$ osztályokkal. *c)* A lánc két zárt halmazzal bír, $\{E_1, E_3\}$ és $\{E_4, E_5\}$ halmazzal, míg E_2 tranziens állapot.

9. Most a π matrix sajátértékei könnyen meghatározhatók, mégpedig $\lambda_\nu = p + q\,\varepsilon^{\nu-1} + r\,\varepsilon^{2(\nu-1)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$, ahol $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Felhasználva azt, hogy a sajátértékek egyszeresek, a π matrix előállítható a következő alakban:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}^{-1}$$

Innen

$$\pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}^{-1}.$$

Most $\lambda_1 = 1$ és $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_3| < 1$ lévén

$$\lim_{n\to\infty} \pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

és innen következik, hogy a kezdeti eloszlástól függetlenül fennáll $\lim_{n\to\infty} P_j(n) = \frac{1}{3}$ $(j = 1, 2, 3)$. A határeloszlás közvetlenül megkapható a 2. tétel alapján is.

10. $$p_{jj} = \frac{2j\,(N-j)}{N^2},\quad p_{j,j+1} = \frac{(N-j)^2}{N^2},\quad p_{j,j-1} = \frac{j^2}{N^2}.$$

A szóban forgó MARKOV-lánc véges sok állapottal bír, nem periodikus és irreducibilis. Így *Markov* tétele szerint létezik a $\{P_j\}$ határeloszlás és

$$P_j = P_{j-1}\,p_{j-1,j} + P_j\,p_{jj} + P_{j+1}\,p_{j+1,j}$$

$$\sum_{j=0}^{N} P_j = 1$$

egyenletrendszer megoldásával egyértelműen meghatározható. A megoldás

$$P_j = \frac{\binom{N}{j}^2}{\binom{2N}{N}}.$$

11. MARKOV-láncunk irreducibilis és periodikus $t = 2$ periodussal. A stacionárius eloszlás közvetlenül is meghatározható mint a

$$P_j = \left(1 - \frac{j-1}{a}\right) P_{j-1} + \frac{j+1}{a} P_{j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, a-1)$$

$$P_0 = \frac{P_1}{a}, \quad P_a = \frac{P_{a-1}}{a}$$

egyenletrendszer

$$\sum_{j=0}^{a} P_j = 1$$

feltételnek eleget tevő megoldása. Könnyen igazolható, hogy

$$P_j = \binom{a}{j} \frac{1}{2^a}.$$

12. Ebben az esetben $P_j(n) = p_{ij}^{(n)}$ a keresett valószínűség. A π matrix sajátértékei könnyen meghatározhatók, éspedig ezek

$$\lambda_s = 2\,(p\,q)^{1/2} \cos \frac{\pi\, s}{a} \quad (s = 1, 2, \ldots, a).$$

Ugyanis, ha $D_a = |\,\pi - \lambda\, I\,|$, úgy D_a kielégíti a $D_a - \lambda\, D_{a-1} + pq\, D_{a-2} = 0$ differenciaegyenletet, amelynek megoldása $D_a = (pq)^{\frac{a}{2}} \dfrac{\sin a\Theta}{\sin \Theta}$, ahol $\lambda = 2\,(pq)^{1/2} \cos \Theta$.

Mivel π sajátértékei egyszeresek, tehát π előállítható

$$\pi = H \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ 0 & 0 \ldots \lambda_a \end{bmatrix} H^{-1}$$

alakban, ahol most

$$H = \{\alpha_{ij}\} = \left\{ (q/p)^{i/2} \sin \frac{\pi\, i\, j}{a} \right\}$$

és

$$H^{-1} = \{\beta_{ij}\} = \left\{ \frac{2}{a} (p/q)^{i/2} \sin \frac{\pi\, i\, j}{a} \right\}$$

végül

$$\pi^n = H \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2^n \dots 0 \\ \cdot & \cdot \dots \\ 0 & 0 \dots \lambda_a^n \end{bmatrix} H^{-1}$$

lévén felírható, hogy

$$p_{zj}^{(n)} = \sum_{k=1}^{a} \lambda_k^n \alpha_{jk} \beta_{kz}$$

és így

$$p_{zj}^{(n)} = \frac{2^{n+1}}{a} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j-z}{2}} \sum_{k=1}^{a-1} (pq)^{\frac{n}{2}} \cos^n \frac{\pi k}{a} \sin \frac{\pi j k}{a} \sin \frac{\pi z k}{a}.$$

A π_z^* abszorpciós valószínűség meghatározására legyen $C = (E_0)$, és így (13) szerint

$$\begin{aligned} &\pi_1^* - p\,\pi_2^* = q \\ &\pi_z^* - q\,\pi_{z-1}^* - p\,\pi_{z+1}^* = 0 \quad (z = 2, 3, \dots, a-2) \\ &\pi_{a-1}^* - q\,\pi_{a-2}^* = 0, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\pi_z^* = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1},$$

ha $p \neq p$, míg $\pi_z^* = 1 - \frac{z}{a}$, ha $p = q = \frac{1}{2}$.

13. A szóban forgó MARKOV-lánc ergodikus, és a $\{P_j\}$ valószínűségeloszlás a

$$\begin{aligned} &q P_1 + q P_2 = P_1 \\ &p P_{j-1} + q P_{j+1} = P_j \qquad (j = 2, 3, \dots, a-1) \\ &p P_{a-1} + p P_a = P_a \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásával határozható meg. Most $P_j = \frac{p}{q} P_{j-1}$, és innen $P_j = \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} P_1$. A P_1 valószínűség a $\sum_{j=1}^{a} P_j = 1$ követelményből határozható meg. Így végül

$$P_j = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^a} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1},$$

ha $p \neq q$. Ha $p = q = \frac{1}{2}$, úgy $P_j = \frac{z}{a}$ minden j-re.

A $p_{jk}^{(n)}$ átmenetvalószínűségek ugyanúgy határozhatók meg, mint a 12. feladatnál. A π matrix sajátértékei most

$$\lambda_r = 2\,(pq)^{1/2} \cos\frac{\pi\, r}{a} \qquad (r = 1, 2, \ldots, a).$$

A végeredmény

$$p_{jk}^{(n)} = \frac{\dfrac{p}{q} - 1}{\left(\dfrac{p}{q}\right)^{a} - 1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} + \frac{2^{n+1}\, p^{1+\frac{n-j+k}{2}}\, q^{\frac{n+j-k}{2}}}{a} \cdot$$

$$\cdot \sum_{r=1}^{a-1} \frac{\cos^n \dfrac{\pi\, r}{a}\left\{\sin\dfrac{\pi\, r\, j}{a} - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{1/2} \sin\dfrac{\pi\, r\,(j-1)}{a}\right\}\left\{\sin\dfrac{\pi\, r\, k}{a} - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{1/2} \sin\dfrac{\pi\, r\,(k-1)}{a}\right\}}{1 - 2\,(pq)^{1/2} \cos\dfrac{\pi\, r}{a}} \cdot$$

14. MARKOV-láncunk irreducibilis, nem periodikus és ergodikus is, ha a (12) egyenletrendszernek létezik zérustól különböző megoldása. Most a $\{P_j\}$ határvalószínűség eloszlásra fennáll, hogy

$$P_j = P_{j+1}\,\pi_0 + P_j\,\pi_1 + \ldots + P_1\,\pi_j + P_0\,\pi_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Legyen

$$\Pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j\, z^j$$

és

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\, z^j = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x}\, dH(x) = \psi\,[\lambda\,(1-z)],$$

ahol $\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dH(x)$ a $H(x)$ eloszlás Laplace—Stieltjes trnaszformáltja. Most a generátorfüggvényekre fennáll

$$z\,\Pi(z) = \pi(z)\,[\Pi(z) + P_0\, z - P_0],$$

és innen

$$\Pi(z) = P_0\,\frac{\pi(z)}{1 - \dfrac{1-\pi(z)}{1-z}} \cdot$$

Legyen

$$\alpha = \int_0^{\infty} x\, dH(x),$$

úgy

$$\lim_{z\to 1} \frac{1-\pi(z)}{1-z} = \lambda\alpha,$$

és

$$\Pi(1) = \frac{P_0}{1 - \lambda\alpha}.$$

Ha most $\lambda\alpha < 1$, úgy a rendszer ergodikus, és $\Pi(1) = 1$ követelményből $P_0 = 1 - \lambda\alpha$ és

$$\Pi(z) = \frac{(1 - \lambda\alpha)\,\pi(z)}{1 - \dfrac{1 - \pi(z)}{1 - z}}.$$

Ha $\lambda\alpha \geqq 1$, úgy a rendszer nem ergodikus, és ekkor $\lim_{n\to\infty} P_j(n) = 0$ minden j-re.

Ha a fenti példánál speciálisan $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$, ha $x \geqq 0$, úgy $\psi(s) = 1/(1 + \alpha s)$, és $\lambda\alpha < 1$ esetén

$$\Pi(z) = \frac{1 - \lambda\alpha}{1 - \lambda\alpha z},$$

ahonnan

$$P_j = (1 - \lambda\alpha)\,(\lambda\alpha)^j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

15. Ennél a példánál a MARKOV-lánc nem periodikus, irreducibilis, és mivel az állapotok száma véges, tehát ergodikus is. A P_j valószínűségek a következő egyenletrendszernek tesznek eleget:

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{m} p_{jk} P_j \quad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

és

$$\sum_{k=0}^{m} P_k = 1.$$

Vezessük be az

$$U(z) = \sum_{k=0}^{m} P_k z^k$$

generátorfüggvényt. Erre fennáll

$$U(z) = \int_0^\infty (1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x})\; U(1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x})\, dF(x) +$$

$$+ (1 - z) P_m \int_0^\infty e^{-\mu x} (1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x})^m\, dF(x).$$

Legyen most

$$U_r = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r} \right)_{z=1}$$

és

$$\varepsilon_r = \int_0^\infty e^{-r\mu x}\, dF(x),$$

akkor az $U(z)$-re fennálló egyenlet r-szeres deriválásával azt nyerjük, hogy

$$U_r = \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\left[U_{r-1} - \binom{m}{r-1}U_m\right] \quad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

ugyanis $P_m = U_m$. Továbbá $U_0 = 1$. Ha most U_m-et rögzítve gondoljuk, akkor a fenti képlet U_r-re egy rekurzív egyenlet, amely könnyen megoldható. (Vö. pl. Ch. Jordan: Calculus of finite differences, Budapest, 1939, p. 583.) A megoldás

$$U_r = C_r\left[1 - U_m \sum_{j=0}^{r-1}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}\right],$$

ahol $C_0 = 1$ és

$$C_j = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\cdot\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}\cdots\frac{\varepsilon_j}{1-\varepsilon_j}.$$

Ha most a fenti képletben $m = r$, úgy azt nyerjük, hogy

$$U_m = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}},$$

és ekkor

$$U_r = C_r\,\frac{\sum_{j=r}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}.$$

Végül mivel

$$P_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0} = \sum_{r=k}^{m}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\frac{1}{r!}\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=1},$$

tehát

$$P_k = \sum_{r=k}^{m}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}C_r\,\frac{\sum_{j=r}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}.$$

Ha speciálisan

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

akkor

$$\varepsilon_j = \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} \quad \text{és} \quad C_j = \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!},$$

ahonnan

$$P_k = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}{\sum_{j=0}^{m}\frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}.$$

16. A szóban forgó MARKOV-lánc nem periodikus, irreducibilis és ergodikus is, ha a (12) egyenletnek van nem zérus megoldása. Legyen $\pi_k = \binom{m}{k} p^k q^{m-k}$ (ahol $q = 1 - p$), úgy most $p_{ij} = \pi_{j-i+k}$, ha $i \geqq k$ és $p_{ij} = \pi_{j-i}$, ha $i < k$. A (12) egyenlet pedig

$$P_j = \sum_{i=0}^{k-1} P_i \, \pi_{j-i} + \sum_{i=k}^{\infty} P_i \, \pi_{j-i+k}.$$

Vezessük be az

$$U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \, z^j$$

generátorfüggvényt, és legyen

$$U_k(z) = \sum_{j=0}^{k-1} P_j \, z^j.$$

Áttérve a generátorfüggvényekre, azt nyerjük, hogy

$$U(z) = \frac{U_k(z) \, [1 + p(z-1)]^m \, (z^k - 1)}{z^k - [1 + p(z-1)]^m}.$$

Látszólag ez az egyenlet nem határozza meg a P_j valószínűségeket, hiszen azt gondolhatnánk, hogy a jobb oldalon szereplő $U_k(z)$ $k-1$-ad fokú polinómot tetszőlegesen megválasztatjuk. Ez azonban nincs így, ugyanis az $U_k(z)$ polinom egyetlen megválasztására fog csak teljesülni, hogy a nyert $\{P_j\}$ mennyiségek valószínűségeloszlást szolgáltatnak. Először is az $U(1) = 1$ feltételből

$$1 = U_k(1) \, \frac{k}{k - mp}$$

adódik. Innen tüstént adódik, hogy $k \leqq mp$ esetén a rendszer nem ergodikus. Ekkor tehát $\lim_{n \to \infty} P_j(n) = 0$ valamennyi j-re. Ha viszont $mp < k$, úgy megmutatjuk, hogy $U(z)$ egyértelműen meg van határozva, vagyis a rendszer ergodikus. Ez a következőképpen látható be. Az $U(z)$ hatványsor konvergencia sugara legalább 1, és így $U(z)$ a komplex számsík $|z| < 1$ körében reguláris. Másrészt Rouché tételéből következik, hogy a $z^k - [1 + p(z-1)]^m = 0$ egyenletnek az egységkör belsejében pontosan $k-1$ gyöke van; mondjuk: $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$. $U(z)$ regularitása miatt ez csak úgy lehetséges, ha $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ az $U_k(z)$ polinómnak is gyöke. Miután a $k-1$-ed fokú $U_k(z)$ polinóm összes gyökeit ismerjük, és $U_k(1) = 1 - \frac{mp}{k}$, tehát ezzel $U_k(z)$ egyértelműen meg van határozva, és így $U(z)$ is egyértelműen meg van határozva. $U(z)$-t z szerint hatványsorba bontva nyerjük a keresett P_j valószínűségeket.

17. A szóban forgó MARKOV-lánc nem periodikus, irreducibilis és ergodikus is, mivel a (12) egyenletnek létezik nem zérus megoldása. Most (12) alakja

$$P_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \, p_{ij}.$$

Bevezetve az

$$U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j z^j$$

generátorfüggvényt, azt nyerjük, hogy

$$U(z) = e^{\lambda(z-1)}\, U[1 + p(z-1)].$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$U(z) = e^{-\lambda(z-1)[1+p\ldots+p^{n-1}]}\, U[1 + p^n (z-1)].$$

Ha $n \to \infty$, úgy $p^n \to 0$ és $U(1) = 1$ lévén, végül is

$$U(z) = e^{\frac{\lambda}{q}(z-1)},$$

vagyis

$$P_j = e^{-\frac{\lambda}{q}} \frac{\left(\frac{\lambda}{q}\right)^j}{j!}.$$

Tehát a rendszer ergodikus, és a $\{P_j\}$ határeloszlás POISSON-féle.

18. Most a MARKOV-lánc periodikus $t = 2$ periódussal, és állapotai két $G_0 = \{E_2, E_4, \ldots, E_{2a}\}$ és $G_1 = \{E_1, E_3, \ldots, E_{2a-1}\}$ csoportra bonthatók. Most

$$p_{ij}^{(2)} = \begin{cases} p^2 & \text{ha } j \equiv i+2 \\ 2pq & \text{ha } j \equiv i \pmod{2a} \\ q^2 & \text{ha } j \equiv i-2 \end{cases}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(2n)} = \begin{cases} P_j^* & \text{ha } E_i \text{ és } E_j \text{ ugyanazon halmazhoz tartoznak} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(2n+1)} = \begin{cases} P_j^* & \text{ha } E_i \text{ és } E_j \text{ különböző halmazhoz tartoznak} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Most $\sum_{G_0} P_j^* = 1$ és $\sum_{G_1} P_j^* = 1$ és a P^* mennyiségek eleget tesznek a

$$P_j^* = p^2 P_{j-2}^* + 2pq P_j^* + q^2 P_{j+2}^* \quad (j = 1, 2, \ldots, a)$$

egyenletrendszernek. Innen azt nyerjük, hogy $P_j^* = \frac{1}{a}$ minden j-re. A stacionárius eloszlás pedig $P_j = \frac{1}{2a}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2a)$, amely a (12) szerinti $P_j = p P_{j-1} + q P_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2a)$ és $P_{2a+1} = P_1$, $P_0 = P_{2a}$ egyenletrendszer megoldásával is nyerhető.

19. A p_{jk} átmenetvalószínűségek könnyen felírhatók. Mégpedig:

$$p_{jk} = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_j=k} p_{k1}\, p_{k2} \cdots p_{kj}.$$

Ha bevezetjük az

$$u(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$$

generátorfüggvényt, úgy p_{jk} megegyezik z^k együtthatójával $[u(z)]^j$-ben.

A szóban forgó MARKOV-láncnál E_0 (a sokaság elemeinek száma zérus) az egyetlen abszorpciós állapot, míg a többi állapot tranziens állapot. (13) szerint a π_j^* abszorpciós valószínűségek a következő egyenletrendszer megoldásával határozhatók meg:

$$\pi_j^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{j\nu}\, \pi_\nu^* + p_{j0}.$$

Ennek az egyenletrendszernek $\pi_j^* = \lambda^j$ egy megoldása, ha λ gyöke a $\lambda = u(\lambda)$ egyenletnek. Megmutatható, hogy $\lambda = u(\lambda)$ legkisebb abszolút értékű gyöke a kívánt λ. Ha $u'(1) = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j \leqq 1$, de $p_1 \neq 1$, úgy $\lambda = 1$. Ha $u'(1) > 1$, úgy $\lambda < 1$, és ha $p_0 = 0$, úgy $\lambda = 0$.

20. Esetünkben felírható, hogy $\xi_n = (\xi_{n-1} + \chi_{n-1})\, e^{-\alpha(\tau_n - \tau_{n-1})}$, és így az átmenetvalószínűségek

$$\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x \,|\, \xi_{n-1} = y\} = \int_0^{\infty} H(xe^{\alpha u} - y)\, dG(u) = K(x, y).$$

Ha χ_n várható értéke $\mathrm{M}\{\chi_n\} = \mu$ véges, és $G(0) < 1$, úgy a $\{\xi_n\}$ MARKOV-lánc ergodikus, és a $P(x)$ határeloszlás a

$$P(x) = \int_0^{\infty} K(x, y)\; dP(y)$$

integrálegyenlet egyértelmű megoldása. Ez a következőképpen bizonyítható. Legyen először speciálisan $\xi_0 \equiv 0$. Kimutatjuk, hogy rögzített x mellett a $\mathrm{P}\{\xi_n \leqq x\} = P_n(x)$ eloszlásfüggvénysorozat monoton nem növekvő. Felírható, hogy $\xi_n = \chi_0 e^{-\alpha(\tau_n - \tau_0)} + \chi_1 e^{-\alpha(\tau_n - \tau_1)} + \ldots + \chi_{n-1} e^{-\alpha(\tau_n - \tau_{n-1})}$ és $\xi_{n+1} = \chi_0 e^{-\alpha(\tau_{n+1} - \tau_0)} + \xi_n^*$, ahol ξ_n és ξ_n^* azonos eloszlású valószínűségi változók. Mivel $\chi_0 e^{-\alpha(\tau_{n+1} - \tau_0)} \geqq 0$, tehát $P_{n+1}(x) \leqq P_n(x)$. Továbbá $0 \leqq P_n(x) \leqq 1$. Tehát létezik a $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$ határfüggvény, amely nyilvánvalóan x-nek nem csökkenő függvénye. Ki kell mutatni, hogy $P(x)$ eloszlásfüggvény. $P(0) = 0$, és igazolandó, hogy $P(\infty) = 1$. Legyen $\beta = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dG(x)$ és $M_n = \mathrm{M}\{\xi_n\}$ úgy felírható, hogy $M_{n+1} = (M_n + \mu)\beta$. Most $M_0 = 0$ és az M_n sorozat monoton növekvő, és $M = \mu\beta/(1-\beta)$ határértékhez tart. Legyen $\varepsilon > 0$ és $x > M/\varepsilon$, úgy $x > M_n/\varepsilon$ is fennáll, és ekkor a nem negatív valószínűségi változókra vonatkozó ismert *Markov*-féle egyenlőtlenség szerint $P_n(x) \geqq 1 - \varepsilon$ minden n-re tetszőleges kis ε mellett is. Következőleg $P(x) \geqq 1 - \varepsilon$, ha $x > M/\varepsilon$, amivel bebizonyítottuk, hogy $P(\infty) = 1$. Eddig $\xi_0 \equiv 0$ volt. Ha most ξ_0 tetszőleges, úgy szintén létezik a $P(x)$ határeloszlás, és megegyezik az előzővel.

Ugyanis tetszőleges ξ_0-ra ξ_n csupán a $\xi_0 e^{-\alpha(\tau_n-\tau_0)}$ tagban különbözik a korábbi értékétől, és $\xi_0 e^{-\alpha(\tau_n-\tau_0)}$ valószínűségi mértékben 0-hoz konvergál, ha $n \to \infty$. Vagyis a ξ_0 változó kezdeti eloszlásától független $P(x)$ határeloszlás létezik, azaz a $\{\xi_n\}$ MARKOV-lánc ergodikus. Ha létezik határeloszlás, akkor nyilvánvalóan eleget tesz a (17) integrálegyenletnek. Kimutatjuk még, hogy a $P(x)$ határeloszlás a felírt integrálegyenlet egyértelmű megoldása. Ugyanis, ha lenne még egy megoldása, amely x-ben eloszlásfüggvény, akkor ez stacionárius eloszlás lenne, és ezt ξ_0 eloszlásának választva, valamennyi ξ_n eloszlása és így a határeloszlás is megegyezne ezzel. Láttuk azonban, hogy ha tetszőleges eloszlásból indulunk is ki, mindig ugyanazon a kezdeti eloszlástól független $P(x)$ határeloszlást kapjuk, és így feltevésünk ellenmondásra vezet.

Ha speciálisan $\chi_n \equiv \mu$ állandó, akkor a megoldandó integrálegyenlet,

$$P(x) = \int_{x-\mu}^{\infty} \left[1 - G\left(\frac{1}{\alpha} \log \frac{\mu + y}{x}\right)\right] dP(y).$$

Az *a)* esetben ebből

$$P(x) = x^{\lambda/\alpha}\left[A - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{x-\mu} \frac{P(y)}{(y+\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+1}}\, dy\right]$$

adódik. Ezen rekurzív képlet segítségével $P(x)$ sorjában előállítható a $(0, \mu)$, $(\mu, 2\mu)$, .. intervallumokban. Az A állandót a $P(\infty) = 1$ követelmény határozza meg. Így azt nyerjük, hogy

$$A = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}},$$

ahol $\gamma = e^C = 1{,}781\,072$ ($C = 0{,}577\,215\ldots$ az *Euler*-állandó).

A *b)* esetben

$$P(x) = e^{\lambda x}\, x^{\lambda/\alpha}\left[A - \frac{\lambda}{\alpha}\int_{\mu}^{xe^{\alpha x}} \frac{P(y-\mu)}{y^{\frac{\lambda}{\alpha}+1}}\, dy\right]$$

rekurzív képlet segítségével határozhatók meg $P(x)$ értékei sorjában a $(\mu e^{-\alpha\tau} + \ldots + \mu e^{-k\alpha\tau}, \mu e^{-\alpha\tau} + \ldots + \mu e^{-\alpha(k+1)\tau})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ intervallumokra. $P(x) = 1$, ha $x \geqq \mu/(e^{\alpha\tau} - 1)$. Az A állandó megegyezik az *a)* alattival.

21.

$$\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x \mid \xi_{n-1} = y\} = 1 - \left(\frac{x-y}{1-y}\right)^{m-n}.$$

22. Most felírható, hogy $\xi_n = [\xi_{n-1} + \chi_{n-1} - (\tau_n - \tau_{n-1})]^+$, ahol $[a]^+ = a$, ha $a \geqq 0$ és $[a]^+ = 0$, ha $a \leqq 0$. Az átmenetvalószínűségek

$$\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x \mid \xi_{n-1} = y\} = \int_0^{\infty} [1 - F(u + y - x)]\, dH(u) = K(x, y).$$

Tekintsük először azt a speciális esetet, midőn $\xi_0 \equiv 0$. Legyen $\vartheta_n = \chi_{n-1} - (\tau_n - \tau_{n-1})$. A $\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x\}$ valószínűségekre ekkor felírható, hogy $\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x\} = 0$, ha $x < 0$, és ha $x \geqq 0$, akkor

$$\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x\} = \mathbf{P}\{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n \leqq x,\ \vartheta_2 + \vartheta_3 + \ldots + \vartheta_n \leqq x, \ldots, \vartheta_n \leqq x\},$$

ami teljes indukcióval igazolható. Mivel a ϑ_n változók függetlenek és azonos eloszlásúak, tehát az is felírható $x \geqq 0$-ra, hogy

$$\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x\} = \mathbf{P}\{\vartheta_1 \leqq x,\ \vartheta_1 + \vartheta_2 \leqq x, \ldots, \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n \leqq x,\}$$

vagy $\Delta_n = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$ rövidítés bevezetésével

$$\mathbf{P}\{\xi_n \leqq x\} = \mathbf{P}\{\max_{1 \leqq r \leqq n} \Delta_r \leqq x\}$$

írható. Innen látszik, hogy rögzített x mellett a $P_n(x) = \mathbf{P}\{\xi_n \leqq x\}$ sorozat monoton, csökkenő, és így létezik a $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$ határérték. $P(x)$ x-nek nem negatív nem csökkenő függvénye, és $P(x) = 0$, ha $x < 0$. Kérdés, mikor lesz $P(x)$ eloszlásfüggvény, azaz mikor lesz $P(\infty) = 1$. Ennek megválaszolásánál három esetet különböztetünk meg az $\mathbf{M}\{\vartheta_n\}$ várható érték szerint.

Ha $\mathbf{M}\{\vartheta_n\} > 0$, úgy a nagy számok erős törvényének alkalmazásával azt nyerjük, hogy $P(x) \equiv 0$ minden x-re.

Ha $\mathbf{M}\{\vartheta_n\} < 0$, úgy szintén a nagy számok erős törvényének alkalmazásával azt kapjuk, hogy $P(\infty) = 1$, vagyis $P(x)$ eloszlásfüggvény.

Ha $\mathbf{M}\{\vartheta_n\} = 0$, de $\vartheta_n \not\equiv 0$, úgy $P(x) \equiv 0$.

Tehát, ha $\mathbf{M}\{\vartheta_n\} < 0$, vagy $\vartheta_n \not\equiv 0$, úgy létezik a $P(x)$ határeloszlás, és kielégíti a (17) integrálegyenletet. Megmutatható, hogy a ξ_0 változó kezdeti eloszlásától függetlenül mindig ugyanazt a $P(x)$ határeloszlást nyerjük. Ez egyúttal a (17) integrálegyenlet egyértelműen meghatározott megoldása, ugyanis most csak egyetlen stacionárius eloszlás létezik, a $P(x)$ eloszlás.

23. Most (19) szerint

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)\, e^{-in\lambda} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - a^2}{|\, e^{i\lambda} - a\,|^2},$$

tehát $f(\lambda) \geqq 0$ és $f(\lambda)$ sűrűségfüggvény, így $R(n)$ valóban korrelációs függvény

24. Ha $n \geqq 0$, úgy $\mathbf{M}\{\xi_0\, \xi_n\} = (1 - a^2) \sum_{k=n}^{\infty} a^k\, a^{k-n} = a^n$, és mivel $R(-n) = R(n)$, tehát minden n-re $R(n) = a^{|n|}$.

25. $z = e^{i\lambda}$ helyettesítéssel

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = \frac{C}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}\,(z - b)\left(\dfrac{1}{z} - b\right)}{(z - a)\left(\dfrac{1}{z} - b\right)}\, dz =$$

$$= \frac{C}{2\pi i} \oint_{|z|=1} z^{n-1} \left[\frac{b}{a} + \frac{(a - b)\,(1 - ab)}{a\,(1 - a^2)} \left(\frac{a}{z - a} + \frac{1}{1 - az}\right)\right] dz,$$

és a reziduumtétel szerint

$$R(n) = \begin{cases} \dfrac{C(1 - 2ab - b^2)}{1 - a^2} & \text{ha } n = 0 \\ \dfrac{C(a - b)(1 - ab)a^{|n|-1}}{1 - a^2} & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

26. Az a_k együtthatókat az a követelmény szabja meg, hogy $M\{(\xi_{n+m} - L_m(n))^2\}$ minimum legyen. Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy létezik $f(\lambda)$ spektrális sűrűségfüggvény. Ekkor az a_k ismeretleneket meghatározó feltételek a következőképpen írhatók fel:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} [e^{im\lambda} - \Phi_m(\lambda)] f(\lambda)\, d\lambda = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \text{ ahol } \Phi_m(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-ik\lambda}.$$

Továbbá ekkor $\sigma_m^2 = 1 - \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_m(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda$. Ha $f(\lambda)$ a $z = e^{i\lambda}$ racionális függvénye, úgy legyen $f^*(z) = f(e^{i\lambda})$ és $\Phi_m^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}$. Ekkor $\Phi_m^*(z)$ egyértelműen meghatározható abból a követelményből, hogy 1. $\Phi_m^*(z)$ analitikus az egységkörön és azon kívül, 2. $\Phi_m^*(\infty) = 0$, 3. $[z^m - \Phi_m^*(z)] f^*(z)$ analitikus az egységkör kerületén és azon belül. Példánk esetén $f^*(z) = C \dfrac{(z - b)(1 - bz)}{(z - a)(1 - az)}$ és $C \dfrac{[z^m - \Phi_m^*(z)](z - b)(1 - bz)}{(z - a)(1 - az)}$ analitikus $|z| \leqq 1$-re. Ekkor $\Phi_m^*(a) = a^m$, mivel $|a| < 1$ és $\Phi_m^*(z) = \gamma_m(z)/(z - b)$, ahol $\gamma_m(z)$ egész függvény, amelyre $\gamma_m(a) = a^m/(a - b)$ és $\Phi_m^*(\infty) = 0$, azaz $\Phi_m^*(z) = \dfrac{a^m(a - b)}{(z - b)}$ és $\Phi_m(\lambda) = \dfrac{(a - b)a^m}{e^{i\lambda} - b} =$

$= (a - b)a^m \sum_{k=1}^{\infty} b^{k-1} e^{-ik\lambda}$. Következőleg

$$\xi_{n+m} \sim a^m (a - b)[\xi_{n-1} + b\xi_{n-2} + b^2 \xi_{n-3} + \ldots]$$

és

$$\sigma_m^2 = 2\pi C\left[1 + \frac{(a - b)^2 (1 - a^{2m})}{1 - a^2}\right].$$

12. §. *Markov-folyamatok*

1. A ξ_t változó várható értéke $M\{\xi_t\} = \lambda t$. Eszerint λ *az időegység alatt elbomló atomok számának várható értéke.* A ξ_t változó szórása $D\{\xi_t\} = \sqrt{\lambda t}$. A nagy számok értéke erős törvénye szerint fennáll $P\left\{\lim_{t\to\infty} \dfrac{\xi_t}{t} = \lambda\right\} = 1$. ugyanis $\{\xi_t\}$ additív MARKOV-folyamat lévén, ξ_t előállítható egyforma eloszlású független valószínűségi változók összegeként. Eszerint, ha $t \to \infty$ a ξ_t/t hányados 1 valószínűséggel λ-hoz konvergál, azaz λ az *időbeli eseménysűrűségként* értelmezhető. Annak a valószínűsége, hogy a

POISSON-folyamatban $(t, t+\Delta t)$ időközben pontosan egy esemény fordul elő: $\mathbf{P}\{\xi_{t+\Delta t} - \xi_t = 1\} = e^{-\lambda \Delta t}\lambda\ \Delta t = \lambda\ \Delta t + o(\Delta t)$, hogy $(t, t+\Delta t)$ közben egynél több esemény fordul elő: $\mathbf{P}\{\xi_{t+\Delta t} - \xi_t > 1\} = 1 - e^{-\lambda \Delta t}\ (1 + \lambda\ \Delta t) = o(\Delta t)$ Tehát λ az *események időbeli valószínűség-sűrűsége.*

2. A folyamat additivitásából következik, hogy a $\tau_{n+1} - \tau_n$ időkülönbségek független valószínűségi változók. Most

$$\mathbf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leqq x \mid \tau_n = y\} = \mathbf{P}\{\xi_{y+x} - \xi_y > 0\} = 1 - P_0(x) = 1 - e^{\lambda x}$$

az y-tól függetlenül, vagyis $\mathbf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leqq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$. Az $x < 0$ eset nyilvánvaló. Innen következik, hogy $\mathbf{M}\{\tau_{n+1} - \tau_n\} = \frac{1}{\lambda}$, amely a λ paraméter új értelmezését adja: λ *egyenlő két egymást követő esemény közötti időtartam várható értékének reciprok értékével.*

3. $\mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = \mathbf{P}\{\xi_{t+x} - \xi_t > 0\}$, ugyanis $\eta_t \leqq x$ akkor teljesül, ha $(t, t+x)$ időintervallumban legalább egy esemény előfordul. Most $\mathbf{P}\{\xi_{t+x} - \xi_t > 0\} = 1 - P_0(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$.

4. A $\{\zeta_t\}$ folyamat nyilvánvalóan homogén, additív MARKOV-folyamat. Mivel $\mathbf{P}\{\zeta_{t+u} - \zeta_u = k\} = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_{t+u} - \xi_u = n\} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ a teljes valószínűség tétele szerint, tehát

$$\mathbf{P}\{\zeta_{t+u} - \zeta_u = k\} = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!},$$

és ebből következik, hogy $\{\zeta_t\}$ POISSON-folyamat.

5. Kérdés, hogy írható-e $N_k \sim N e^{-a} a^k / k!$ közelítés. Az a paramétert határozzuk meg abból a követelményből, hogy a t idő alatti észlelések számának átlaga egyezzék meg a POISSON-eloszlás alapján számított várható értékkel, vagyis legyen $a = \sum k N_k / N = 10\,094/2608 = 3{,}870$. Ilyen a értékkel számolva azt nyerjük, hogy

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
N_k	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16
$\frac{N e^{-a} a^k}{k!}$	54,399	210,523	407,361	525,496	508,418	393,515	253,817	140,325	67,882	29,189	17,075

A megegyezés jó.

6. A $\{\xi_t + \eta_t\}$ folyamat nyilvánvalóan homogén és additív MARKOV-folyamat. Legyen $\zeta_t = \xi_t + \eta_t$. Mivel fennáll

$$\mathbf{P}\{\zeta_{u+t} - \zeta_u = n\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}\{\xi_{u+t} - \xi_u = j\}\ \mathbf{P}\{\eta_{u+t} - \eta_u = n-j\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}\ e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{n-j}}{(n-j)!} = e^{-(\lambda+\mu)t} \frac{[(\lambda+\mu)t]^n}{n!}$$

tehát $\{\zeta_t\}$ valóban homogén POISSON-folyamat.

7. Legyenek $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq t$. Felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\tau_1 \leqq x_1, \tau_2 \leqq x_2, \ldots, \tau_n \leqq x_n \mid \xi_t = n\} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\tau_1 \leqq x_1, \tau_2 \leqq x_2, \ldots, \tau_n \leqq x_n, \xi_t = n\}}{\mathbf{P}\{\xi_t = n\}} =$$

$$= \frac{1}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} \sum_{\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}} e^{-\lambda x_1} \frac{(\lambda x_1)^{j_1}}{j_1!} e^{-\lambda(x_2 - x_1)} \frac{(\lambda(x_2 - x_1))^{j_2}}{j_2!} \ldots$$

$$\ldots e^{-\lambda(x_n - x_{n-1})} \frac{(\lambda(x_n - x_{n-1}))^{j_n}}{j_n!} e^{-\lambda(t - x_n)} =$$

$$= \sum_{\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}} \frac{n!}{j_1!\, j_2! \ldots j_n!} \left(\frac{x_1}{t}\right)^{j_1} \left(\frac{x_2 - x_1}{t}\right)^{j_2} \ldots \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{t}\right)^{j_n},$$

ahol az összegezés mindazon nem negatív egész $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ értékekre terjesztendő ki, amelyekre $j_1 + j_2 + \ldots + j_n = n$ és $j_1 + j_2 + \ldots + j_k \geqq k$ $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$. A végeredményből közvetlenül leolvasható a két eloszlás megegyezése.

8. Az $\eta_t = k$ esemény több egymást kizáró módon jöhet létre: a POISSON-folyamatban $(0, t)$ időközben előfordulhat $n = k, k + 1, \ldots$ esemény. Ha n esemény fordult elő, akkor kell, hogy a megfelelő n elektron közül t időpontban k a térben tartózkodjék, és $n - k$ már nem. Annak a valószínűsége, hogy a $(0, t)$ intervallumon egy egyenletes eloszlásnak megfelelő pontot választva, az ebben a pontban elinduló elektron t időpillanatban a térben tartózkodik: $p_t = \frac{1}{t}\int_0^t [1 - H(x)]\,dx$. Így a 7. feladat segítségével a teljes valószínűség tétele szerint

$$\mathbf{P}\{\eta_t = k\} = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_t = n\} \binom{n}{k} p_t^k (1 - p_t)^{n-k} = e^{-\lambda \int_0^t [1 - H(x)]\,dx} \frac{[\lambda \int_0^t [1 - H(x)]\,dx]^k}{k!},$$

mivel $\mathbf{P}\{\xi_t = n\} = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!$. Ha az $F(x)$ eloszlás várható értéke, $\alpha = \int_0^\infty x\,dF(x)$ létezik, úgy $\alpha = \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx$ is fennáll, és ekkor

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\eta_t = k\} = e^{-\lambda\alpha} \frac{(\lambda\alpha)^k}{k!}.$$

9. A korrelációs koefficiens definíció szerint

$$\mathbf{R}\{\xi_t, \xi_{t+\tau}\} = \frac{\mathbf{M}\{\xi_t\, \xi_{t+\tau}\} - \mathbf{M}\{\xi_t\}\, \mathbf{M}\{\xi_{t+\tau}\}}{\mathbf{D}\{\xi_t\}\, \mathbf{D}\{\xi_{t+\tau}\}}.$$

Most $M\{\xi_t\} = \lambda t$, $D\{\xi_t\} = \sqrt{\lambda t}$ és $M\{\xi_t \xi_{t+\tau}\} = M\{\xi_t^2\} + M\{\xi_t (\xi_{t+\tau} - \xi_t)\} = M\{\xi_t^2\} + M\{\xi_t\}[M\{\xi_{t+\tau}\} - M\{\xi_t\}] = \lambda t (\lambda t + \lambda \tau + 1)$, ugyanis ξ_t és $\xi_{t+\tau} - \xi_t$ változók függetlenek. Így végül $R\{\xi_t, \xi_{t+\tau}\} = \left(1 + \frac{\tau}{t}\right)^{-1/2}$.

10. Ha $\xi_0 \equiv 0$ feltétel mellett $P\{\xi_t = n\} = P_n(t)$, úgy $P\{\xi_t - \xi_s = n\} = P_n(t-s)$. A $P_n(t)$ valószínűségekre érvényes, hogy

$$(*) \qquad P_n(t+s) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t)\, P_{n-k}(s) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ez a függvény-egyenletrendszer sorjában meghatározza a $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, ... ismeretleneket. Először is: $P_0(t+s) = P_0(t)\, P_0(s)$-ből következik, hogy $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, ahol $\lambda \geqq 0$, ugyanis a $P_0(t)$ valószínűség t-nek nem növekvő függvénye. Most teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{j_1 + 2j_2 + \ldots + nj_n = n} \frac{(c_1 t)^{j_1} (c_2 t)^{j_2} \ldots (c_n t)^{j_n}}{j_1!\, j_2! \ldots j_n!}.$$

Tegyük fel, hogy ez a képlet érvényes $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$-re, és legyen $f(t) = e^{\lambda t} P_n(t) - \sum_{j_1 + 2j_2 + \ldots + (n-1)j_{n-1} = n-1} \frac{(c_1 t)^{j_1} (c_2 t)^{j_2} \ldots (c_{n-1} t)^{j_{n-1}}}{j_1!\, j_2! \ldots j_{n-1}!}$, akkor (*) szerint fennáll $f(t+s) = f(t) + f(s)$, ahonnan következik, hogy $f(t) = c_n t$, amivel $k = n$-re is be van bizonyítva az állítás.

A fentiek szerint $\lim_{t \to 0} \frac{P_n(t)}{t} = c_n$, ahonnan következik, hogy $c_n \geqq 0$. Mivel $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$ kell, hogy legyen, innen következik, hogy $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Megjegyezzük, hogy a $\{\xi_t\}$ összetett POISSON-folyamat előállítható $\xi_t = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \xi_t^{(n)}$ alakban, ahol a $\{\xi_t^{(n)}\}$-k egymástól független POISSON-folyamatok, rendre c_n esemény-sűrűséggel.

11. Az A halmazt bontsuk fel $A = A_n^{(1)} + A_n^{(2)} + \ldots + A_n^{(n)}$ páronként közös pont nélküli és egyforma mértékű halmazok összegére. Legyen A_n egy tetszőleges halmaz A felbontásában, és $M\{e^{iz\,\xi(A)}\} = \varphi_A(z)$, úgy fennáll minden n-re $\varphi_A(z) = [\varphi_{A_n}(z)]^n$. Továbbá fennáll $P\{[\xi(A) = 0\} = [P\{\xi(A_m) = 0\}]^n$. Most a „ritkasági feltevés" felhasználásával egyrészt $P\{\xi(A) = 0\} = e^{-\lim_{n \to \infty} n\, P\{\xi(A_n) = 1\}}$ írható. Másrészt $\varphi_A(z) = \exp\{(1 - e^{iz}) \lim_{n \to \infty} n\, P\{\xi(A_n) = 1\}$, tehát $\varphi_A(z) = [P\{\xi(A) = z\}]^{(e^{iz} - 1)}$, vagyis valóban a POISSON-eloszlás karakterisztikus függvényét nyertük. Most fenn kell állnia $P\{\xi(A) = 0\} = e^{-M\{\xi(A)\}}$-nak, és $M\{\xi(A)\} = \lambda\, \mu(A)$, ami $M\{\xi(A)\} = n\, M\{\xi(A_n)\}$-ből következik.

12. Jelölje ξ_P egy P pontban levő csillagnak a legközelebbi szomszédjától vett távolságát. $\mathbf{P}\{\xi_P \leqq r\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi_P > r\} = 1 - e^{-\lambda \frac{4r^3\pi}{3}}$. Ugyanis $\xi_P > r$ akkor teljesül, ha a P pont körüli r sugarú gömbben egyetlen csillag sincsen. Most

$$\mathbf{M}\{\xi_P\} = 4\lambda\pi \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{4\lambda r^3\pi}{3}} dr = \left(\frac{3}{4\lambda\pi}\right)^{1/3} \int_0^\infty x^{1/3} e^{-x}\, dx = \frac{3^{1/3}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right)}{(4\pi)^{1/3}\lambda^{1/3}} = \frac{0{,}616\ldots}{\lambda^{1/3}}.$$

13. Ha $\xi_t = n$, akkor ezen feltétel mellett a 7. feladat szerint az n pont eloszlása a körkerületen megfelel n számú egymástól független egyenletes eloszlású pont eloszlásának. Legyenek a pontoknak egymástól vett távolságai rendre $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ valószínűségi változók. Jelölje A_i esemény azt, hogy $\delta_i > \alpha$. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül pontosan k fordul elő, akkor az n pont közül k nem lesz lefedve. Ennek valószínűségét, $P_k\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$-t *Jordan Károly* általános valószínűségi tétele szolgáltatja. Most az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események ekvivalens események, és fennáll

$$\mathbf{P}\{A_1 A_2 \ldots A_j\} = \begin{cases} \left(1 - \frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1} & \text{ha } 0 \leqq j\alpha \leqq t \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így az általános valószínűségi tétel szerint

$$P_k\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = \binom{n}{k} \sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} (-1)^{j-k} \binom{n-k}{n-j} \left(1 - \frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1},$$

és végül a teljes valószínűségi tétel szerint

$$\mathbf{P}\{\eta_t = k\} = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \binom{n}{k} \sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} (-1)^{j-k} \binom{n-k}{n-j} \left(1 - \frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1} =$$

$$= \sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \frac{e^{-\lambda\alpha j} (\lambda t)^j}{j!} \left(1 - \frac{j\alpha}{t}\right)^{j-1}.$$

14. A $\tau_n \leqq t$ akkor teljesül, ha $(0, t)$ időközben legalább n esemény fordul elő, azaz $\mathbf{P}\{\tau_n \leqq t\} = \mathbf{P}\{\xi_t \geqq n\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi_t < n\} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$.

Tehát

$$G_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény $g_n(t) = G_n'(t)$. Azonban egyszerűbben is megkapható, ha tekintetbe vesszük, hogy $\mathbf{P}\{t < \tau_n \leqq t + \Delta t\} = g_n(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$. Most azonban $\mathbf{P}\{t < \tau_n \leqq t + \Delta t\} = \mathbf{P}\{\xi_t = n - 1\}.\ \mathbf{P}\{\xi_{t+\Delta t} - \xi_t > 0\} + o(\Delta t) =$

$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)} \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, és így

$$g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda & \text{ha } t \geqq 0. \end{cases}$$

Továbbá $M\{\tau_n^s\} = \int_0^\infty t^s g_n(t)\, dt = \frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(n)\lambda^s}$. Ha s egész szám, akkor $M\{\tau_n^s\} = \frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{\lambda^s}$.

15. Nyilvánvaló, hogy $\{\xi_t\}$ homogén és additív MARKOV-folyamat és (15) szerint fennáll

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = -\lambda P_{ik}(t) + \lambda P_{i,k-1}(t),$$

$$P_{ik}(0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = k \\ 0 & \text{ha } i \neq k. \end{cases}$$

Ennek a differenciálegyenlet-rendszernek a megoldása

$$P_{ik}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-i}}{(k-i)!} \qquad \text{ha } k \geqq i.$$

Vagyis $\{\xi_t\}$ valóban POISSON-folyamat.

16. Tegyük fel, hogy t időpontban E_n állapotban van a rendszer. Ekkor annak a valószínűsé e, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben $E_n \to E_{n+1}$ átmenet történik $\lambda \Delta t (1 - n\mu \Delta t) + o(\Delta t)$. Ugyanis ez akkor következik be, ha $(t, t+\Delta t)$ időközben egy hívás érkezik [$\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ a valószínűsége] a központba és a folyamatban levő n beszélgetés közül egy sem fejeződik be, aminek a valószínűsége $[1 - H(\Delta t)]^n = 1 - n\mu \Delta t + o(\Delta t)$. Annak a valószínűsége, hogy $E_n \to E_{n-1}$ átmenet történik, $(1 - \lambda \Delta t) n\mu \Delta t + o(\Delta t)$. Ugyanis ehhez az kell, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben ne érkezzen hívás a központba, aminek a valószínűsége $1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, és a folyamatban levő beszélgetések közül egy befejeződjék, aminek a valószínűsége $\binom{n}{1} H(\Delta t)\,[1 - H(\Delta t)]^{n-1} = n\mu \Delta t + o(\Delta t)$. Egyéb átmenetek valószínűsége, $o(\Delta t)$. Annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben nem történik változás, $1 - (\lambda + n\mu) \Delta t + o(\Delta t)$, ugyanis $1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben nem történik hívás, és $[1 - H(\Delta t)]^n = 1 - n\mu \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy nem fejeződik be beszélgetés. Ezek szerint a folyamat homogén, $c_n = n\mu + \lambda$; $p_{n,n+1} = \frac{\lambda}{n\mu + \lambda}$, $p_{n,n-1} = \frac{n\mu}{n\mu + \lambda}$, ha $n = 0, 1, \ldots, m-1$ és $c_m = m\mu$, $p_{m,m-1} = 1$, és (18) szerint

$$(n\mu + \lambda) P_n = (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} \quad (n = 0, 1, \ldots, m-1),$$

ahol $P_{-1} \equiv 0$ értendő, míg $n = m$-re $m\mu P_m = \lambda P_{m-1}$. A fenti egyenletrendszer szerint $n\mu P_n - \lambda P_{n-1} = (n+1)\mu P_{n+1} - \lambda P_n$, azaz $n\mu P_n - \lambda P_{n-1}$ az n-től független állandó, éspedig zérus, mivel $n = 0$-ra és $n = m$-re is az. Így $P_n = \frac{\lambda}{n\mu} P_{n-1}$, és ennek ismételt alkalmazásával $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} P_0$. Mivel $\sum_{j=0}^{m} P_j = 1$, tehát $P_0 = 1 / \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}$. Így végül

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}}{\sum_{j=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}}$$

vagy $e^{-\lambda/\mu}$-vel bővítve

$$P_n = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}{\sum_{j=0}^{m} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}.$$

Megjegyzés: Itt felhasználtuk azt a tényt, hogy ha egy beszélgetés t időpontban folyamatban van, akkor annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben befejeződik, $H(\Delta t)$, függetlenül attól, hogy mióta tart már a beszélgetés. Ez a $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$ (ha $x \geqq 0$) exponenciális eloszlás nevezetes sajátsága, amely könnyen igazolható. Legyen ugyanis τ egy ilyen eloszlású valószínűségi változó. Erre nézve annak a valószínűsége, hogy ha u ideje tart már a beszélgetés, $(u, u + x)$ időközben befejeződjék:

$$\mathbf{P}\{\tau \leqq u + x \mid u \leqq \tau\} = \frac{\mathbf{P}\{u < \tau \leqq u + x\}}{\mathbf{P}\{u \leqq \tau\}} = \frac{H(u + x) - H(u)}{1 - H(u)} = H(x),$$

vagyis u-tól függetlenül $H(x)$-szel egyenlő.

17. Esetünkben a MARKOV-folyamat homogén. Ha t időpontban E_j állapotban van a rendszer, akkor annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben nem történik változás: $1 - j\lambda\,\Delta t - \mu\,\Delta t + o(\Delta t)$, hogy $E_j \to E_{j+1}$ átmenet történik: $\mu\,\Delta t + o(\Delta t)$, és hogy $E_j \to E_{j-1}$ átmenet, $\lambda j\,\Delta t + o(\Delta t)$. Egyéb átmenetek valószínűsége $o(\Delta t)$. Most $c_j = j\lambda + \mu$, $p_{j,j+1} = \frac{\mu}{\mu + j\lambda}$, $p_{j,j-1} = \frac{j\lambda}{\mu + j\lambda}$, ha $j = 0, 1, \ldots, m - 1$ és $c_m = m\lambda$, $p_{m,m-1} = 1$. (18) szerint felírható, hogy

$$(\mu + j\lambda) P_j = \mu P_{j-1} + (j+1)\lambda P_{j+1},$$

ahol $P_{-1} \equiv 0$ értendő, és $j = m$-re $m\lambda P_m = \mu P_{m-1}$. A fenti egyenletből $j\lambda P_j - \mu P_{j-1} = (j+1)\lambda P_{j+1} - \mu P_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m - 1)$ adódik, aminek a megoldása a 17. példához hasonlóan

$$P_j = \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j \frac{1}{j!}}{\sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j \frac{1}{j!}}.$$

Az egyidejűleg működő gépek várható száma $\sum_{j=1}^{m} j P_j = \frac{\mu}{\lambda} \sum_{j=1}^{m} P_{j-1} = \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_m)$.

18. A $\{\xi_t\}$ folyamat most is homogén MARKOV-folyamat. A lehetséges átmenetek $E_j \to E_{j+1}$ és $E_j \to E_{j-1}$. Most $c_j = j\lambda + s\mu$, $p_{j,j+1} = s\mu/(j\lambda + s\mu)$, $p_{j,j-1} = j\lambda/(j\lambda + s\mu)$, ha $j = 0, 1, \ldots, m - s$, és $c_j = j\lambda + (m - j)\mu$, $p_{j,j+1} = j\lambda/[j\lambda + (m - j)\mu]$, $p_{j,j-1} = (m - j)\mu/[j\lambda + (m - j)\mu]$, ha $j = m - s + 1, \ldots, m$. (18) szerint most

$$(j\lambda + s\mu) P_j = s\mu P_{j-1} + (j + 1)\lambda P_{j-1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, m - s - 1),$$

$$[j\lambda + (m - j)\mu] P_j = (m - j + 1)\mu P_{j-1} + (j + 1)\lambda P_{j+1} \qquad (j = m - s, \ldots, m),$$

ahol $P_{-1} \equiv P_{m+1} \equiv 0$ értendő. Innen

$$j\lambda P_j - s\mu P_{j-1} = (j + 1)\lambda P_{j+1} - s\mu P_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, m - s - 1),$$

és

$$j\lambda P_j - (m - j + 1)\mu P_{j-1} = (j + 1)\lambda P_{j+1} - (m - j)\mu P_j \qquad (j = m - s, \ldots, m).$$

Vagyis

$$P_j = \left(\frac{s\mu}{\lambda}\right)^j \frac{1}{j!} P_0, \text{ ha } j = 0, 1, \ldots, m - s - 1,$$

és

$$P_j = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j-m+s+1} \frac{(m - j + 1) \ldots (s + 1)}{j(j - 1) \ldots (m - s)} P_{m-s-1} =$$

$$= \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j \frac{s^{m-s-1}(m - j + 1) \ldots (s + 1)}{j!} P_0, \text{ ha } j = m - s, m - s + 1, \ldots, m.$$

Az ismeretelen P_0 a $\sum_{j=0}^{m} P_j = 1$ követelményből határozható meg.

19. Jelölje $q(t)$ annak a valószínűségét, hogy egy radioaktív atom t időtartam alatt nem bomlik el. Nyilvánvalóan $q(t) \leqq q(s)$, ha $s < t$, és tetszőleges $t > 0$ és $s > 0$ értékekre fennáll $q(t + s) = q(t)\, q(s)$. Innen viszont következik, hogy $q(t) = e^{-\lambda t}$ lehet csak, ahol $\lambda > 0$. (A $\lambda = 0$ esetet mint fizikailag érdektelen esetet kizárjuk.) Ha most t időpontban E_j állapotban van a rendszer, akkor annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben E_{j-1} állapotba kerüljön, $\binom{j}{1}[q(\Delta t)]^{j-1}[1 - q(\Delta t)] = j\lambda\, \Delta t + o(\Delta t)$. Egyéb átmenetek valószínűsége $o(\Delta t)$. A $\{\xi_t\}$ folyamat tehát homogén MARKOV-folyamat, amelynél $c_j(t) = j\lambda$ és $p_{j,j-1}(t) = 1$. Így $\mathbf{P}\{\xi_t = j\} = P_j(t)$ a (17) szerint fennálló $\frac{dP_j(t)}{dt} = -j\lambda P_j(t) + (j + 1)\lambda P_{j+1}(t)$ $(j = 0, 1, \ldots, N - 1)$ differenciálegyenlet-rendszer

$$P_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } j = N \\ 0 & \text{ha } j \neq N \end{cases}$$

kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldása. Most

$$P_j(t) = \binom{N}{j} e^{-\lambda t j}(1 - e^{-\lambda t})^{N-j}.$$

Annak a valószínűsége, hogy $t < \tau_j \leqq t + \Delta t$ fennálljon, $P_{j-1}(t)\,(j-1)\,\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$. Így τ_j sűrűségfüggvénye $f_j(t) = P_{j-1}(t)\,(j-1)\,\lambda$ (ha $t \geqq 0$), és

$$\mathbf{M}\{\tau_j\} = \int_0^\infty t f_j(t)\,dt = \frac{1}{\lambda N} + \frac{1}{\lambda(N-1)} + \ldots + \frac{1}{\lambda(j+1)} \sim \frac{1}{\lambda} \log \frac{N}{j+1}.$$

Ha $j \sim \frac{N}{2}$, úgy a felezési idő várható értéke $\mathbf{M}\{\tau_{[N/2]}\} \sim \frac{\log 2}{\lambda}$.

20. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban E_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ állapotban van, ha a $(0, t)$ időközben előforduló impulzusok száma $\xi_t \equiv j \pmod m$. Legyen $\mathbf{P}\{\xi_t \equiv j \pmod m\} = P_j(t)$. Most annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben $E_j \to E_{j+1}$ átmenet forduljon elő, ha t időpontban E_j állapotban volt a rendszer, $\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)$. $(E_m \equiv E_0)$. Így a $\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j$ valószínűségek a következő egyenletrendszer megoldásával határozhatók meg:

$$\lambda P_j = \lambda P_{j-1} \quad (j = 1, 2, \ldots, m-1),$$

azaz $P_j = \frac{1}{m}$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$. Mivel

$$\mathbf{P}\{\eta_{t+u} - \eta_t = n\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{P}\{\xi_t \equiv j \pmod m\}\ \mathbf{P}\{nm - j \leqq \xi_{t+u} - \xi_t \leqq (n+1)\,m - j - 1\},$$

tehát

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_{t+u} - \eta_t = n\} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=nm-j}^{(n+1)m-j-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

21. Esetünkben $\{\xi_t\}$ homogén Markov-folyamat, amelynél $c_j(t) = j\mu + (m-j)\,\lambda$ és $p_{j,j-1}(t) = j\mu$, $p_{j,j+1}(t) = (m-j)\,\lambda$. Így tehát (17) szerint fennáll

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -(j\mu + (m-j)\,\lambda)\,P_j(t) + (m-j+1)\,\lambda\,P_{j-1}(t) + (j+1)\,\mu\,P_{j+1}(t),$$

$$P_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } j = m \\ 0 & \text{ha } j \neq m \end{cases}$$

kezdeti feltétellel. Ennek a rendszernek a megoldása

$$P_j(t) = \binom{m}{j} \left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}\right]^j \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}\right]^{m-j}$$

és

$$P_j = \binom{m}{j} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^j \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{m-j}.$$

22. A $\{\xi_t\}$ most homogén Markov-folyamat. Beszéljünk E_n állapotról, ha $\xi_t = n$. Ekkor $c_n(t) = n\lambda$, $p_{n,n+1}(t) = 1$ és (17) szerint fennáll

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -n\lambda P_n(t) + (n-1)\,\lambda P_{n-1}(t) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

differenciálegyenlet-rendszer

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1 \\ 0 & \text{ha } n \neq 1 \end{cases}$$

kezdeti feltétellel. A megoldás

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

Ha a kezdeti feltétel

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases}$$

akkor a megoldás

$$P_n(t) = \binom{n-1}{m-1} e^{-m\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-m}.$$

23. A szóban forgó folyamat MARKOV-folyamat, amelyre $c_n(t) = \lambda_n$ és $p_{n,n+1}(t) = 1$. Így (17) szerint

$$(*) \qquad \frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t),$$

ahol a kezdeti feltétel

$$P_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1 \\ 0 & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

Ha a λ_n számok különbözőek, akkor a megoldás

$$P_n(t) = (-1)^n \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=0}^{n}{}' (\lambda_k - \lambda_j)},$$

ahol a szorzatban a $j = k$-nak megfelelő tényező hiányzik.

Legyen $S_k(t) = P_0(t) + P_1(t) + \ldots + P_k(t)$, akkor a (*) szerint fennáll

$$S_k'(t) = -\lambda_k P_k(t)$$

és így

$$1 - S_k(t) = \lambda_k \int_0^t P_k(u)\, du, \quad \text{ha } k \geqq 0.$$

Mivel $S_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ monoton nem csökkenő sorozat, tehát $\lambda_k \int_0^t P_k(u)\, du$ monoton nem növekvő, nem negatív számok sorozata, és így létezik határértéke: $P^*(t)$.

Innen $P^*(t) \leqq \lambda_k \int_0 P_k(u)\, du \leqq 1$. Következőleg

$$\left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\right) P^*(t) \leqq \int_0 S_n(u)\, du \leqq \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

és mivel minden n-re $S_n(t) \leqq 1$, tehát

$$P^*(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \leqq t.$$

Ha most $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, úgy $P^*(t) = 0$ kell, hogy legyen, azaz $\lim_{n\to\infty} S_n(t) = 1$. Ha viszont $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, akkor $\int_0^t S_n(u)\, du < \infty$, és így $\lim_{n\to\infty} S_n(t) = 1$ nem állhat fenn minden t-re.

24. Most $\{\xi_t\}$ homogén MARKOV-folyamat, amelyre $c_n = n(\eta + \gamma)$, $c_n p_{n,n+1} = n\,\eta$, $c_n p_{n,n-1} = n\gamma$. Ekkor (17) szerint fennáll

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -n(\eta + \gamma) P_n(t) + (n-1)\,\eta P_{n-1}(t) + (n+1)\gamma P_{n+1}(t),$$

$$P_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1 \\ 0 & \text{ha } n \neq 1 \end{cases}$$

kezdeti feltétellel. Vezessük be az $U(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) z^n$ generátorfüggvényt. Erre fennáll

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (\eta z - \gamma)(z - 1) \frac{\partial U}{\partial z}$$

parciális differenciálegyenlet $U(0, z) = z$ kezdeti feltétellel. A megoldás $\eta \neq \gamma$ esetben

$$P_0(t) = \gamma\sigma,\ P_n(t) = (1 - \sigma\eta)(1 - \sigma\gamma)(\sigma\eta)^{n-1},$$

ahol $\sigma = [1 - e^{(\eta-\gamma)t}]/[\gamma - \eta e^{(\eta-\gamma)t}]$ és $\eta = \gamma$ esetben

$$P_0(t) = \eta t/(1 + \eta t),\ P_n(t) = (\eta t)^{n-1}/(1 + \eta t)^{n+1}.$$

Most

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \gamma \geqq \eta. \\ \gamma & \\ \overline{\mu} & \text{ha } \gamma < \eta. \end{cases}$$

25. Most $\{\xi_t\}$ nem homogén MARKOV-folyamat, amelyre $c_n(t) = n\eta + n\gamma t$, $p_{n,n+1}(t) = n\eta/(n\eta + n\gamma t)$, $p_{n,n-1}(t) = n\gamma t/(n\eta + n\gamma t)$. Ekkor (14) szerint fennál

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(n\eta + n\gamma t) P_n(t) + (n-1)\,\eta P_{n-1}(t) + (n+1)\,\gamma\, t\, P_{n+1}(t)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1 \\ 0 & \text{ha } n \neq 1 \end{cases}$$

kezdeti feltétellel. Generátorfüggvény alkalmazásával arra jutunk, hogy

$$P_0(t) = 1 - e^{\frac{\eta^2}{2\gamma}} \Big/ \left[A + e^{\frac{(\gamma t-\eta)^2}{2\gamma}} \right],\ P_n(t) = e^{-\eta t + \frac{\gamma t^2}{2} + \frac{\eta^2}{\gamma}} A^{n-1} \Big/ \left[A + e^{\frac{(\gamma t-\eta)^2}{2\gamma}} \right]^{\gamma+1},$$

ahol

$$A = \eta \int_0^t e^{\frac{(\gamma s - \eta)^2}{2\gamma}}\, ds.$$

26. Most (14) szerint fennáll

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\frac{1+nd}{1+td} P_n(t) + \frac{1+(n-1)d}{1+td} P_{n-1}(t)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0 \\ 0 & \text{ha } n \neq 0 \end{cases}$$

kezdeti feltétellel. A megoldás

$$P_0(t) = \left(\frac{1}{1+dt}\right)^{\frac{1}{d}},$$

$$P_n(t) = \left(\frac{1}{1+dt}\right)^{\frac{1}{d}} \left(\frac{t}{1+dt}\right)^n \frac{1\,(1+d)\,(1+2d)\ldots(1+(n-1)d)}{n!}.$$

27. Most (26) szerint fennáll a

$$\frac{\partial f(s,y,t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(s,y,t,x)}{\partial x^2}$$

ún. hővezetési differenciálegyenlet, amelynek megoldása

$$f(s,y,t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(t-s)}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}.$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $\{\xi_t\}$ *Gauss-folyamat.*

28. Most a megoldandó egyenlet

$$\frac{\partial f(s,y,t,x)}{\partial t} + a(t) \frac{\partial f(s,y,t,x)}{\partial x} = \frac{b(t)}{2} \frac{\partial^2 f(s,y,t,x)}{\partial x^2}.$$

Vezessünk be új koordinátákat a következőképpen

$$x' = x - \int_a^t a(u)\, du, \qquad y' = y - \int_a^s a(u)\, du$$

$$t' = \int_a^t b(u)\, du, \qquad s' = \int_a^s b(u)\, du.$$

Ekkor a megoldandó egyenlet

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

lesz, és a megoldás

$$f(s,y,t,x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\,(t'-s')}}\, e^{-\frac{(x'-y')^2}{2(t'-s')}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\beta}}\, e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\beta}},$$

ahol

$$\beta = \int_s^t b(u)\,du, \quad \alpha = y + \int_s^t a(u)\,du.$$

29. Legyen most $P\{\xi_t \leqq x \mid \xi_0 = 0\} = F(0, 0, t, x) = F(t, x)$. Ekkor az *f)* pont jelölésében $p(t, x) = \lambda$, $P(t, y, x) = U(x - y)$, és nincsen folytonos állapotváltozás. (33) szerint fennáll

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -\lambda\left[F(t, x) - \int_0^x U(x - y)\; d_y F(t, y)\right]$$

$$F(0, x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

kezdeti feltétellel. A megoldás

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,U_n(x),$$

ahol $U_n(x)$ jelöli az $U(x)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolúcióját $U_0(x) = 1$, ha $x \geqq 0$, $U_0(x) = 0$, ha $x < 0$, $U_1(x) = U(x)$ és $U_n(x)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ a következő rekurzív képlet segítségével határozható meg

$$U_n(x) = \int_0^x U_{n-1}(x - y)\,dU(y).$$

30. Legyen $P\{\xi_t \leqq x \mid \xi_0 = 0\} = F(0, 0, t, x) = F(t, x)$. Most $\{\xi_t\}$ MARKOV folyamat, amelyre $p(t, x) = \lambda$, $P(t, y, x) = H(x - y)$ és $G(t, y, t + \Delta t, x) = 1$, ha $x > y\,e^{-\alpha\Delta t}$, és $= 0$, ha $x \leqq y\,e^{-\alpha\Delta t}$, azaz $a(t, x) = -x\alpha$, $b(t, x) = 0$. Így tehát (33) szerint fennáll

$$(*) \qquad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = x\alpha\,\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda\left[F(t, x) - \int_0^x H(x - y)\; d_y F(t, y)\right]$$

$$F(0, x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

kezdeti feltétellel. Ha létezik $\lim_{t\to\infty} F(t, x) = F(x)$ határeloszlás, úgy arra fennáll $(*)$ szerint

$$F'(x) = \frac{\lambda}{\alpha x}\left[F(x) - \int_0^x H(x - y)\;dF(y)\right].$$

Az $F(t, x)$ eloszlásfüggvény könnyebben meghatározható a következőképpen. Legyen u egy rögzített érték, és tekintsük az $\{\eta_t\}$ folyamatot, ahol $\eta_t = \xi_u - \xi_{u-t}$. Az $\{\eta_t\}$ folyamat szintén MARKOV-féle. Bár nem homogén, de az előzőtől eltérően additív lesz, és csak ugrásszerű állapotváltozásai lesznek. Nyilvánvalóan fennáll

$\mathbf{P}\{\eta_t \leqq x\} = F(t, x)$, és az *f)* pont jelöléseiben most $p(t, x) = \lambda$, míg $P(t, y, x) = H[(x - y)\, e^{\alpha t}]$. Most (33) szerint fennáll

$$(**) \qquad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -\lambda \left\{ F(t, x) - \int_0^x H[(x - y)\, e^{\alpha t}]\, d_y F(t, y) \right\},$$

amely (*)-nál egyszerűbb egyenlet $F(t, x)$ meghatározására. (**) megoldható karakterisztikus függvények módszerével. Legyen $\Phi(t, z) = \int_0^\infty e^{izx}\, d_x F(t, x)$ és $\psi(z) = \int_0^\infty e^{izx}\, dH(x)$, úgy (**) szerint fennáll $\frac{\partial \Phi(t, z)}{\partial t} = -\lambda\, [1 - \psi(ze^{-\alpha t})]\, \Phi(t, z)$, amelynek megoldása

$$\Phi(t, z) = \exp\left\{-\lambda \int_0^t [1 - \psi(ze^{-\alpha u})]\, du\right\}.$$

A $\Phi(t, z)$ karakterisztikus függvény megfordításával $F(t, x)$ egyértelműen meghatározható.

Ha feltesszük, hogy $\int_0^\infty x\, dH(x) < \infty$, úgy könnyen megmutatható, hogy $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, z) = \Phi(z)$ létezik, és a $z = 0$ helyen folytonos. Ekkor a karakterisztikus függvények konvergenciájára vonatkozó ismert tételből (*P. Lévy—H. Cramér*) következik, hogy $\lim_{t\to\infty} F(t, x) = F(x)$ határeloszlás létezik, és $F(x)$ karakterisztikus függvénye $\Phi(z)$. Ekkor

$$\Phi(z) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\alpha} \int_0^1 \frac{1 - \psi(zx)}{x}\, dx\right\}.$$

$\Phi(z)$ megfordításával $F(x)$ egyértelműen meghatározható. Most azt bizonyítottuk be, hogy $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_t \leqq x \mid \xi_0 = 0\} = F(x)$. Ha $\xi_0 = y$, úgy $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq x \mid \xi_0 = y\} = \mathbf{P}\{\xi_t \leqq x - y\, e^{-\alpha t} \mid \xi_0 = 0\}$ lévén $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_t \leqq x \mid \xi_0 = y\} = F(x)$ is fennáll $F(x)$ folytonossági pontjaiban.

31. Most $\{\xi_t\}$ MARKOV-folyamat, amely folytonosan és ugrásszerűen változtatja állapotát. Az *f)* pont jelölésében

$$p(t, x) = \lambda, \qquad P(t, y, x) = H(x - y)$$

és

$$G(t, y, t + \Delta t, x) = \begin{cases} 1 & x \geqq y - \Delta t \\ 0 & x < y - \Delta t \end{cases}$$

ha $y > 0$. Így $a(t, x) = -1$ és $b(t, x) = 0$, ha $x > 0$. Legyen $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq x \mid \xi_0 = 0\} = F(t, x)$, úgy (33) szerint $x > 0$-ra fennáll, hogy

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} - \lambda\left[F(t,x) - \int_0^\infty H(x-y)\, d_y F(t,y)\right].$$

Ha innen Laplace—Stieltjes-transzformációra térünk át, $\Phi(t,s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d_x F(t,x)$ és $\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x)$ bevezetésével azt nyerjük, hogy

$$(*) \qquad \frac{\partial \Phi(t,s)}{\partial t} = \Phi(t,s)\,[s - \lambda + \lambda\,\psi(s)] - s\,F(t,0).$$

Legyen $\alpha = \int_0^\infty x\, dH(x)$ és $\lambda\alpha < 1$, úgy megmutatható, hogy $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,s) = \Phi(s)$ létezik, és az $s = 0$ helyen folytonos. Ekkor $\lim_{t\to\infty} F(t,x) = F(x)$ határeloszlás is létezik, és $\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x)$. (*) szerint $\Phi(s)$-re

$$\Phi(s) = \frac{s\,F(0)}{s - \lambda + \lambda\,\psi(s)}$$

adódik. Mivel $\Phi(0) = 1$ és $\psi'(0) = -\alpha$, tehát $F(0) = 1 - \lambda\alpha$ és

$$\Phi(s) = \frac{1-\lambda\alpha}{1 - \lambda\dfrac{1-\psi(s)}{s}}.$$

Ennek megfordításával $F(x)$ egyértelműen meghatározható.

32. A $\{\xi_t\}$ folyamat additív MARKOV-folyamat tisztán ugrásszerű állapotváltozásokkal. Most az *f)* pont jelölése szerint $p(t,x) = \lambda\, e^{-x/2}$ és $P(t,y,x) = H(x-y)$, ahol

$$H(x) = \frac{\lambda_1 H_1(x) + \ldots + \lambda_r H_r(x)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_r} \text{ és } \lambda = \lambda_1 + \ldots \lambda_r.$$

Legyen $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq x \mid \xi_0 = 0\} = F(t,x)$, úgy (33) szerint fennáll

$$(*) \qquad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -\lambda \int_0^x [1 - H(x-y)] e^{-y/2}\, d_y F(t,y),$$

$$F(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

kezdeti feltétellel. A (*) egyenletet Laplace—Stieltjes transzformáció alkalmazásával oldhatjuk meg. Legyen $\Phi(t,s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d_x F(t,x)$ és $\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x)$, úgy

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = -\lambda[1 - \psi(s)]\, \Phi\left(t, s + \frac{1}{2}\right).$$

Mivel $\Phi(0, s) = 1$, tehát

$$\Phi(t, s) = 1 - \lambda[1 - \psi(s)] \int_0^t \Phi\left(u, s + \frac{1}{2}\right) du.$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával $\Phi(t, s)$ sorra kifejezhető $\Phi\left(t, s + \frac{n}{2}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ segítségével. Ha tekintetbe vesszük, hogy $\lim_{n\to\infty} \Phi\left(t, s + \frac{n}{2}\right) = 0$, akkor végül azt kapjuk, hogy

$$\Phi(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda t)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \psi\left(s + \frac{j}{2}\right)\right].$$

Ennek megfordításával $F(t, x)$ egyértelműen meghatározható. Most $\mathrm{M}\{E_t\} = \mathrm{M}\{E_0\, e^{-\xi_t}\} = E_0\, \psi(t, 1)$, azaz

$$\mathrm{M}\{E_t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda t)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left[1 - \psi\left(1 + \frac{j}{2}\right)\right].$$

33. Legyen az alkatrész t időpontban E_1 állapotban, ha működik, E_2 állapotban, ha nem működik, és E_3 állapotban, ha tönkrement. A megfelelő állapotok valószínűségei legyenek rendre $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$. A kezdeti feltétel $P_1(0) = 1$, $P_2(0) = P_3(0) = 0$. (17) szerint felírható, hogy

$$P_1'(t) = -(\lambda + \gamma) P_1(t) + \eta P_2(t)$$
$$P_2'(t) = \gamma P_1(t) - \eta P_2(t)$$
$$P_3'(t) = \lambda P_1(t)$$

és

$$F(t) = P_3(t) = \lambda \int_0^t P_1(u)\, du.$$

Az első két egyenletből álló rendszer karakterisztikus egyenlete

$$\begin{vmatrix} -(\lambda + \gamma + \omega) & \eta \\ \gamma & -(\eta + \omega) \end{vmatrix} = \omega^2 + (\eta + \lambda + \gamma)\,\omega + \lambda\eta = 0,$$

ahonnan

$$\omega_1 = \frac{-(\eta + \lambda + \gamma) + \sqrt{(\eta + \lambda + \gamma)^2 - 4\lambda\eta}}{2},$$

és

$$\omega_2 = \frac{-(\eta + \lambda + \gamma) - \sqrt{(\eta + \lambda + \gamma)^2 - 4\lambda\eta}}{2}.$$

Ennek segítségével

$$P_1(t) = \frac{\eta + \omega_1}{\omega_1 - \omega_2} e^{\omega_1 t} - \frac{\eta + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} e^{\omega_2 t}$$

a keresett megoldás. Most $-\infty < \omega_2 < -\eta < \omega_1 < 0$, és $F'(t) = \lambda P_1(t)$ lévén,

$$m = \int_0^\infty t\, dF(t) = \frac{\eta + \lambda}{\eta\lambda},$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (t - m)^2\, dF(t) = \left(\frac{\eta + \lambda}{\eta\lambda}\right)^2 + \frac{2\gamma\lambda}{\eta^2\lambda^2}.$$

13. §. *Nem Markov-típusú folyamatok*

1. A ξ_t változó feltételes várható értéke $\tau_1 = y$ feltétel mellett

$$\mathbf{M}\{\xi_t \mid \tau_1 = y\} = \begin{cases} 1 + m(t - y) & \text{ha } y \leqq t \\ 0 & \text{ha } y > t \end{cases}$$

és a teljes várható érték tétel alapján

$$\mathbf{M}\{\xi_t\} = \int_0^\infty \mathbf{M}\{\xi_t \mid \tau_1 = y\}\, dF(y),$$

azaz

$$m(t) = F(t) + \int_0^\infty m(t - y)\, dF(y)$$

integrálegyenlet megoldásával is meghatározható $m(t)$. Vegyük mindkét oldal Laplace—Stieltjes transzformáltját, úgy azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) = \varphi(s) + \varphi(s) \int_0^\infty e^{-st} dm(t),$$

ahonnan (5) következik.

2. $m(t)$ monoton nem csökkenő függvény és $\mu(s) = \int_0^\infty e^{-st} dm(t) = \dfrac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}$.

Most $\lim_{s \to 0} s\mu(s) = -1/\varphi'(0) = 1/\mu$.

3. Tetszőleges $t \geqq 0$ és $n \geqq 0$ értékekre fennáll, hogy $\mathbf{P}\{\xi_t < n\} = \mathbf{P}\{t < \tau_n\}$. Legyen

$$n = \left[\frac{t}{\mu} + x \sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}\right],$$

úgy

$$\mathbf{P}\{\xi_t < n\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} < \frac{n - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}\right\}.$$

Mivel

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} = x,$$

tehát

$$(*) \qquad \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_t < n\} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} < x\right\}.$$

Másrészt

$$\mathbf{P}\{t < \tau_n\} = \mathbf{P}\left\{\frac{t - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{\tau_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\} \text{ és } \lim_{t\to\infty} \frac{t - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = -x,$$

és így

$$(**) \qquad \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{t < \tau_n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{-x < \frac{\tau_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

a centrális határeloszlástétel alapján. Mivel (*) és (**) megegyezik, tehát ezzel tételünk igazolást nyert.

4. Nyilvánvalóan fennáll $\mathbf{P}\{\xi_{u+t} - \xi_u \leqq n\} = 1 - \mathbf{P}\{\eta_u \leqq t\} * F_n(t)$, és a mondott feltételek mellett $\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_u \leqq t\} = F^*(t)$.

5. Könnyen felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta_t^* \leqq x\} = \int_0^x [1 - F(x-u)]\, \frac{m(t+u) - m(u)}{t}\, du.$$

Ha $\mu < \infty$, akkor $\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$, és következőleg $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_t^* \leqq x\} = F^*(x)$.

6. Nyilvánvalóan

$$\mathbf{P}\{\xi_{\tau+t} - \xi_\tau \leqq n\} = 1 - \mathbf{P}\{\eta_T^* \leqq T\} * F_n(t), \text{ és } \lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_T^* \leqq t\} = F^*(t),$$

ha $\mu < \infty$.

7. Most

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}\{\eta_t\} = \int_0^\infty x\, dF^*(x) = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}.$$

Legyen

$$F'(x) = \frac{2\alpha^{1/2}}{\Gamma(1/2)} e^{-\alpha x^{1/2}}, \text{ ha } x \geqq 0, \text{ akkor } \mathrm{M}\{\tau_1\} = 1/\alpha^{1/2}\, \Gamma(1/2)$$

és

$$\mathrm{M}\{\tau_1^2\} = 1/2\,\alpha.$$

Tehát ekkor $\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}\{\eta_t\} = \Gamma(1/2)/\alpha^{1/2}$. Mivel $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, tehát $\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}\{\eta_t\} = \pi\mu$. Ha μ véges, de $\sigma^2 = \infty$, úgy $\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}\{\eta_t\} = \infty$ lesz.

8. Tekintsük a τ_ν valószínűségi változót, ahol $\nu = \xi_t + 1$, $\tau_\nu = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + \ldots + (\tau_\nu - \tau_{\nu-1})$, és a $\nu = n$ esemény független a $(\tau_{n+1} - \tau_n)$, $(\tau_{n+2} - \tau_{n+1})$, ... valószínűségi változóktól. Így alkalmazhatjuk *A. Wald* ismert tételét, amelynek alapján felírható, hogy $\mathrm{M}\{\tau_\nu\} = \mathrm{M}\{\nu\}\,\mathrm{M}\{\tau_1\}$. Itt $\tau_\nu = t + \eta_t$ és $\nu = \xi_t + 1$, tehát $t + \mathrm{M}\{\eta_t\} = [m(t) + 1]$, azaz $m(t) - \frac{t}{\mu} = \frac{\mathrm{M}\{\eta_t\}}{\mu} - 1$ és $\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}\{\eta_t\} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}$ a mondott feltételek mellett.

9. Most a cserék időpontjai által alkotott sorozat rekurrens folyamat. Keresendő $m(t)$, ahol $\mu(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}$. Esetünkben $\varphi(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^m$, tehát $\mu(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)^m - 1}$. Legyen $\varepsilon_r = e^{\frac{2\pi r i}{m}}$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$, úgy parciális törtekre bontással azt kapjuk, hogy

$$\mu(s) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\lambda\,\varepsilon_r}{s + \lambda\,(1 - \varepsilon_r)},$$

ahonnan

$$m(t) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\varepsilon_r}{1 - \varepsilon_r} [1 - e^{-\lambda(1-\varepsilon_r)t}].$$

Megjegyezzük, hogy közvetlenül nyerhető, hogy

$$m'(t) = e^{-\lambda t} \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{mj-1}}{(mj-1)!}.$$

10. Egyszerűen felírható, hogy $\mathrm{P}\{\xi_t \leqq n\} = 1 - \hat{F}(t) * F_n(t)$. Most $m(t) = \mathrm{M}\{\xi_t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(t) * F_n(t)$, és így $\int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) = \frac{\hat{\varphi}(s)}{1 - \varphi(s)}$.

11. Jelölje a regisztrálások időpontjait $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$. Fennáll, hogy a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; \tau_0 = 0)$ időkülönbségek független valószínűségi változók, mégpedig $\mathbf{P}\{\tau_1 \leqq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ és a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ időkülönbségek azonos eloszlásúak, egyelőre ismeretlen $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Meghatározandó először $F(x)$. Jelölje a $(0, t)$ időközben történő regisztrálások várható számát $m(t)$, és legyen $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x)$. Ekkor a 10. feladat szerint felírható, hogy $\int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{1}{1 - \varphi(s)}$, ahonnan $\varphi(s) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + s}\left[\int_0^\infty e^{-st}\, dm(t)\right]^{-1}$. Itt $m'(t) = e^{-\lambda t}\lambda$, ha $t < \alpha$ és $m'(t) = e^{-\lambda\alpha}\lambda$, ha $t \geqq \alpha$. Ugyanis $m(t + \Delta t) - m(t) = e^{-\lambda t}\lambda\, \Delta t + o(\Delta t)$, ha $t < \alpha$, és $m(t + \Delta t) - m(t) = e^{-\lambda\alpha}\lambda\, \Delta t + o(\Delta t)$, ha $t \geqq \alpha$, mert $(t, t + \Delta t)$ közben akkor történik regisztrálás, ha $(t - \alpha, t)$ időközben nem fordul elő impulzus, és $(t, t + \Delta t)$ időközben előfordul egy; ha Δt kicsiny, egynél több regisztrálás nem fordulhat elő. Így tehát $\int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{s + \lambda e^{-(\lambda+s)\alpha}}{s}$, ahonnan

$$\varphi(s) = \frac{\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}{s + \lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}.$$

Ennek megfordításával

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} (-1)^{j-1} \frac{e^{-\lambda\alpha j}\lambda^j}{j!} (x - j\alpha)^j,$$

ha $x \geqq 0$. Ha ξ_t jelöli a regisztrálások számát $(0, t)$ időközben, és $\mathbf{P}\{\xi_t \leqq n\} = W(t, n)$, úgy

$$\int_0^\infty e^{-st}\, W(t, n)\, dt = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + s}\, [\varphi(s)]^n,$$

és ennek megfordításával

$$W(t, n) = 1 + (-1)^n \sum_{j=n}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} \binom{j-1}{n-1} e^{-j\alpha\lambda} \left[e^{-\lambda(t-j\alpha)} - \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \frac{\lambda^k (t - j\alpha)^k}{k!}\right]$$

adódik. A $W^*(t, n)$ stacionárius eloszlásra (19) szerint pedig

$$W^*(t, n) = 1 - \sum_{j=n}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} (-1)^{j-n} \binom{j}{n} \frac{e^{-\lambda\alpha(j+1)}\lambda^{j+1}(t - j\alpha)^{j+1}}{(j+1)!}$$

adódik. Most $F(x)$ átlaga $\mu = e^{\lambda\alpha}/\lambda$, és szórásnégyzete $\sigma^2 = e^{\lambda\alpha}(e^{\lambda\alpha} - 2\lambda\alpha)/\lambda^2$.

A 3. feladat szerint fennáll, hogy ξ_t aszimptotikusan normális eloszlást követ $\frac{t}{\mu}$ átlaggal és $\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}$ szórásnégyzettel.

12. Most is, miként a 11. feladatnál, fennáll, hogy a regisztrálások időpontjainak $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ sorozatában a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots ; \tau_0 = 0)$ időkülönbségek független valószínűségi változók, ahol $\mathrm{P}\{\tau_1 \leqq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ és a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ változók azonos eloszlásúak $F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-\alpha)}$, ha $x \geqq \alpha$ és $F(x) = 0$, ha $x < \alpha$ eloszlásfüggvénnyel. Most $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x) = \frac{\lambda\, e^{-s\alpha}}{\lambda + s}$ és a 11. feladat tárgyalása megismételhető ezzel a $\varphi(s)$ függvénnyel. Ekkor

$$W(t, n) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n} e^{-\lambda(t-n\alpha)} \frac{\lambda^j (t - n\alpha)^j}{j!} & \text{ha } n\alpha \leqq t \\ 1 & \text{ha } n\alpha \geqq t. \end{cases}$$

Most $F(x)$ átlaga $\mu = \frac{1 + \lambda\alpha}{\lambda}$, szórásnégyzete $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, és a $(0, t)$ időközben regisztrált részecskék száma aszimptotikusan normális eloszlást követ t/μ átlaggal és $\sigma^2 t/\mu^3$ szórásnégyzettel.

13. Ez az eset $p = 1$ esetben a 11. feladat és $p = 0$ esetben a 12. feladat megoldását szolgáltatja. Jelölje $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ sorozat a regisztrálások időpontjait. Most a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, \tau_0 = 0)$ valószínűségi változók egymástól függetlenek. $\mathrm{P}\{\tau_1 \leqq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ és $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ azonos eloszlásúak ismeretlen $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x)$, és jelölje most $m(t)$ a $(\tau_1, \tau_1 + t]$ időközben történő regisztrálások számának várható értékét, azaz az időt az első regisztrálás pillanatától kezdve számoljuk. Ha $\mu(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dm(t)$, úgy (25) szerint fennáll $\varphi(s) = \frac{\mu(s)}{1 + \mu(s)}$. Jelölje most $G(t)$ annak a valószínűségét, hogy τ_1 időpont után az első olyan részecske, amely létrehoz impulzust, t időtartamon belül érkezik meg. Erre felírható, hogy

$$G(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda p t} & \text{ha } 0 < t < \alpha \\ 1 - e^{-\lambda t + \lambda\alpha(1-p)} & \text{ha } \alpha \leqq t < \infty. \end{cases}$$

Ezután $m(t) = 0$, ha $t < \alpha$ és ha $t \geqq \alpha$, úgy fennáll

$$m(t) = G(t) - G(\alpha) + \int_0^t m(t - y)\, dG(y)$$

integrálegyenlet, amely a teljes várható érték tétel alkalmazásával igazolható. Laplace-transzformációra áttérve azt kapjuk, hogy

$$\mu(s) = \frac{\int_a^\infty e^{-st}\, d\,G(t)}{1 - \int_0^\infty e^{-st}\, d\,G(t)},$$

és így

$$\varphi(s) = \frac{\int_a^\infty e^{-st}\, d\,G(t)}{1 - \int_0^a e^{-st}\, d\,G(t)},$$

vagyis

$$\varphi(s) = \frac{e^{-a(\lambda p+s)}\,\lambda/(\lambda+s)}{1 + \dfrac{1 - e^{-a(\lambda p+s)}}{\lambda p + s}}.$$

Ennek megfordításával $F(x)$ egyértelműen meghatározható. Ha $F(x)$ átlagát μ és szórását σ jelöli, akkor a $(0, t)$ időközben regisztrált részecskék száma aszimptotikusan normális eloszlást mutat t/μ átlaggal és $\sqrt{\dfrac{\sigma^2 t}{\mu^3}}$ szórással. A regisztrálások sűrűsége $f = \dfrac{1}{\mu}$. Most $\mu = \dfrac{e^{\lambda p a} + p - 1}{\lambda p}$ és $\sigma^2 = \dfrac{e^{\lambda p a}(e^{\lambda p a} - 2\lambda p a) + p^2 - 1}{(\lambda p)^2}$.

14. A 11. feladat megoldásánál mondottak szó szerint érvényesek most is, csupán az $F(x)$ eloszlásfüggvény lesz más. Ismét fennáll, hogy

$$\varphi(s) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + s}\left[\int_0^\infty e^{-st}\, dm(t)\right]^{-1},$$

ahol azonban most $m'(t) = \lambda \exp\left\{-\lambda \int_0^t [1 - H(x)]\, dx\right\}$. Ez a következőképpen látható be. Jelölje $P_0(t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpontban nincs folyamatban impulzus. Ez az esemény akkor következik be, ha a $(0, t)$ időközben keletkező valamennyi impulzus befejeződik t időpontig. A POISSON-folyamatra vonatkozó 12. §-ban említett 7. feladat szerint felírható, hogy

$$P_0(t) = \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\left[\frac{1}{t}\int_0^t H(x)\, dx\right]^n = \exp\left\{-\lambda \int_0^t 1 - H(x)]\, dx\right\}.$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy $m(t+\Delta t) - m(t) = \lambda P_0(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$, azaz $m'(t) = \lambda P_0(t)$. Így tehát

$$\varphi(s) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + s}\left[\lambda \int_0^\infty e^{-st-\lambda\int_0^t [1-H(x)]dx}\,dt\right]^{-1},$$

amelynek megfordításával $F(x)$ egyértelműen meghatározható. Most $F(x)$ átlaga $\mu = -\varphi'(0) = e^{\lambda a}/\lambda$ és szórásnégyzete

$$\sigma^2 = \varphi''(0) - [\varphi'(0)]^2 = \frac{2\mu - \lambda\mu^2}{\lambda} + 2\lambda\mu^2 \int_0^\infty \left[P_0(t) - \frac{1}{\lambda\mu}\right] dt.$$

15. A (12) feladat megoldásához hasonló a megoldás, csupán $F(x)$ jelenlegi alakja $F(x) = \lambda \int_0^\infty H(x-y)\,e^{-\lambda y}\,dy$ lesz, ha $x \geqq 0$. Most $F(x)$ átlaga $\mu = \frac{1+\lambda\alpha}{\lambda}$ és szórásnégyzete $\sigma^2 = \frac{1+\lambda^2\beta^2}{\lambda^2}$.

16. Jelölje a számlálócső által szolgáltatott impulzusok sorozatát $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, ahol $\mathbf{P}\{\tau_n - \tau_{n-1} \leqq x\} = F(x)$ $(n = 2, 3, \ldots)$, $\mu = \int_0^\infty x\,dF(x)$, $\sigma^2 = \int_0^\infty (x-\mu)^2\,dF(x)$. Ha a regisztrálások időpontjainak sorozata $\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_n', \ldots$ akkor érvényes lesz, hogy a $\tau_n' - \tau_{n-1}'$ $(n = 2, 3, \ldots)$ időkülönbségek egyforma eloszlású független valószínűségi változók, egyelőre ismeretlen $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $A = \int_0^\infty x\,dG(x)$, ekkor a regisztrálások időbeli sűrűsége: $f' = \frac{1}{A}$. Legyen $m(t) = \sum_{n=1}^\infty F_n(t)$, úgy a teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < \tau \\ \int_\tau^x [1 - F(x-u)]\,dm(u) & \text{ha } x \geqq \tau. \end{cases}$$

Innen

$$A = \mu[1 + m(\tau)].$$

17. A 11. feladatnál $F(x)$ Laplace-transzformáltja $\varphi(s) = \frac{\lambda\,e^{-\alpha(\lambda+s)}}{s + \lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}$ volt, és mivel $\int_0^\infty e^{-st}\,dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}$, tehát

$$m(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < \alpha \\ \lambda\,e^{-\lambda a}(t-\alpha) & \text{ha } t \geqq \alpha \end{cases}$$

és $\mu = e^{\lambda a}/\lambda$. Innen $f' = \frac{\lambda\,e^{-\lambda a}}{1 + \lambda\,e^{-\lambda a}(\tau - \alpha)}$ ha $\tau > \alpha$.

18. A 12. feladatnál $F(x)$ Laplace-transzformáltja $\varphi(s) = \dfrac{\lambda\, e^{-s\alpha}}{\lambda + s}$ volt, és mivel

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}, \text{ tehát}$$

$$m(t) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} \left[1 - \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda(t-k\alpha)} \frac{\lambda^j (t - k\alpha)^j}{j!}\right] \text{ és } \mu = \frac{1 + \lambda\alpha}{\lambda}.$$

Innen $$f' = \frac{\lambda}{(1 + \lambda\alpha)\,[1 + m(\tau)]}.$$

19. Tegyük fel, hogy $t = 0$ időpontban E_m állapotban van a rendszer. Jelölje az egymást követő $E_{m-1} \to E_m$ átmenetek időpontjait rendre $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$. Esetünkben érvényes lesz, hogy a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots ; \tau_0 = 0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású független valószínűségi változók közös $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $F(x)$ átlaga μ és szórása σ. Ekkor az m-szeres véletlen koincidenciák sűrűsége $f = \dfrac{1}{\mu}$, és a t idő alatt észlelt koincidenciák száma aszimptotikusan normális eloszlást követ $\dfrac{t}{\mu}$ várható értékkel és $\sqrt{\dfrac{\sigma^2 t}{\mu^3}}$ szórással. Ha $m(t)$ jelöli a $(0, t)$ időközben észlelt m-szeres véletlen koincidenciák várható számát és

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x), \text{ úgy fennáll } \varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) \Big/ \left[1 + \int_0^\infty e^{-st}\, dm(t)\right].$$

Most $m'(t) = m\lambda\, P(t)\,[1 - P(t)]^{m-1}$, ahol $P(t)$ annak a valószínűségét jelöli, hogy egy kiválasztott számlálócsőnél t időpontban nincs folyamatban impulzus. $P(t)$-re könnyen felírható $\alpha P'(t) + (1 + \lambda\alpha) P(t) = 1$ differenciálegyenlet, amelynek megoldása $P(0) = 0$ kezdeti feltétellel: $P(t) = \dfrac{1}{1 + \lambda\alpha}\left(1 - e^{-\frac{1+\lambda\alpha}{\alpha} t}\right)$. Így tehát

$$\varphi(s) = 1 - \{1 + m\lambda \int_0^\infty [1 - P(t)]^{m-1} P(t)\, e^{-st}\, dt\}^{-1} =$$

$$= 1 - \left\{1 + \frac{m\lambda\alpha}{(1 + \lambda\alpha)^m} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \left[\frac{(\lambda\alpha)^{m-1-j}}{s\alpha + j(1 + \lambda\alpha)} - \frac{(\lambda\alpha)^{m-1-j}}{s\alpha + (j+1)(1 + \alpha)}\right]\right\}^{-1},$$

ahonnan

$$\mu = \frac{(1 + \lambda\alpha)^m}{m\lambda^m \alpha^{m-1}}$$

és

$$\sigma^2 = \frac{(1+\lambda\alpha)^{m-1}\left\{(1 + \lambda\alpha)^{m+1} + 2\left[\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j}\binom{m}{j+1}(\lambda\alpha)^{m-j} - m(\lambda\alpha)^m\right]\right\}}{m^2 \lambda^{2m} \alpha^{2m-2}}.$$

20. Jelölje az impulzusok előfordulási időpontjait $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, ahol $\mathbf{P}\{\tau_n - \tau_{n-1} \leqq x\} = F(x)$, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$ $(\tau_0 = 0)$ és legyen $F(x)$ átlaga μ és szórása σ. Ha a regisztrálások időpontjait $\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_n', \ldots$ sorozat jelöli, akkor $\{\tau_n'\}$ is rekurrens eseménysorozat. Legyen a $\tau_n' - \tau_{n-1}'$ változók közös eloszlásfüggvénye $G(x)$, és $G(x)$ átlaga A, és szórása B. Mivel $\tau_1' = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_1$ tehát $\mathbf{M}\{\tau_1'\} = \mathbf{M}\{\tau_1\} \cdot \mathbf{M}\{\tau_1\}$ és $\mathbf{D}^2\{\tau_1'\} = \mathbf{M}^2\{\tau_1\}\ \mathbf{D}^2\{\tau_1\} + \mathbf{D}^2\{\tau_1\}\ \mathbf{M}\{\tau_1\}$, azaz, $A = a\,\mu$ és $B^2 = \mu^2 b^2 + \sigma^2 a$. A t idő alatti regisztrálások száma aszimptotikusan normális eloszlást követ t/A várható értékkel és $B^2 t/A^3$ szórásnégyzettel.

21. Esetünkben létezik $f(x) = F'(x)$, és (26)-ból inverzióval kapjuk, hogy $f(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$.

22. Legyen $\eta_t = (\xi_t - \mathbf{M}\{\xi_t\})/\mathbf{D}\{\xi_t\}$, úgy $|R(t + \Delta t) - R(t)| = |\mathbf{M}\{\eta_{t+\Delta t}\eta_0\} - \mathbf{M}\{\eta_t\,\eta_0\}| = |\mathbf{M}\{\eta_0\,(\eta_{t+\Delta t} - \eta_t)\}| \leqq \sqrt{\mathbf{M}\{\eta_0^2\}\,\mathbf{M}\{(\eta_{t+\Delta t} - \eta_t)^2\}} = \sqrt{\mathbf{M}\{(\eta_{\Delta t} - \eta_0)^2\}} = \sqrt{2(1 - R(\Delta t))} \to 0$, ha $\Delta t \to 0$.

23. Most $\mathbf{M}\{\xi_t\} = 0$, $M\{\xi_t^2\} = 1$ és $R(t) = \cos \alpha\, t$. (26) szerint

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqq -\alpha \\ 1/2 & \text{ha } -\alpha < x \leqq \alpha \\ 1 & \text{ha } x > \alpha. \end{cases}$$

24. A $\{\xi_t\}$ folyamat spektrális sűrűségfüggvénye $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{a^2 + \lambda^2} = \frac{a}{2\pi} \frac{1}{(\lambda - i\,a)(\lambda + i\,a)}$. Tekintsük a $\Psi_\tau(\lambda) = \frac{a}{2\pi} \frac{e^{i\tau\lambda} - \Phi_\tau(\lambda)}{(\lambda - ia)(\lambda + ia)}$ függvényt. Ennek a felső félsíkon analitikusnak kell lennie, tehát egyrészt $\Phi_\tau(ia) = e^{-a\tau}$ kell, hogy legyen. Másrészt, mivel $\Psi_\tau(\lambda)$-nak az alsó félsíkon analitikus függvénynek kell lennie, tehát $\Phi_\tau(\lambda)$-nak csupán $\lambda = \infty$ lehet szinguláris pontja. A $|\lambda| \to \infty$-re vonatkozó követelményből következik, hogy $\Phi_\tau(\lambda)$ állandó, azaz $\Phi_\tau(\lambda) = e^{-a\tau}$. Eszerint $L_\tau(t) = e^{-a\tau}\xi(t)$, azaz $\xi(t + \tau) \sim e^{-a\tau}\,\xi(t)$. A megközelítés négyzetes átlaghibája $\sigma_\tau^2 = (1 - e^{-2a\tau})$.

25. A $\{\xi_t\}$ folyamat korrelációfüggvénye jelenleg

$$R(\tau) = \frac{C}{2^{3/4}\,\alpha^{1/4}} e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}} \left(\cos\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}\right).$$

Most a 13. § c) 1., 2., 3. feltételeiből kiadódik, hogy $\Phi_\tau(\lambda) = A\lambda + B$ kell, hogy legyen, és az együtthatók könnyen meghatározhatók. Így

$$\Phi_\tau(\lambda) = \frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}}{\alpha} \left(\sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}\right) i\lambda + e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}} \left(\cos\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}} + i\sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}\right),$$

ahonnan

$$L_\tau(t) = \frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}}{\alpha} \sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}\,\xi'(t) + e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}} \left(\cos\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}} + i\sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}\right) \xi(t),$$

és $\xi(t+\tau) \sim L_\tau(t)$. Az extrapoláció σ_τ^2 négyzetes középhibája

$$\sigma_\tau^2 = \frac{C}{2\alpha^3\sqrt{2}}\left[1 - 2e^{-\alpha\tau\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,e^{-\alpha\tau\sqrt{2}}\sin\left(\alpha\tau\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

26. A 13. §. *c*)1., 2., 3. feltételei szerint $\Phi_\tau(\lambda) = \dfrac{A\lambda + iB}{\lambda - i\alpha}$ adódik, ahol $A =$

$= e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}\left[\cos\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)\sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}\right]$ és $B = \alpha e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}\left[\cos\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}-1)\sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}\right]$.

Következőleg

$$L_\tau(t) = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,d\zeta(\lambda) - (\alpha A - B)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}}{\alpha + i\lambda}\,d\zeta(\lambda),$$

vagyis

$$L_\tau(t) = A\,\xi(t) - (\alpha A - B)\int_0^{\infty} e^{-\alpha s}\xi(t-s)\,ds,$$

és $\xi(t+\tau) \sim L_\tau(t)$. Az extrapoláció négyzetes középhibája

$$\sigma_\tau^2 = \frac{C}{\sqrt{2}\alpha}\left[1 - (\sqrt{2}-1)e^{-\alpha\tau\sqrt{2}}\,(\sqrt{2} + \cos\alpha\tau\sqrt{2})\right].$$

27. Tekintsük a $(0, t)$ időközben kilépő elektronokat, amelyek számát jelölje ξ_t, és legyen az anódáram értéke t időpontban η_t. Ekkor

$$\eta_t = \sum_{0 \le \tau_k \le t} f(t - \tau_k, \chi_k),$$

ahol $\{\tau_k\}$ sorozat jelöli az elektronoknak a katódból való kilépéseinek időpontjait, és a $\{\chi_n\}$ változók egyforma eloszlású független valószínűségi változók $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. (Ha az elektronokra Maxwell—Boltzmann-féle statisztikát alkalmazunk,

úgy $H(x) = 1 - e^{-\frac{mx^2}{2kT}}$ (ha $x \geqq 0$), ahol az m elektron tömege, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg/grad a Boltzmann-állandó és T a katód abszolút hőmérséklete). Legyen $\Phi(t, z) =$

$= \mathbf{M}\{e^{iz\eta_t}\}$ és $\varphi(t, z) = \int_0^{\infty} e^{izf(t,x)}\,dH(x)$. Most a teljes várható érték tétel alapján felírható, hogy

$$\mathbf{M}\{e^{iz\eta_t}\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\{\xi_t = n\}\,\mathbf{M}\{e^{iz\eta_t} \mid \xi_t = n\}.$$

Itt $\mathbf{M}\{e^{iz\eta_t} \mid \xi_t = 0\} = 1$ és a Poisson-folyamatok 12. §. 7. feladatában megismert tulajdonsága szerint

$$\mathbf{M}\{e^{iz\eta_t} \mid \xi_t = 1\} = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u, z)\,du$$

és

$$\mathbf{M}\{e^{iz\eta_t} \mid \xi_t = n\} = [\mathbf{M}\{e^{iz\eta_t} \mid \xi_t = 1\}]^n.$$

Így tehát

$$\Phi(t, z) = \exp\{-\lambda \int_0^t [1 - \varphi(u, z)]\, du\}.$$

Innen

$$\mathbf{M}\{\eta_t\} = -i\left\{\frac{d \log \Phi(t, z)}{dz}\right\}_{z=0} = \lambda \int_0^t \left[\int_0^\infty f(u, x)\, d\, H(x)\right] du$$

és

$$\mathbf{D}^2\{\eta_t\} = \left\{\frac{d^2 \log \Phi(t, z)}{dz^2}\right\}_{z=0} = \lambda \int_0^t \left[\int_0^\infty [f(u, x)]^2\ dH(x)\right] du.$$

Ha feltesszük, hogy $\int_0^\infty \left[\int_0^\infty |f(u,\ x)|\, dH(x)\right] du < \infty$, akkor megmutatható *Lévy* és *Cramér* karakterisztikus függvények konvergenciájára vonatkozó ismert tétele alapján, hogy $\lim_{t\to\infty} F(t, x) = F(x)$ határeloszlás létezik, és $F(x)$ karakterisztikus függvénye $\Phi(z) = \lim_{t\to\infty} \Phi(t, z)$. Ekkor definiálhatjuk az $\{\eta_t^*\}$ stacionárius folyamatot, amelyre

$$\mathbf{M}\{e^{iz\eta_t^*}\} = \Phi(z) = \exp\left\{-\lambda \int_0^\infty [1 - \varphi(u, z)]\, du\right\}.$$

$\Phi(z)$ megfordításával $F(x)$ egyértelműen meghatározható. Most

$$\mathbf{M}\{\eta_t^*\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u,\ x)\ dH(x)\right] du$$

és

$$\mathbf{D}^2\{\eta_t^*\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (f(u,\ x)]^2\ dH(x)\right] du,$$

amennyiben létezik.

28. Legyen $R(\tau) = \mathbf{R}\{\eta_{t-\tau}^*, \eta_t^*\}$. Ennek megállapítására tekintsük a $\Theta_t^* = \eta_t^* + \eta_{t-\tau}^*$ folyamatot. Ez a folyamat szintén stacionárius, és csupán abban különbözik η_t^*-tól, hogy $u = 0$ időpontban kezdődő áramlökés időbeli lefolyását nem $f(u, x)$, hanem $g(u, x) = f(u, x) + f(u - \tau, x)$ szolgáltatja. Ekkor pedig az előző feladat szerint felírható, hogy

$$\mathbf{D}^2\{\Theta_t^*\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty [f(u, x) + f(u - \tau, x)]^2\ dH(x)\right] du.$$

Másrészt $\Theta_t^* = \eta_t^* + \eta_{t-\tau}^*$ tekintetbe vételével felírható, hogy

$$\mathbf{D}^2\{\Theta_t^*\} = 2\,\mathbf{D}^2\{\eta_t^*\}\,[1 + R(\tau)].$$

A fenti képletek összevetéséből

$$R(\tau) = \frac{\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u, x)\, f(u-\tau, x)\, dH(x)\right] du}{\int_0^\infty \left[\int_0^\infty [f(u, x)]^2\, dH(x)\right] du}.$$

Most (26) szerint az $F(\omega)$ spektrális eloszlásfüggvényre fennáll, hogy

$$F'(\omega) = \frac{2\pi\lambda}{\sigma^2} \int_0^\infty |\, A\,(\omega, x)\,|^2\, dH(x),$$

ahol

$$\sigma^2 = \mathbf{D}^2\{\eta_t^*\} \quad \text{és} \quad A(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(u, x)\, e^{-i\omega u}\, du.$$

A fizikában az $\{\eta_t^*\}$ folyamat *spektrális függvényén* a

$$G(\nu) = m^2 + \sigma^2\,[F(2\pi\nu) - F(-2\pi\nu)]$$

függvényt értik, ahol $m = M\{\eta_t^*\}$. Ennek szemléletes jelentése a következő: ha az η_t^* áramot egységnyi ellenálláson vezetjük keresztül, úgy a leadott átlagteljesítmény

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{M}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \eta_t^{*2}\, dt\right\} = \mathbf{M}\{\eta_t^{*2}\} = m^2 + \sigma^2,$$

és ennek a teljesítménynek a $0 \leqq \nu < \infty$ frekvenciatartományra való eloszlását szolgáltataja $G(\nu)$, amely megadja a $(0, \nu)$ frekvenciasávban leadott teljesítményt. Esetünkben $G(0) = m^2$ és $0 < \nu < \infty$-re

$$G'(\nu) = 8\pi^2\lambda^2 \int_0^\infty |\, A(2\pi\nu, x)\,|^2\, dH(x).$$

29. A (27) és (28) formulák alkalmazásával

$$\mathbf{M}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta_t^*\, dt\right\} = \mathbf{M}\{\eta_t^*\} = m$$

és

$$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta_t^*\, dt\right\} = \frac{\sigma^2}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(u-v)\, du\, dv = \frac{2\sigma^2}{T^2}\int_0^T (T-\tau)\, R(\tau)\, d\tau.$$

30. Legyen a síkdiódának a lapok közötti távolsága d és az anódfeszültség U. Most $H(x) = 1$ (ha $x \geqq 0$), és legyen továbbá $f(u, 0) = f(u)$ egy $u = 0$ időpontban kilépő elektron által okozott áramlökés időbeli lefolyása. Erre fennáll

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{4\varepsilon}{\tau_0^2} u & \text{ha } 0 \leqq u \leqq \tau \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $\varepsilon = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ coul. az elektron töltése és $\tau_0 = 2\,d/\sqrt{2\,\varepsilon\,U/m}$, az elektron repülési ideje. Most

$$\mathbf{M}\{e^{iz\eta_t^*}\} = \Phi(z) = e^{-\lambda\tau_0} \exp \frac{\lambda\,\tau_0^2}{2\,iz\,\varepsilon}\,(e^{\frac{2iz\varepsilon}{\tau_0}} - 1)\,,$$

ahonnan

$$\mathbf{P}\{\eta_t^* \leqq x\} = F(x) = e^{-\lambda\tau_0} + \frac{e^{-\lambda\tau_0}\,\tau_0}{2\varepsilon} \int_0^x \sum_{j=0}^{\left[\frac{y\tau_0}{2\varepsilon}\right]} \frac{(-1)^j (\lambda\,\tau_0)^j}{j!} \frac{I_{j-1}\left(2i\sqrt{\lambda\,\tau_0\left(\frac{y\,\tau_0}{2\,\varepsilon} - j\right)}\right)}{\left(i\sqrt{\lambda\,\tau_0\left(\frac{y\,\tau_0}{2\,\varepsilon} - j\right)}\right)^{j-1}}\,dy,$$

ahol $I_\varrho(ix) = \left(\dfrac{ix}{2}\right)^\varrho \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(x/2)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+\varrho+1)}$ a Bessel-függvényt jelenti.

Most $\mathbf{M}\{\eta_t^*\} = \dfrac{\lambda}{\varepsilon}$. Legyen $\mathbf{M}\{\eta_t^*\} = I$, azaz $\lambda = I/\varepsilon$, akkor

$$\mathbf{D}\{\eta_t^*\} = \sqrt{\frac{4\varepsilon\,I}{3\,\tau_0}}$$

és

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{|\tau|}{\tau_0} + \dfrac{1}{2}\dfrac{|\tau|^3}{\tau_0^3} & \text{ha } 0 \leqq |\tau| \leqq \tau_0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A $G(\nu)$ spektrális eloszlásfüggvényre fennáll, hogy $G(0) = I^2$ és $0 < \nu < \infty$ értékekre

$$G'(\nu) = 8\,\varepsilon\,I\,\frac{2\,(1 - \cos\Theta) + \Theta\,(\Theta - 2\sin\Theta)}{\Theta^4} = 2\,\varepsilon\,I\left[1 - \frac{\Theta^2}{18} + \ldots\right],$$

ahol $\Theta = 2\,\pi\,\nu\,\tau_0$.

31.

$$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta_t^*\,dt\right\} = \begin{cases} \dfrac{4\,\varepsilon\,I}{3\,\tau_0}\left[1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{T}{\tau_0} + \dfrac{1}{20}\dfrac{T^3}{\tau_0^3}\right] & \text{ha } 0 \leqq T \leqq \tau_0 \\ \dfrac{4\,\varepsilon\,I}{3\,\tau_0}\left[\dfrac{3}{4}\dfrac{\tau_0}{T} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\tau_0}{T}\right)^2\right] & \text{ha } \tau_0 \leqq T < \infty. \end{cases}$$

32. Most felírható, hogy

$$\xi_t = \sum_{0 \leqq \tau_n \leqq t} \chi_n\,e^{-\alpha(t-\tau_n)},$$

ahol $\{\tau_n\}$ jelöli a POISSON-folyamat eseményeit, és a χ_n amplitudók egymástól független azonos eloszlású valószínűségi változók $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $\Phi(t, z) = \mathbf{M}\{e^{iz\xi_t}\}$ és $\psi(z) = \int_0^\infty e^{izx}\, dH(x)$. Jelölje a POISSON-folyamatban $(0, t)$ időközben előforduló események számát ν_t. A teljes várható érték tétel alapján felírható, hogy

$$\mathbf{M}\{e^{iz\xi_t}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_t = n\}\, \mathbf{M}\{e^{iz\xi_t} \mid \nu_t = n\}.$$

Most $\mathbf{P}\{\nu_t = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $\mathbf{M}\{e^{it\xi_t} \mid \nu_t = 0\}$ és a POISSON-folyamatok ismert sajátsága szerint (12. §. 7. feladat)

$$\mathbf{M}\{e^{it\xi_t} \mid \nu_t = n\} = [\mathbf{M}\{e^{it\xi_t} \mid \nu_t = 1\}]^n$$

és

$$\mathbf{M}\{e^{it\xi_t} \mid \nu_t = 1\} = \frac{1}{t}\int_0^t \psi(ze^{-au})\, du.$$

Így végül

$$\Phi(t, z) = \exp\left\{-\lambda \int_0^t [1 - \psi(ze^{-au})]\, du\right\}.$$

Mint láttuk (12. §. 30. feladat), ha $\int_0^\infty x\, dH(x) < \infty$, akkor $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_t \leqq x\} = F(x)$ létezik, és $F(x)$ karakterisztikus függvénye

$$\Phi(z) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{a}\int_0^1 \frac{1 - \psi(zx)}{x}\, dx\right\}.$$

Jelölje a regisztrálások időbeli sűrűségét stacionárius esetben a küszöbfeszültség mellett $f(a)$. Mivel Δt időtartam alatt a regisztrálás valószínűsége

$$\lambda\, \Delta t \int_0^a [1 - H(a - x)]\, dF(x) + o(\Delta t),$$

tehát

$$f(a) = \lambda\left[F(a) - \int_0^a H(a - x)\, dF(x)\right].$$

Ha speciálisan a feszültségimpulzusok amplitudói μ állandóval egyenlők, úgy

$$\Phi(z) = \frac{\exp\left\{-\frac{\lambda}{a}\int_0^\infty \frac{e^{izu}}{u}\, du\right\}}{(-iz\mu\gamma)^{\lambda/a}},$$

ahol $\gamma = e^C = 1{,}781\,072\ldots$, ($C = 0{,}577\,215\ldots$ az Euler-féle állandó). Innen

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)(\mu\gamma)^{\lambda/\alpha}}\left[x^{\lambda/\alpha} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{\mu}\right]} \frac{(-1)^n\,(\lambda/\alpha)^n}{n!} \int_{n\mu}^{x} (x-y)^{\lambda/\alpha} f_n(y)\,dy\right],$$

ahol

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < \mu \\ \dfrac{1}{x} & \text{ha } x \geqq \mu \end{cases}$$

és $f_n(x)$ ennek n-szeres konvolúciója. Ekkor a regisztrálások sűrűsége a küszöbfeszültség esetén

$$f(a) = \lambda\,[F(a) - F(a-\mu)].$$

33. Legyen $\gamma = \int_0^\infty x\,dG(x)$. Az *a)* esetben $\gamma = 1/\lambda$ és a *b)* esetben $\gamma = (1+\lambda\tau)/\lambda$. Ha $G(x)$ nem rácsos eloszlás, akkor az impulzusok időbeli sűrűsége $1/\gamma$. Egy impulzus azonban csak akkor lesz regisztrálva, ha érkezése előtt a bemenő ellenálláson a feszültség a-nál kisebb volt, és az impulzus hatására a fölé emelkedett. Ennek a valószínűsége $\int_0^a [1 - H(a-x)]\,dP(x)$, úgyhogy a regisztrálások időbeli sűrűsége a küszöbfeszültség esetén

$$f(a) = \frac{1}{\gamma}\left[P(a) - \int_0^a H(a-x)\,dP(x)\right].$$

AJÁNLOTT IRODALOM

Könyvek

N. Arley: On the Theory of Stochastic Processes and their Application to the Theory of Cosmic Radiation (New-York, 1943).

M. S. Bartlett: An Introduction to Stochastic Processes (Cambridge, 1955).

A. Blanc—Lapierre—R. Fortet: Théorie des Fonctions Aléatoires (Paris, 1953).

J. L. Doob: Stochastic processes (New-York, 1953).

W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications (New-York, 1950).

A. Khintchine: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Berlin, 1933).

A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Berlin, 1933).

P. Lévy: Processus Stochastiques et Mouvement Brownien (Paris, 1948).

В. И. Романовский: Дискретные цепи Маркова (Москва, 1949).

Т. А. Сарымсаков: Основы теории процессов Маркова (Москва, 1954).

Tudományos dolgozatok

D. Blackwell: A renewal theorem, Duke Math. Jour. 15 (1948) 145—151.

D. R. Cox and W. L. Smith: A direct proof of a fundamental theorem of renewal theory [Skand. Aktuarietidskr. 36 (1953) 139—150].

J. L. Doob: Renewal theory from the point of view of the theory of probability [Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 422—438].

J. L. Doob: Time series and harmonic analysis [Proc. Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. (1949) 303—343].

W. Feller: Zur Theorie der stochastischen Prozesse [Math. Annalen 113 (1936) 113—160].

W. Feller: On the integrodifferential equations of purely discontinuous Markoff processes [Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940) 488—511].

W. Feller: On the integral equation of renewal theory [Ann. Math. Stat. 12 (1941) 243—267].

W. Feller: Fluctuation theory of recurrent events. [Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949) 98—119].

W. Feller: On probability problems in the theory of counters [Courant Anniversary Volume, New-York (1948) 105—115].

W. Feller: On the theory of stochastic processes with particular reference to applications [Proc. Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. (1949) 403—432].

F. G. Foster: On the stochastic matrices associated with certain queuing processes [Ann. Math. Stat. 24 (1953) 355—360].

T. E. Harris: Some mathematical models for branching processes [Proc. Second Berkeley Symp. (1951) 305—327].

А. М. Яглом: Введение в теорию стационарных случайных функции [Успехи Мат. Наук 7 (1952) 3—168].

M. Kac: Random walk and the theory of Brownian motion [Amer. Math. Montly 54 (1947) 369—391].

A. Khintchine: Korrelationstheorie der stationär stochastischen Prozesse [Math. Annalen 109 (1934) 604—610].

A. Khintchine: Theorie des abklingenden Spontaneffektes [Bull. Acad. Sci. URSS Ser. Math. 3 (1938) 312—323].

А. Я. Хинчин: Математические методы теории массового обслуживания [Труды Мат. Инст. Стеклова XLIX (1955).]

D. G. Kendall: Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by method of the imbedded Markov chain [Ann. Math. Stat. 24 (1953) 338—354].

A. Kolmogoroff: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung [Math. Annalen 104 (1931) 415—458].

A. Kolmogoroff: Zur Theorie der Markoffschen Ketten [Math. Annalen 112 (1935—1936) 155—160].

Mogyoródi József—Németh Géza: Atommagreaktorokban végbemenő neutronlassítás-folyamattal kapcsolatos valószínűségszámítási problémákról [MTA Mat. Kut. Int. Közl. 1 (1956) 337—348].

Pál L.: A neutronok lelassításának néhány kérdéséről [MTA Mat. Kut. Int. Közl. 1 (1956) 41—54].

Rényi A.: Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására [MTA AMI Közl. 1 (1952) 105—138].

S. O. Rice: Mathematical analysis of random noise [Bell System Technical Journal 23 (1944) 282—332; 24 (1945) 46—156].

Takács L.: Poisson folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásáról [MTA III. O. K. 4 (1954) 473—504].

Takács L.: Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról [MTA III. O. K. 4 (1954) 571—587].

Takács L.: Várakozási idő problémák tárgyalása Markov-folyamatok segítségével [MTA III. O. K. 4 (1954) 543—570].

Takács L.: Elektroncsövek anódáram ingadozásának valószínűségszámítási tárgyalásáról [MTA III. O. K. 6 (1956) 27—51].

Takács L.: Részecskeszámlálóknál fellépő koincidencia problémákról [MTA AMI Közl. 2 (1953) 153—163].

Takács L.: Az általános valószínűségi tételről [MTA III. O. K. 5 (1955) 467—476].

Takács L.: Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról [MTA III. O. K. 6 (1956) 369—421].

Takács L.: Atommagreaktorok elméletével kapcsolatos néhány valószínűségszámítási kérdésről. [MTA Mat. Kut. Int. Közl. 1 (1956) 55—66].

L. Takács: On the generalization of Erlang's formula [Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956) 419—433].

L. Takács: On a stochastic process concerning some waiting time problems. [Теория вероятностей и ее применения 2 (1957).]

S. Täcklind: Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem [Skand. Aktuarietidskrift (1944) 1—15].

S. Täcklind: Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem [Skand. Aktuarietidskrift (1945) 68—105].

TÁBLÁZATOK

I.

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Jelölje ezt a kifejezést $A(n, k, p)$. A $p>0{,}5$ értékéhez tartozó $A(n, k, p)$ számértékeket a táblázat segítségével az $A(n, k, p) = A(n, n-k, 1-p)$ összefüggés alapján számíthatjuk ki.

p szerint történő lineáris interpoláció esetén legfeljebb két tizedesjegy lesz megbizható.

n	k	p 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4410	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1562
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0303	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0312
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1662	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461

I. táblázat folytatása

n	k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054
	2	0,0867	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269
	3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806
	4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611
	5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256
	6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005
12	0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,3413	0,3766	0,3012	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029
	2	0,0988	0,2301	0,2924	0,2835	0,2323	0,1678	0,1088	0,0639	0,0339	0,0161
	3	0,0173	0,0852	0,1720	0,2362	0,2581	0,2397	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537
	4	0,0021	0,0213	0,0683	0,1329	0,1936	0,2311	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208
	5	0,0002	0,0038	0,0193	0,0532	0,1032	0,1585	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934
	6	0,0000	0,0005	0,0040	0,0155	0,0401	0,0792	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0006	0,0033	0,0115	0,0291	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
13	0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1	0,3512	0,3672	0,2774	0,1787	0,1029	0,0540	0,0259	0,0113	0,0045	0,0016
	2	0,1109	0,2448	0,2937	0,2680	0,2059	0,1388	0,0836	0,0453	0,0220	0,0095
	3	0,0214	0,0997	0,1900	0,2457	0,2517	0,2181	0,1651	0,1107	0,0660	0,0349
	4	0,0028	0,0277	0,0838	0,1535	0,2097	0,2337	0,2222	0,1845	0,1350	0,0873
	5	0,0003	0,0055	0,0266	0,0691	0,1258	0,1803	0,2154	0,2214	0,1989	0,1571
	6	0,0000	0,0008	0,0063	0,0230	0,0559	0,1030	0,1546	0,1968	0,2169	0,2095
	7	0,0000	0,0001	0,0011	0,0058	0,0186	0,0442	0,0833	0,1312	0,1775	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0047	0,0142	0,0336	0,0656	0,1089	0,1571
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0034	0,0101	0,0243	0,0495	0,0873
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065	0,0162	0,0349
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0036	0,0095
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001
	1	0,3593	0,3559	0,2539	0,1539	0,0832	0,0407	0,0181	0,0073	0,0027	0,0009
	2	0,1229	0,2570	0,2912	0,2501	0,1802	0,1134	0,0634	0,0317	0,0141	0,0056
	3	0,0259	0,1142	0,2056	0,2501	0,2402	0,1943	0,1366	0,0845	0,0462	0,0222
	4	0,0037	0,0349	0,0998	0,1720	0,2202	0,2290	0,2022	0,1549	0,1040	0,0611

1. táblázat folytatása

n	k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	5	0,0004	0,0078	0,0352	0,0860	0,1468	0,1963	0,2178	0,2066	0,1701	0,1222
	6	0,0000	0,0013	0,0093	0,0322	0,0734	0,1262	0,1759	0,2066	0,2088	0,1833
	7	0,0000	0,0002	0,0019	0,0092	0,0280	0,0618	0,1082	0,1574	0,1952	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0082	0,0232	0,0510	0,0918	0,1396	0,1833
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0066	0,0183	0,0408	0,0762	0,1222
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0049	0,0136	0,0312	0,0611
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0033	0,0093	0,0222
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0056
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,3658	0,3432	0,2312	0,1319	0,0668	0,0305	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005
	2	0,1348	0,2669	0,2856	0,2309	0,1559	0,0916	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032
	3	0,0307	0,1285	0,2184	0,2501	0,2252	0,1700	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139
	4	0,0049	0,0428	0,1156	0,1876	0,2252	0,2186	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417
	5	0,0006	0,0105	0,0449	0,1032	0,1651	0,2061	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916
	6	0,0000	0,0019	0,0132	0,0430	0,0917	0,1472	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527
	7	0,0000	0,0003	0,0030	0,0138	0,0393	0,0811	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964
	8	0,0000	0,0000	0,0005	0,0035	0,0131	0,0348	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0034	0,0116	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0096	0,0245	0,0515	0,0916
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,3706	0,3294	0,2097	0,1126	0,0535	0,0228	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002
	2	0,1463	0,2745	0,2775	0,2111	0,1336	0,0732	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018
	3	0,0359	0,1423	0,2285	0,2463	0,2079	0,1465	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085
	4	0,0061	0,0514	0,1311	0,2001	0,2252	0,2040	0,1553	0,1014	0,0572	0,0278
	5	0,0008	0,0137	0,0555	0,1201	0,1802	0,2099	0,2008	0,1623	0,1123	0,0667
	6	0,0001	0,0028	0,0180	0,0550	0,1101	0,1649	0,1982	0,1983	0,1684	0,1222
	7	0,0000	0,0004	0,0045	0,0197	0,0524	0,1010	0,1524	0,1889	0,1969	0,1746
	8	0,0000	0,0001	0,0009	0,0055	0,0197	0,0487	0,0923	0,1417	0,1812	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0058	0,0185	0,0442	0,0840	0,1318	0,1746
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0018
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	0	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,3741	0,3150	0,1893	0,0957	0,0426	0,0169	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001
	2	0,1575	0,2800	0,2673	0,1914	0,1136	0,0581	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010
	3	0,0415	0,1556	0,2359	0,2393	0,1893	0,1245	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052
	4	0,0076	0,0605	0,1457	0,2093	0,2209	0,1868	0,1320	0,0796	0,0411	0,0182
	5	0,0010	0,0175	0,0668	0,1361	0,1914	0,2081	0,1849	0,1379	0,0875	0,0472
	6	0,0001	0,0039	0,0236	0,0680	0,1276	0,1784	0,1991	0,1839	0,1432	0,0944
	7	0,0000	0,0007	0,0065	0,0267	0,0668	0,1201	0,1685	0,1927	0,1841	0,1484
	8	0,0000	0,0001	0,0014	0,0084	0,0279	0,0644	0,1134	0,1606	0,1883	0,1855
	9	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	0,0093	0,0276	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0025	0,0095	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0026	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0081	0,0215	0,0472
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0021	0,0068	0,0182
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

I. táblázat folytatása

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3763	0,3002	0,1704	0,0811	0,0338	0,0126	0,0042	0,0012	0,0003	0,0001
	2	0,1683	0,2835	0,2556	0,1723	0,0958	0,0458	0,0190	0,0069	0,0022	0,0006
	3	0,0473	0,1680	0,2406	0,2297	0,1704	0,1046	0,0547	0,0246	0,0095	0,0031
	4	0,0093	0,0700	0,1592	0,2153	0,2130	0,1681	0,1104	0,0614	0,0291	0,0117
	5	0,0014	0,0218	0,0787	0,1507	0,1988	0,2017	0,1664	0,1146	0,0666	0,0327
	6	0,0002	0,0052	0,0301	0,0816	0,1436	0,1873	0,1941	0,1655	0,1181	0,0708
	7	0,0000	0,0010	0,0091	0,0350	0,0820	0,1376	0,1792	0,1892	0,1657	0,1214
	8	0,0000	0,0002	0,0022	0,0120	0,0376	0,0811	0,1327	0,1734	0,1864	0,1669
	9	0,0000	0,0000	0,0004	0,0033	0,0139	0,0386	0,0794	0,1284	0,1694	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0042	0,0149	0,0385	0,0771	0,1248	0,1669
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0046	0,0151	0,0374	0,0742	0,1214
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0047	0,0145	0,0354	0,0708
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0045	0,0134	0,0327
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0039	0,0117
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0031
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2852	0,1529	0,0685	0,0268	0,0093	0,0029	0,0008	0,0002	0,0000
	2	0,1787	0,2852	0,2428	0,1540	0,0803	0,0358	0,0138	0,0046	0,0013	0,0003
	3	0,0533	0,1796	0,2428	0,2182	0,1517	0,0869	0,0422	0,0175	0,0062	0,0018
	4	0,0112	0,0798	0,1714	0,2182	0,2023	0,1491	0,0909	0,0467	0,0203	0,0074
	5	0,0018	0,0266	0,0907	0,1636	0,2023	0,1916	0,1468	0,0933	0,0497	0,0222
	6	0,0002	0,0069	0,0374	0,0955	0,1574	0,1916	0,1844	0,1451	0,0949	0,0518
	7	0,0000	0,0014	0,0122	0,0443	0,0974	0,1525	0,1844	0,1797	0,1443	0,0961
	8	0,0000	0,0002	0,0032	0,0166	0,0487	0,0981	0,1489	0,1797	0,1771	0,1442
	9	0,0000	0,0000	0,0007	0,0051	0,0198	0,0514	0,0980	0,1464	0,1771	0,1762
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0013	0,0066	0,0220	0,0528	0,0976	0,1449	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0077	0,0233	0,0532	0,0970	0,1442
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0022	0,0083	0,0237	0,0529	0,0961
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0085	0,0233	0,0518
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0082	0,0222
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0074
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2702	0,1368	0,0576	0,0211	0,0068	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,1887	0,2852	0,2293	0,1369	0,0669	0,0278	0,0100	0,0031	0,0008	0,0002
	3	0,0596	0,1901	0,2428	0,2054	0,1339	0,0716	0,0323	0,0123	0,0040	0,0011
	4	0,0133	0,0898	0,1821	0,2182	0,1897	0,1304	0,0738	0,0350	0,0139	0,0046
	5	0,0022	0,0319	0,1028	0,1746	0,2023	0,1789	0,1272	0,0746	0,0365	0,0148
	6	0,0003	0,0089	0,0454	0,1091	0,1686	0,1916	0,1712	0,1244	0,0746	0,0370
	7	0,0000	0,0020	0,0160	0,0545	0,1124	0,1643	0,1844	0,1659	0,1221	0,0739
	8	0,0000	0,0004	0,0046	0,0222	0,0609	0,1144	0,1614	0,1797	0,1623	0,1201
	9	0,0000	0,0001	0,0011	0,0074	0,0271	0,0654	0,1158	0,1597	0,1771	0,1602
	10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	0,0099	0,0308	0,0686	0,1171	0,1593	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0030	0,0120	0,0336	0,0710	0,1185	0,1602
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0039	0,0136	0,0355	0,0727	0,1201
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0045	0,0146	0,0366	0,0739
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0049	0,0150	0,0370
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0148
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0046
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

II.

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Jelölje ezt a kifejezést $B(n, p, r)$. A $p > 0{,}5$ értékekhez tartozó $B(n, p, r)$ számértékeket a táblázat segítségével, a $B(n, p, r) = 1 - B(n, n-r+1, 1-p)$ összefüggés alapján számíthatjuk ki.

p szerint történő lineáris interpoláció esetén legfeljebb két tizedesjegy lesz megbízható

		p									
n	r	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
2	1	0,0975	0,1900	0,2775	0,3600	0,4375	0,5100	0,5775	0,6400	0,6975	0,7500
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	1	0,1426	0,2710	0,3859	0,4880	0,5781	0,6570	0,7254	0,7840	0,8336	0,8700
	2	0,0072	0,0280	0,0608	0,1040	0,1562	0,2160	0,2818	0,3520	0,4252	0,5000
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	1	0,1855	0,3439	0,4780	0,5904	0,6836	0,7599	0,8215	0,8704	0,9085	0,9375
	2	0,0140	0,0523	0,1095	0,1808	0,2617	0,3483	0,4370	0,5248	0,6090	0,6875
	3	0,0005	0,0037	0,0120	0,0272	0,0508	0,0837	0,1265	0,1792	0,2415	0,3125
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	1	0,2262	0,4095	0,5563	0,6723	0,7627	0,8319	0,8840	0,9222	0,9497	0,9688
	2	0,0226	0,0815	0,1648	0,2627	0,3672	0,4718	0,5716	0,6630	0,7438	0,8125
	3	0,0012	0,0086	0,0266	0,0579	0,1035	0,1631	0,2352	0,3174	0,4069	0,5000
	4	0,0000	0,0005	0,0022	0,0067	0,0156	0,0308	0,0540	0,0870	0,1312	0,1875
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	1	0,2649	0,4686	0,6229	0,7379	0,8220	0,8824	0,9246	0,9533	0,9723	0,9844
	2	0,0328	0,1143	0,2235	0,3446	0,4661	0,5798	0,6809	0,7667	0,8364	0,8906
	3	0,0022	0,0158	0,0473	0,0989	0,1694	0,2557	0,3529	0,4557	0,5585	0,6562
	4	0,0001	0,0013	0,0059	0,0170	0,0376	0,0705	0,1174	0,1792	0,2553	0,3438
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0046	0,0109	0,0223	0,0410	0,0692	0,1094
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	1	0,3017	0,5217	0,6794	0,7903	0,8665	0,9176	0,9510	0,9720	0,9848	0,9922
	2	0,0444	0,1497	0,2834	0,4233	0,5551	0,6706	0,7662	0,8414	0,8976	0,9375
	3	0,0038	0,0257	0,0738	0,1480	0,2436	0,3529	0,4677	0,5801	0,6836	0,7734
	4	0,0002	0,0027	0,0121	0,0333	0,0706	0,1260	0,1998	0,2898	0,3917	0,5000
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0047	0,0129	0,0288	0,0556	0,0963	0,1529	0,2266
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0038	0,0090	0,0188	0,0357	0,0625
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	1	0,3366	0,5695	0,7275	0,8322	0,8999	0,9424	0,9681	0,9832	0,9916	0,9961
	2	0,0572	0,1869	0,3428	0,4967	0,6329	0,7447	0,8309	0,8936	0,9368	0,9648
	3	0,0058	0,0381	0,1052	0,2031	0,3215	0,4482	0,5722	0,6846	0,7799	0,8555
	4	0,0004	0,0050	0,0214	0,0563	0,1138	0,1941	0,2936	0,4059	0,5230	0,6367
	5	0,0000	0,0004	0,0029	0,0104	0,0273	0,0580	0,1061	0,1737	0,2604	0,3633
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0042	0,0113	0,0253	0,0498	0,0885	0,1445
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0085	0,0181	0,0352
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	1	0,3698	0,6126	0,7684	0,8658	0,9249	0,9596	0,9793	0,9899	0,9954	0,9980
	2	0,0712	0,2252	0,4005	0,5638	0,6997	0,8040	0,8789	0,9295	0,9615	0,9805
	3	0,0084	0,0530	0,1409	0,2618	0,3993	0,5372	0,6627	0,7682	0,8505	0,9102
	4	0,0006	0,0083	0,0339	0,0856	0,1675	0,2703	0,3911	0,5174	0,6386	0,7461
	5	0,0000	0,0009	0,0056	0,0196	0,0489	0,0988	0,1717	0,2666	0,3786	0,5000
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0031	0,0100	0,0253	0,0536	0,0994	0,1658	0,2539
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0043	0,0112	0,0250	0,0498	0,0898
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0038	0,0091	0,0195
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	1	0,4013	0,6513	0,8031	0,8926	0,9437	0,9718	0,9865	0,9940	0,9975	0,9990
	2	0,0861	0,2639	0,4557	0,6242	0,7560	0,8507	0,9140	0,9536	0,9767	0,9893
	3	0,0115	0,0702	0,1798	0,3222	0,4744	0,6172	0,7384	0,8327	0,9004	0,9453
	4	0,0010	0,0128	0,0500	0,1209	0,2241	0,3504	0,4862	0,6177	0,7340	0,8281
	5	0,0001	0,0016	0,0099	0,0328	0,0781	0,1503	0,2485	0,3669	0,4956	0,6230

II. táblázat folytatása

n	r	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	6	0,0000	0,0001	0,0014	0,0064	0,0197	0,0473	0,0949	0,1662	0,2616	0,3770
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0035	0,0106	0,0260	0,0548	0,1020	0,1719
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0048	0,0123	0,0274	0,0547
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0017	0,0045	0,0107
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11	1	0,4312	0,6862	0,8327	0,9141	0,9578	0,9802	0,9912	0,9964	0,9986	0,9995
	2	0,1019	0,3026	0,5078	0,6779	0,8029	0,8870	0,9394	0,9698	0,9861	0,9941
	3	0,0152	0,0896	0,2212	0,3826	0,5448	0,6873	0,7999	0,8811	0,9348	0,9673
	4	0,0016	0,0185	0,0694	0,1611	0,2867	0,4304	0,5744	0,7037	0,8089	0,8867
	5	0,0001	0,0028	0,0159	0,0504	0,1146	0,2103	0,3317	0,4672	0,6029	0,7256
	6	0,0000	0,0003	0,0027	0,0117	0,0343	0,0782	0,1487	0,2465	0,3669	0,5000
	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0076	0,0216	0,0501	0,0994	0,1738	0,2744
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0122	0,0293	0,0610	0,1133
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0020	0,0059	0,0148	0,0327
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0022	0,0059
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005
12	1	0,4596	0,7176	0,8578	0,9313	0,9683	0,9862	0,9943	0,9978	0,9992	0,9998
	2	0,1184	0,3410	0,5565	0,7251	0,8416	0,9150	0,9576	0,9804	0,9917	0,9968
	3	0,0196	0,1109	0,2642	0,4417	0,6093	0,7472	0,8487	0,9166	0,9579	0,9807
	4	0,0022	0,0256	0,0922	0,2054	0,3512	0,5075	0,6533	0,7747	0,8655	0,9270
	5	0,0002	0,0043	0,0239	0,0726	0,1576	0,2763	0,4167	0,5618	0,6956	0,8062
	6	0,0000	0,0005	0,0046	0,0194	0,0544	0,1178	0,2127	0,3348	0,4731	0,6128
	7	0,0000	0,0001	0,0007	0,0039	0,0143	0,0386	0,0846	0,1582	0,2607	0,3872
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0095	0,0255	0,0573	0,1117	0,1938
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0017	0,0056	0,0153	0,0356	0,0730
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0028	0,0079	0,0193
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0011	0,0032
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
13	1	0,4867	0,7458	0,8791	0,9450	0,9762	0,9903	0,9963	0,9987	0,9996	0,9999
	2	0,1354	0,3787	0,6017	0,7664	0,8733	0,9363	0,9704	0,9874	0,9951	0,9983
	3	0,0245	0,1339	0,2704	0,4983	0,6674	0,7975	0,8868	0,9421	0,9731	0,9888
	4	0,0031	0,0342	0,0967	0,2527	0,4157	0,5794	0,7217	0,8314	0,9071	0,9539
	5	0,0003	0,0065	0,0260	0,0991	0,2060	0,3457	0,4995	0,6470	0,7721	0,8666
	6	0,0000	0,0009	0,0053	0,0300	0,0802	0,1654	0,2841	0,4256	0,5732	0,7095
	7	0,0000	0,0001	0,0013	0,0070	0,0243	0,0624	0,1295	0,2288	0,3563	0,5000
	8	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0056	0,0182	0,0462	0,0977	0,1788	0,2905
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0040	0,0126	0,0321	0,0698	0,1334
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0025	0,0078	0,0203	0,0461
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0013	0,0041	0,0112
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0017
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
14	1	0,5123	0,7712	0,8972	0,9560	0,9822	0,9932	0,9976	0,9992	0,9998	0,9999
	2	0,1530	0,4154	0,6433	0,8021	0,8990	0,9525	0,9795	0,9919	0,9971	0,9991
	3	0,0301	0,1584	0,3521	0,5519	0,7189	0,8392	0,9161	0,9602	0,9830	0,9935
	4	0,0042	0,0441	0,1465	0,3018	0,4787	0,6448	0,7795	0,8757	0,9368	0,9713
	5	0,0004	0,0092	0,0467	0,1298	0,2585	0,4158	0,5773	0,7207	0,8328	0,9102
	6	0,0000	0,0015	0,0115	0,0439	0,1117	0,2195	0,3595	0,5141	0,6627	0,7880
	7	0,0000	0,0002	0,0022	0,0116	0,0383	0,0933	0,1836	0,3075	0,4539	0,6047
	8	0,0000	0,0000	0,0003	0,0024	0,0103	0,0315	0,0753	0,1501	0,2586	0,3953
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0022	0,0083	0,0243	0,0583	0,1189	0,2120
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0060	0,0175	0,0426	0,0898
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0039	0,0114	0,0287
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	1	0,5367	0,7941	0,9126	0,9648	0,9866	0,9953	0,9984	0,9995	0,9999	1,0000
	2	0,1710	0,4510	0,6814	0,8329	0,9198	0,9647	0,9858	0,9948	0,9983	0,9995
	3	0,0362	0,1841	0,3958	0,6020	0,7639	0,8732	0,9383	0,9729	0,9893	0,9963
	4	0,0055	0,0556	0,1773	0,3518	0,5387	0,7031	0,8273	0,9095	0,9576	0,9824
	5	0,0006	0,0127	0,0617	0,1642	0,3135	0,4845	0,6481	0,7827	0,8796	0,9408

II. táblázat folytatása.

		p									
n	r	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	6	0,0001	0,0022	0,0168	0,0611	0,1484	0,2784	0,4357	0,5968	0,7392	0,8491
	7	0,0000	0,0003	0,0036	0,0181	0,0566	0,1311	0,2452	0,3902	0,5478	0,6964
	8	0,0000	0,0000	0,0006	0,0042	0,0173	0,0500	0,1132	0,2131	0,3465	0,5000
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0042	0,0152	0,0422	0,0950	0,1818	0,3036
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0037	0,0124	0,0338	0,0769	0,1509
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0028	0,0093	0,0255	0,0592
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0063	0,0176
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0011	0,0037
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	1	0,5599	0,8147	0,9257	0,9719	0,9900	0,9967	0,9990	0,9997	0,9999	1,0000
	2	0,1892	0,4853	0,7161	0,8593	0,9365	0,9739	0,9902	0,9967	0,9990	0,9997
	3	0,0429	0,2108	0,4386	0,6482	0,8029	0,9006	0,9549	0,9817	0,9934	0,9979
	4	0,0070	0,0684	0,2101	0,4019	0,5950	0,7541	0,8661	0,9349	0,9719	0,9894
	5	0,0009	0,0170	0,0791	0,2018	0,3698	0,5501	0,7108	0,8334	0,9147	0,9616
	6	0,0001	0,0033	0,0235	0,0817	0,1897	0,3402	0,5100	0,6712	0,8024	0,8949
	7	0,0000	0,0005	0,0056	0,0267	0,0796	0,1753	0,3119	0,4728	0,6340	0,7228
	8	0,0000	0,0001	0,0011	0,0070	0,0271	0,0744	0,1594	0,2839	0,4371	0,5982
	9	0,0000	0,0000	0,0002	0,0015	0,0075	0,0257	0,0671	0,1423	0,2559	0,4018
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0016	0,0071	0,0229	0,0583	0,1241	0,2272
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0016	0,0062	0,0191	0,0486	0,1051
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0149	0,0384
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0035	0,0106
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	1	0,5819	0,8332	0,9369	0,9775	0,9925	0,9977	0,9993	0,9998	1,0000	1,0000
	2	0,2078	0,5182	0,7475	0,8818	0,9499	0,9807	0,9933	0,9979	0,9994	0,9999
	3	0,0503	0,2382	0,4802	0,6904	0,8363	0,9226	0,9673	0,9877	0,9959	0,9988
	4	0,0088	0,0826	0,2444	0,4511	0,6470	0,7981	0,8972	0,9536	0,9816	0,9936
	5	0,0012	0,0221	0,0987	0,2418	0,4261	0,6113	0,7652	0,8740	0,9404	0,9755
	6	0,0001	0,0047	0,0319	0,1057	0,2347	0,4032	0,5803	0,7361	0,8529	0,9283
	7	0,0000	0,0008	0,0083	0,0377	0,1071	0,2248	0,3812	0,5522	0,7098	0,8338
	8	0,0000	0,0001	0,0017	0,0109	0,0402	0,1046	0,2128	0,3595	0,5257	0,6855
	9	0,0000	0,0000	0,0003	0,0026	0,0124	0,0403	0,0994	0,1989	0,3374	0,5000
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0031	0,0127	0,0383	0,0919	0,1834	0,3145
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0032	0,0120	0,0348	0,0826	0,1662
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0106	0,0301	0,0717
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0025	0,0086	0,0245
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0064
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18	1	0,6028	0,8499	0,9464	0,9820	0,9944	0,9984	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000
	2	0,2265	0,5497	0,7759	0,9009	0,9605	0,9858	0,9954	0,9987	0,9997	0,9999
	3	0,0581	0,2662	0,5203	0,7287	0,8647	0,9400	0,9764	0,9918	0,9975	0,9993
	4	0,0109	0,0982	0,2798	0,4990	0,6943	0,8354	0,9217	0,9672	0,9880	0,9962
	5	0,0015	0,0282	0,1206	0,2836	0,4813	0,6673	0,8114	0,9058	0,9589	0,9846
	6	0,0002	0,0064	0,0419	0,1329	0,2825	0,4656	0,6450	0,7912	0,8923	0,9519
	7	0,0000	0,0012	0,0118	0,0513	0,1390	0,2783	0,4509	0,6257	0,7742	0,8811
	8	0,0000	0,0002	0,0027	0,0163	0,0569	0,1407	0,2717	0,4366	0,6085	0,7597
	9	0,0000	0,0000	0,0005	0,0043	0,0193	0,0596	0,1391	0,2632	0,4222	0,5927
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0054	0,0210	0,0597	0,1347	0,2527	0,4073
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0061	0,0212	0,0576	0,1280	0,2403
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0062	0,0203	0,0537	0,1189
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0058	0,0183	0,0481
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0154
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0038

11. táblázat folytatása

n	r	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
19	1	0,6226	0,8649	0,9544	0,9856	0,9958	0,9989	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000
	2	0,2453	0,5797	0,8015	0,9171	0,9690	0,9896	0,9969	0,9992	0,9998	1,0000
	3	0,0665	0,2946	0,5587	0,7631	0,8887	0,9538	0,9830	0,9945	0,9985	0,9996
	4	0,0132	0,1150	0,3159	0,5449	0,7369	0,8668	0,9409	0,9770	0,9923	0,9978
	5	0,0020	0,0352	0,1444	0,3267	0,5346	0,7178	0,8500	0,9304	0,9720	0,9904
	6	0,0002	0,0086	0,0537	0,1631	0,3322	0,5261	0,7032	0,8371	0,9223	0,9682
	7	0,0000	0,0017	0,0163	0,0676	0,1749	0,3345	0,5188	0,6919	0,8273	0,9165
	8	0,0000	0,0003	0,0041	0,0233	0,0775	0,1820	0,3344	0,5122	0,6831	0,8204
	9	0,0000	0,0000	0,0008	0,0067	0,0287	0,0839	0,1855	0,3325	0,5060	0,6762
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0089	0,0326	0,0875	0,1861	0,3290	0,5000
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0023	0,0105	0,0347	0,0885	0,1841	0,3238
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0028	0,0114	0,0352	0,0871	0,1796
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0031	0,0116	0,0342	0,0835
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0031	0,0109	0,0318
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0096
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	1	0,6415	0,8784	0,9612	0,9885	0,9968	0,9992	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000
	2	0,2642	0,6083	0,8244	0,9308	0,9757	0,9924	0,9979	0,9995	0,9999	1,0000
	3	0,0755	0,3231	0,5951	0,7939	0,9087	0,9645	0,9879	0,9964	0,9991	0,9998
	4	0,0159	0,1330	0,3523	0,5886	0,7748	0,8929	0,9556	0,9840	0,9951	0,9987
	5	0,0026	0,0432	0,1702	0,3704	0,5852	0,7625	0,8818	0,9490	0,9811	0,9941
	6	0,0003	0,0113	0,0673	0,1958	0,3828	0,5836	0,7546	0,8744	0,9447	0,9793
	7	0,0000	0,0024	0,0219	0,0867	0,2142	0,3920	0,5834	0,7500	0,8701	0,9423
	8	0,0000	0,0004	0,0059	0,0321	0,1018	0,2277	0,3990	0,5841	0,7480	0,8684
	9	0,0000	0,0001	0,0013	0,0100	0,0409	0,1133	0,2376	0,4044	0,5857	0,7483
	10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0026	0,0139	0,0480	0,1218	0,2447	0,4086	0,5881
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0039	0,0171	0,0532	0,1275	0,2493	0,4119
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0051	0,0196	0,0565	0,1308	0,2517
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0060	0,0210	0,0580	0,1316
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0065	0,0214	0,0577
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0016	0,0064	0,0207
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0059
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

III.

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

	λ									
k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,367
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,367
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,183
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0:0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

	λ									
k	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

	λ									
k	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

	λ									
k	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1734	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

III. táblázat folytatása

	λ									
k	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0280	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0014	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

	λ									
k	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	0,0225	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149
2	0,0793	0,0746	0,0701	0,0659	0,0618	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446
3	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	0,1133	0,1082	0,1033	0,0985	0,0938	0,0892
4	0,1719	0,1681	0,1641	0,1600	0,1558	0,1515	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339
5	0,1752	0,1748	0,1740	0,1728	0,1714	0,1697	0,1678	0,1656	0,1632	0,1606
6	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	0,1571	0,1584	0,1594	0,1601	0,1605	0,1606
7	0,1086	0,1125	0,1163	0,1200	0,1234	0,1267	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377
8	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	0,0849	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033
9	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	0,0519	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0688
10	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	0,0285	0,0309	0,0334	0,0359	0,0386	0,0413
11	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	0,0143	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225
12	0,0039	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0102	0,0113
13	0,0015	0,0018	0,0021	0,0024	0,0028	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052
14	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0022
15	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

	λ									
k	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
1	0,0137	0,0126	0,0116	0,0106	0,0098	0,0090	0,0082	0,0076	0,0070	0,0064
2	0,0417	0,0390	0,0364	0,0340	0,0318	0,0296	0,0276	0,0258	0,0240	0,0223
3	0,0848	0,0806	0,0765	0,0726	0,0688	0,0652	0,0617	0,0584	0,0552	0,0521
4	0,1294	0,1249	0,1205	0,1162	0,1118	0,1076	0,1034	0,0992	0,0952	0,0912
5	0,1579	0,1549	0,1519	0,1487	0,1454	0,1420	0,1385	0,1349	0,1314	0,1277
6	0,1605	0,1601	0,1595	0,1586	0,1575	0,1562	0,1546	0,1529	0,1511	0,1490
7	0,1399	0,1418	0,1435	0,1450	0,1462	0,1472	0,1480	0,1486	0,1489	0,1490
8	0,1066	0,1099	0,1130	0,1160	0,1188	0,1215	0,1240	0,1263	0,1284	0,1304
9	0,0723	0,0757	0,0791	0,0825	0,0858	0,0891	0,0923	0,0954	0,0985	0,1014
10	0,0441	0,0469	0,0498	0,0528	0,0558	0,0588	0,0618	0,0649	0,0679	0,0710
11	0,0245	0,0265	0,0285	0,0307	0,0330	0,0353	0,0377	0,0401	0,0426	0,0452
12	0,0124	0,0137	0,0150	0,0164	0,0179	0,0194	0,0210	0,0227	0,0245	0,0264
13	0,0058	0,0065	0,0073	0,0081	0,0089	0,0098	0,0108	0,0119	0,0130	0,0142
14	0,0025	0,0029	0,0033	0,0037	0,0041	0,0046	0,0052	0,0058	0,0064	0,0071
15	0,0010	0,0012	0,0014	0,0016	0,0018	0,0020	0,0023	0,0026	0,0029	0,0033
16	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013	0,0014
17	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006
18	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

III. táblázat folytatása

						λ				
k	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
1	0,0059	0,0054	0,0049	0,0045	0,0041	0,0038	0,0035	0,0032	0,0029	0,0027
2	0,0208	0,0194	0,0180	0,0167	0,0156	0,0145	0,0134	0,0125	0,0116	0,0107
3	0,0492	0,0464	0,0438	0,0413	0,0389	0,0366	0,0345	0,0324	0,0305	0,0286
4	0,0874	0,0836	0,0799	0,0764	0,0729	0,0696	0,0663	0,0632	0,0602	0,0573
5	0,1241	0,1204	0,1167	0,1130	0,1094	0,1057	0,1021	0,0986	0,0951	0,0916
6	0,1468	0,1445	0,1420	0,1394	0,1367	0,1339	0,1311	0,1282	0,1252	0,1221
7	0,1489	0,1486	0,1481	0,1474	0,1465	0,1454	0,1442	0,1428	0,1413	0,1396
8	0,1321	0,1337	0,1351	0,1363	0,1373	0,1382	0,1388	0,1392	0,1395	0,1396
9	0,1042	0,1070	0,1096	0,1121	0,1144	0,1167	0,1187	0,1207	0,1224	0,1241
10	0,0740	0,0770	0,0800	0,0829	0,0858	0,0887	0,0914	0,0941	0,0967	0,0993
11	0,0478	0,0504	0,0531	0,0558	0,0585	0,0613	0,0640	0,0667	0,0695	0,0722
12	0,0283	0,0303	0,0323	0,0344	0,0366	0,0388	0,0411	0,0434	0,0457	0,0481
13	0,0154	0,0168	0,0181	0,0196	0,0211	0,0227	0,0243	0,0260	0,0278	0,0296
14	0,0078	0,0086	0,0095	0,0104	0,0113	0,0123	0,0134	0,0145	0,0157	0,0169
15	0,0037	0,0041	0,0046	0,0051	0,0057	0,0062	0,0069	0,0075	0,0083	0,0090
16	0,0016	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0030	0,0033	0,0037	0,0041	0,0045
17	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0012	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021
18	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
19	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004
20	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001

						λ				
k	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0016	0,0014	0,0013	0,0012	0,0011
2	0,0100	0,0092	0,0086	0,0079	0,0074	0,0068	0,0063	0,0058	0,0054	0,0050
3	0,0269	0,0252	0,0237	0,0222	0,0208	0,0195	0,0183	0,0171	0,0160	0,0150
4	0,0544	0,0517	0,0491	0,0466	0,0443	0,0420	0,0398	0,0377	0,0357	0,0337
5	0,0882	0,0849	0,0816	0,0784	0,0752	0,0722	0,0692	0,0663	0,0635	0,0607
6	0,1191	0,1160	0,1128	0,1097	0,1066	0,1034	0,1003	0,0972	0,0941	0,0911
7	0,1378	0,1358	0,1338	0,1317	0,1294	0,1271	0,1247	0,1222	0,1197	0,1171
8	0,1395	0,1392	0,1388	0,1382	0,1375	0,1365	0,1355	0,1344	0,1332	0,1318
9	0,1256	0,1269	0,1280	0,1290	0,1299	0,1306	0,1311	0,1315	0,1317	0,1318
10	0,1017	0,1040	0,1063	0,1084	0,1104	0,1123	0,1140	0,1157	0,1172	0,1186
11	0,0749	0,0776	0,0802	0,0828	0,0853	0,0878	0,0902	0,0925	0,0948	0,0970
12	0,0505	0,0530	0,0555	0,0579	0,0604	0,0629	0,0654	0,0679	0,0703	0,0728
13	0,0315	0,0334	0,0354	0,0374	0,0395	0,0416	0,0438	0,0459	0,0481	0,0504
14	0,0182	0,0196	0,0210	0,0225	0,0240	0,0256	0,0272	0,0289	0,0306	0,0324
15	0,0098	0,0107	0,0116	0,0126	0,0136	0,0147	0,0158	0,0169	0,0182	0,0194
16	0,0050	0,0055	0,0060	0,0066	0,0072	0,0078	0,0086	0,0093	0,0101	0,0109
17	0,0024	0,0026	0,0029	0,0033	0,0036	0,0040	0,0044	0,0048	0,0053	0,0058
18	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0029
19	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014
20	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006
21	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

						λ				
k	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
2	0,0046	0,0043	0,0040	0,0037	0,0034	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023
3	0,0140	0,0131	0,0123	0,0115	0,0107	0,0100	0,0093	0,0087	0,0081	0,0076
4	0,0319	0,0302	0,0285	0,0269	0,0254	0,0240	0,0226	0,0213	0,0201	0,0189
5	0,0581	0,0555	0,0530	0,0506	0,0483	0,0460	0,0439	0,0418	0,0398	0,0378
6	0,0881	0,0851	0,0822	0,0793	0,0764	0,0736	0,0709	0,0682	0,0656	0,0631
7	0,1145	0,1118	0,1091	0,1064	0,1037	0,1010	0,0982	0,0955	0,0928	0,0901
8	0,1302	0,1286	0,1269	0,1251	0,1232	0,1212	0,1191	0,1170	0,1148	0,1126
9	0,1317	0,1315	0,1311	0,1306	0,1300	0,1293	0,1284	0,1274	0,1263	0,1251

III. táblázat folytatása

	λ									
k	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
10	0,1198	0,1210	0,1219	0,1228	0,1235	0,1241	0,1245	0,1249	0,1250	0,1251
11	0,0991	0,1012	0,1031	0,1049	0,1067	0,1083	0,1098	0,1112	0,1125	0,1137
12	0,0752	0,0776	0,0799	0,0822	0,0844	0,0866	0,0888	0,0908	0,0928	0,0948
13	0,0526	0,0549	0,0572	0,0594	0,0617	0,0640	0,0662	0,0685	0,0707	0,0729
14	0,0342	0,0361	0,0380	0,0399	0,0419	0,0439	0,0459	0,0479	0,0500	0,0521
15	0,0208	0,0221	0,0235	0,0250	0,0265	0,0281	0,0297	0,0313	0,0330	0,0347
16	0,0118	0,0127	0,0137	0,0147	0,0157	0,0168	0,0180	0,0192	0,0204	0,0217
17	0,0063	0,0069	0,0075	0,0081	0,0088	0,0095	0,0103	0,0111	0,0119	0,0128
18	0,0032	0,0035	0,0039	0,0042	0,0046	0,0051	0,0055	0,0060	0,0065	0,0071
19	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0026	0,0028	0,0031	0,0034	0,0037
20	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019
21	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
22	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
23	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

	λ									
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0224	0,0127	0,0070	0,0037	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	00,001
6	0,0411	0,0255	0,0152	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0004	0,0002
7	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,0060	0,0034	0,0018	0,0010	0,0005
8	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0024	0,0013
9	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0050	0,0029
10	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0095	0,0058
11	0,1194	0,1144	0,1015	0,0844	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0164	0,0106
12	0,1094	0,1144	0,1099	0,0984	0,0829	0,0661	0,0504	0,0368	0,0259	0,0176
13	0,0926	0,1056	0,1099	0,1060	0,0956	0,0814	0,0658	0,0509	0,0378	0,0271
14	0,0728	0,0905	0,1021	0,1060	0,1024	0,0930	0,0800	0,0655	0,0514	0,0387
15	0,0534	0,0724	0,0885	0,0989	0,1024	0,0992	0,0906	0,0786	0,0650	0,0516
16	0,0367	0,0543	0,0719	0,0866	0,0960	0,0992	0,0963	0,0884	0,0772	0,0646
17	0,0237	0,0383	0,0550	0,0713	0,0847	0,0934	0,0963	0,0936	0,0863	0,0760
18	0,0145	0,0256	0,0397	0,0554	0,0706	0,0830	0,0909	0,0936	0,0911	0,0844
19	0,0084	0,0161	0,0272	0,0409	0,0557	0,0699	0,0814	0,0887	0,0911	0,0888
20	0,0046	0,0097	0,0177	0,0286	0,0418	0,0559	0,0692	0,0798	0,0866	0,0888
21	0,0024	0,0055	0,0109	0,0191	0,0299	0,0426	0,0560	0,0684	0,0783	0,0846
22	0,0012	0,0030	0,0065	0,0121	0,0204	0,0310	0,0433	0,0560	0,0676	0,0769
23	0,0006	0,0016	0,0037	0,0074	0,0133	0,0216	0,0320	0,0438	0,0559	0,0669
24	0,0003	0,0008	0,0020	0,0043	0,0083	0,0144	0,0226	0,0328	0,0442	0,0557
25	0,0001	0,0004	0,0010	0,0024	0,0050	0,0092	0,0154	0,0237	0,0336	0,0446
26	0,0000	0,0002	0,0005	0,0013	0,0029	0,0057	0,0101	0,0164	0,0246	0,0343
27	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0034	0,0063	0,0109	0,0173	0,0254
28	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	0,0019	0,0038	0,0070	0,0117	0,0181
29	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0011	0,0023	0,0044	0,0077	0,0125
30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0026	0,0049	0,0083
31	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0030	0,0054
32	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0034
33	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0020
34	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0012
35	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007
36	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
37	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
38	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
39	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

IV.

$$\sum_{k=r}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{\lambda} t^{r-1} e^{-t}\, dt$$

r \ λ	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,01
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1	0,000999	0,001988	0,002995	0,003992	0,004987	0,005982	0,006976	0,007968	0,008960	0,009950
2	0,000001	0,000002	0,000005	0,000008	0,000013	0,000018	0,000024	0,000032	0,000040	0,000050

r \ λ	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1	0,019801	0,029555	0,039211	0,048771	0,058236	0,067606	0,076884	0,086069	0,095163
2	0,000197	0,000441	0,000779	0,001209	0,001730	0,002339	0,003034	0,003815	0,004679
3	0,000002	0,000004	0,000010	0,000020	0,000034	0,000054	0,000080	0,000114	0,000155
4						0,000001	0,000002	0,000002	0,000003

r \ λ	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1	0,104166	0,113080	0,121905	0,130642	0,139292	0,147856	0,156335	0,164730	0,173041	0,181269
2	0,005624	0,006649	0,007752	0,008932	0,010186	0,011513	0,012912	0,014381	0,015919	0,017523
3	0,000204	0,000263	0,000332	0,000412	0,000503	0,000606	0,000721	0,000850	0,000992	0,001149
4	0,000006	0,000008	0,000011	0,000014	0,000018	0,000024	0,000031	0,000038	0,000047	0,000057
5					0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001

r \ λ	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,3
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1	0,189416	0,197481	0,205466	0,213372	0,221199	0,228948	0,236621	0,244216	0,251736	0,259182
2	0,019193	0,020927	0,022724	0,024581	0,026499	0,028475	0,030508	0,032597	0,034740	0,036936
3	0,001320	0,001506	0,001708	0,001927	0,002162	0,002414	0,002683	0,002970	0,003276	0,003600
4	0,000069	0,000082	0,000097	0,000114	0,000133	0,000155	0,000179	0,000205	0,000234	0,000266
5	0,000003	0,000004	0,000004	0,000005	0,000007	0,000008	0,000010	0,000011	0,000013	0,000016
6								0,000001	0,000001	0,000001

r \ λ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1	0,329680	0,393469	0,451188	0,503415	0,550671	0,593430	0,632121
2	0,061551	0,090204	0,121901	0,155805	0,191208	0,227518	0,264241
3	0,007926	0,014388	0,023115	0,034142	0,047423	0,062857	0,080301
4	0,000776	0,001752	0,003358	0,005753	0,009080	0,013459	0,018988
5	0,000061	0,000172	0,000394	0,000786	0,001411	0,002344	0,003660
6	0,000004	0,000014	0,000039	0,000090	0,000184	0,000343	0,000594
		0,000001	0,000003	0,000009	0,000021	0,000043	0,000083
				0,000001	0,000002	0,000005	0,000010
							0,000001

r \ λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,6671	0,6988	0,7275	0,7534	0,7769	0,7981	0,8173	0,8347	0,8504	0,8647
2	0,3010	0,3374	0,3732	0,4082	0,4422	0,4751	0,5068	0,5372	0,5663	0,5940
3	0,0996	0,1205	0,1429	0,1665	0,1912	0,2166	0,2428	0,2694	0,2963	0,3233
4	0,0257	0,0338	0,0431	0,0537	0,0656	0,0788	0,0932	0,1087	0,1253	0,1429
5	0,0054	0,0077	0,0107	0,0143	0,0186	0,0237	0,0296	0,0364	0,0441	0,0527
6	0,0010	0,0015	0,0022	0,0032	0,0045	0,0060	0,0080	0,0104	0,0132	0,0166
7	0,0001	0,0003	0,0004	0,0006	0,0009	0,0013	0,0019	0,0026	0,0034	0,0045
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0008	0,0011
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002

IV. táblázat folytatása

r	λ = 2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,8775	0,8892	0,8997	0,9093	0,9179	0,9257	0,9326	0,9392	0,9450	0,9502
2	0,6204	0,6454	0,6691	0,6916	0,7127	0,7326	0,7513	0,7689	0,7854	0,8009
3	0,3504	0,3773	0,4040	0,4303	0,4562	0,4816	0,5064	0,5305	0,5540	0,5768
4	0,1614	0,1806	0,2007	0,2213	0,2424	0,2640	0,2859	0,3081	0,3304	0,3528
5	0,0621	0,0725	0,0838	0,0959	0,1088	0,1226	0,1371	0,1523	0,1682	0,1847
6	0,0204	0,0249	0,0300	0,0357	0,0420	0,0490	0,0567	0,0651	0,0742	0,0839
7	0,0059	0,0075	0,0094	0,0116	0,0142	0,0172	0,0206	0,0244	0,0287	0,0335
8	0,0015	0,0020	0,0026	0,0033	0,0042	0,0053	0,0066	0,0081	0,0099	0,0119
9	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009	0,0011	0,0015	0,0019	0,0024	0,0031	0,0038
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001

r	λ = 3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,9550	0,9592	0,9631	0,9666	0,9698	0,9727	0,9753	0,9776	0,9798	0,9817
2	0,8153	0,8288	0,8414	0,8532	0,8641	0,8743	0,8838	0,8926	0,9008	0,9084
3	0,5988	0,6201	0,6406	0,6603	0,6792	0,6973	0,7146	0,7311	0,7469	0,7619
4	0,3752	0,3975	0,4197	0,4416	0,4634	0,4848	0,5058	0,5265	0,5468	0,5665
5	0,2018	0,2194	0,2374	0,2558	0,2746	0,2936	0,3128	0,3322	0,3 16	0,3712
6	0,0943	0,1054	0,1171	0,1295	0,1424	0,1559	0,1699	0,1844	0,1994	0,2149
7	0,0388	0,0446	0,0510	0,0579	0,0653	0,0733	0,0818	0,0909	0,1005	0,1107
8	0,0142	0,0168	0,0198	0,0231	0,0267	0,0308	0,0352	0,0401	0,0454	0,0511
9	0,0047	0,0057	0,0069	0,0083	0,0099	0,0117	0,0137	0,0160	0,0185	0,0214
10	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027	0,0033	0,0040	0,0048	0,0058	0,0069	0,0081
11	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028
12	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001

r	λ = 4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,9834	0,9850	0,9864	0,9877	0,9889	0,9899	0,9909	0,9918	0,9926	0,9933
2	0,9155	0,9220	0,9281	0,9337	0,9389	0,9437	0,9482	0,9523	0,9561	0,9596
3	0,7762	0,7898	0,8026	0,8149	0,8264	0,8374	0,8477	0,8575	0,8667	0,8753
4	0,5858	0,6046	0,6228	0,6406	0,6577	0,6743	0,6903	0,7058	0,7207	0,7350
5	0,3907	0,4102	0,4296	0,4488	0,4679	0,4868	0,5054	0,5237	0,5418	0,5595
6	0,2307	0,2469	0,2633	0,2801	0,2971	0,3142	0,3316	0,3490	0,3665	0,3840
7	0,1214	0,1325	0,1442	0,1564	0,1689	0,1820	0,1954	0,2092	0,2233	0,2378
8	0,0573	0,0639	0,0710	0,0786	0,0866	0,0951	0,1040	0,1133	0,1231	0,1334
9	0,0245	0,0279	0,0317	0,0358	0,0403	0,0451	0,0503	0,0558	0,0618	0,0681
10	0,0095	0,0111	0,0129	0,0149	0,0171	0,0195	0,0222	0,0251	0,0283	0,0318
11	0,0034	0,0041	0,0048	0,0057	0,0067	0,0078	0,0090	0,0104	0,0120	0,0137
12	0,0011	0,0014	0,0017	0,0020	0,0024	0,0029	0,0034	0,0040	0,0047	0,0055
13	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0008	0,0010	0,0012	0,0014	0,0017	0,0020
14	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00001	0,0001

r	λ = 5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,9939	0,9945	0,9950	0,9955	0,9959	0,9963	0,9967	0,9970	0,9973	0,9975
2	0,9628	0,9658	0,9686	0,9711	0,9734	0,9756	0,9776	0,9794	0,9811	0,9826
3	0,8835	0,8912	0,8984	0,9052	0,9116	0,9176	0,9232	0,9285	0,9334	0,9380
4	0,7487	0,7619	0,7746	0,7867	0,7983	0,8094	0,8200	0,8300	0,8396	0,8488

IV. táblázat folytatása

r \ λ	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
5	0,5769	0,5939	0,6105	0,6267	0,6425	0,6579	0,6728	0,6873	0,7013	0,7149
6	0,4016	0,4191	0,4365	0,4539	0,4711	0,4881	0,5050	0,5217	0,5381	0,5543
7	0,2526	0,2676	0,2829	0,2983	0,3140	0,3297	0,3456	0,3616	0,3776	0,3937
8	0,1440	0,1551	0,1665	0,1783	0,1905	0,2030	0,2159	0,2290	0,2424	0,2560
9	0,0748	0,0819	0,0894	0,0974	0,1056	0,1143	0,1234	0,1328	0,1426	0,1528
10	0,0356	0,0397	0,0441	0,0488	0,0538	0,0591	0,0648	0,0708	0,0772	0,0839
11	0,0156	0,0177	0,0200	0,0225	0,0253	0,0282	0,0314	0,0349	0,0386	0,0426
12	0,0063	0,0073	0,0084	0,0096	0,0110	0,0125	0,0141	0,0160	0,0179	0,0201
13	0,0024	0,0028	0,0033	0,0038	0,0045	0,0051	0,0059	0,0068	0,0078	0,0088
14	0,0008	0,0010	0,0012	0,0014	0,0017	0,0020	0,0023	0,0027	0,0031	0,0036
15	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0010	0,0012	0,0014
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

r \ λ	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,9978	0,9980	0,9982	0,9983	0,9985	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991
2	0,9841	0,9854	0,9866	0,9877	0,9887	0,9897	0,9905	0,9913	0,9920	0,9927
3	0,9423	0,9464	0,9502	0,9537	0,9570	0,9600	0,9629	0,9656	0,9180	0,9704
4	0,8575	0,8658	0,8736	0,8811	0,8882	0,8948	0,9012	0,9072	0,9129	0,9182
5	0,7281	0,7408	0,7531	0,7649	0,7763	0,7873	0,7978	0,8080	0,8177	0,8270
6	0,5702	0,5859	0,6012	0,6163	0,6310	0,6453	0,6594	0,6730	0,6864	0,6993
7	0,4098	0,4258	0,4418	0,4577	0,4735	0,4892	0,5047	0,5101	0,5353	0,5503
8	0,2699	0,2840	0,2983	0,3127	0,3272	0,3419	0,3567	0,3715	0,3864	0,4013
9	0,1633	0,1741	0,1852	0,1967	0,2084	0,2204	0,2327	0,2452	0,2580	0,2709
10	0,0910	0,0984	0,1061	0,1142	0,1226	0,1314	0,1404	0,1498	0,1505	0,1695
11	0,0469	0,0514	0,0563	0,0614	0,0668	0,0726	0,0786	0,0849	0,0916	0,0985
12	0,0224	0,0250	0,0277	0,0307	0,0339	0,0373	0,0409	0,0448	0,0490	0,0534
13	0,0100	0,0113	0,0127	0,0143	0,0160	0,0179	0,0199	0,0221	0,0245	0,0270
14	0,0042	0,0048	0,0055	0,0063	0,0071	0,0080	0,0091	0,0102	0,0115	0,0128
15	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034	0,0039	0,0044	0,0050	0,0057
16	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0012	0,0014	0,0016	0,0018	0,0021	0,0024
17	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010
18	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

r \ λ	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997
2	0,9933	0,9939	0,9944	0,9949	0,9953	0,9957	0,9961	0,9964	0,9967	0,9970
3	0,9725	0,9745	0,9764	0,9781	0,9797	0,9812	0,9826	0,9839	0,9851	0,9862
4	0,9233	0,9281	0,9326	0,9368	0,9409	0,9446	0,9482	0,9515	0,9547	0,9576
5	0,8359	0,8445	0,8527	0,8605	0,8679	0,8751	0,8819	0,8883	0,8945	0,9004
6	0,7119	0,7241	0,7360	0,7474	0,7586	0,7693	0,7797	0,7897	0,7994	0,8088
7	0,5651	0,5796	0,5940	0,6080	0,6218	0,6354	0,6486	0,6616	0,6743	0,6866
8	0,4162	0,4311	0,4459	0,4607	0,4754	0,4900	0,5044	0,5188	0,5330	0,5470
9	0,2840	0,2973	0,3108	0,3243	0,3380	0,3518	0,3657	0,3796	0,3935	0,4075
10	0,1798	0,1904	0,2012	0,2123	0,2236	0,2351	0,2469	0,2589	0,2710	0,2834
11	0,1058	0,1133	0,1212	0,1293	0,1378	0,1465	0,1555	0,1648	0,1743	0,1841
12	0,0580	0,0629	0,0681	0,0735	0,0792	0,0852	0,0915	0,0980	0,1048	0,1119
13	0,0297	0,0327	0,0358	0,0391	0,0427	0,0464	0,0504	0,0546	0,0591	0,0638
14	0,0143	0,0159	0,0176	0,0195	0,0216	0,0238	0,0261	0,0286	0,0313	0,0342
15	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0103	0,0114	0,0127	0,0141	0,0156	0,0173
16	0,0028	0,0031	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052	0,0059	0,0066	0,0074	0,0082
17	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0020	0,0022	0,0026	0,0029	0,0033	0,0037
18	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0012	0,0014	0,0016
19	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006
20	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

IV. táblázat folytatása

					λ					
r	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
2	0,9972	0,9975	0,9977	0,9979	0,9981	0,9982	0,9984	0,9985	0,9987	0,9988
3	0,9873	0,9882	0,9891	0,9900	0,9907	0,9914	0,9921	0,9927	0,9932	0,9938
4	0,9604	0,9630	0,9654	0,9677	0,9699	0,9719	0,9738	0,9756	0,9772	0,9788
5	0,9060	0,9113	0,9163	0,9211	0,9256	0,9299	0,9340	0,9379	0,9416	0,9450
6	0,8178	0,8264	0,8347	0,8427	0,8504	0,8578	0,8648	0,8716	0,8781	0,8843
7	0,6987	0,7104	0,7219	0,7330	0,7438	0,7543	0,7645	0,7744	0,7840	0,7932
8	0,5609	0,5746	0,5881	0,6013	0,6144	0,6272	0,6398	0,6522	0,6643	0,6761
9	0,4214	0,4353	0,4493	0,4631	0,4769	0,4906	0,5042	0,5177	0,5311	0,5443
10	0,2959	0,3085	0,3212	0,3341	0,3470	0,3600	0,3731	0,3863	0,3994	0,4126
11	0,1942	0,2045	0,2150	0,2257	0,2366	0,2478	0,2591	0,2706	0,2822	0,2940
12	0,1193	0,1269	0,1348	0,1429	0,1513	0,1600	0,1689	0,1780	0,1874	0,1970
13	0,0687	0,0739	0,0793	0,0850	0,0909	0,0971	0,1035	0,1102	0,1171	0,1242
14	0,0372	0,0405	0,0439	0,0476	0,0514	0,0555	0,0597	0,0642	0,0689	0,0739
15	0,0190	0,0209	0,0229	0,0251	0,0274	0,0299	0,0325	0,0353	0,0383	0,0415
16	0,0092	0,0102	0,0113	0,0125	0,0138	0,0152	0,0168	0,0184	0,0202	0,0220
17	0,0042	0,0047	0,0053	0,0059	0,0066	0,0074	0,0082	0,0091	0,0101	0,0111
18	0,0018	0,0021	0,0023	0,0027	0,0030	0,0034	0,0038	0,0043	0,0048	0,0053
19	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0022	0,0024
20	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011
21	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
22	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001

					λ					
r	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
2	0,9989	0,9990	0,9991	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	0,9995	0,9995
3	0,9942	0,9947	0,9951	0,9955	0,9958	0,9962	0,9965	0,9967	0,9970	0,9972
4	0,9802	0,9816	0,9828	0,9840	0,9851	0,9862	0,9871	0,9880	0,9889	0,9897
5	0,9483	0,9514	0,9544	0,9571	0,9597	0,9622	0,9645	0,9667	0,9688	0,9707
6	0,8902	0,8959	0,9014	0,9065	0,9115	0,9162	0,9207	0,9250	0,9290	0,9329
7	0,8022	0,8108	0,8192	0,8273	0,8351	0,8426	0,8498	0,8567	0,8634	0,8699
8	0,6877	0,6990	0,7101	0,7208	0,7313	0,7416	0,7515	0,7612	0,7706	0,7798
9	0,5574	0,5704	0,5832	0,5958	0,6082	0,6204	0,6324	0,6442	0,6558	0,6672
10	0,4258	0,4389	0,4521	0,4651	0,4782	0,4911	0,5040	0,5168	0,5295	0,5421
11	0,3059	0,3180	0,3301	0,3424	0,3547	0,3671	0,3795	0,3920	0,4045	0,4170
12	0,2068	0,2168	0,2270	0,2374	0,2480	0,2588	0,2697	0,2807	0,2919	0,3032
13	0,1316	0,1393	0,1471	0,1552	0,1636	0,1721	0,1809	0,1899	0,1991	0,2084
14	0,0790	0,0844	0,0900	0,0958	0,1019	0,1081	0,1147	0,1214	0,1284	0,1355
15	0,0448	0,0483	0,0520	0,0559	0,0600	0,0643	0,0688	0,0735	0,0784	0,0835
16	0,0240	0,0262	0,0285	0,0309	0,0335	0,0362	0,0391	0,0421	0,0454	0,0487
17	0,0122	0,0135	0,0148	0,0162	0,0177	0,0194	0,0211	0,0230	0,0249	0,0270
18	0,0059	0,0066	0,0073	0,0081	0,0089	0,0098	0,0108	0,0119	0,0130	0,014
19	0,0027	0,0031	0,0034	0,0038	0,0043	0,0048	0,0053	0,0059	0,0065	0,0072
20	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0020	0,0022	0,0025	0,0028	0,0031	0,0035
21	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0013	0,0014	0,0016
22	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007
23	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

					λ					
r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,9988	0,9995	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0,9951	0,9977	0,9990	0,9995	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

IV. táblázat folytatása

r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	1,9849	1,9924	1,9963	1,9982	1,9991	1,9996	1,9998	1,9999	1,0000	1,0000
6	1,9625	1,9797	1,9893	1,9945	1,9972	1,9986	1,9993	1,9997	1,9998	1,9999
7	1,9214	1,9542	1,9741	1,9858	1,9924	1,9960	1,9979	1,9990	1,9995	1,9997
8	1,8568	1,9105	1,9460	1,9684	1,9820	1,9900	1,9946	1,9971	1,9985	1,9992
9	1,7680	1,8450	1,9002	1,9379	1,9626	1,9780	1,9874	1,9929	1,9961	1,9979
10	1,6595	1,7576	1,8342	1,8906	1,9301	1,9567	1,9739	1,9846	1,9911	1,9950
11	1,5401	1,6528	1,7483	1,8243	1,8815	1,9226	1,9509	1,9696	1,9817	1,9892
12	1,4207	1,5384	1,6468	1,7400	1,8152	1,8730	1,9153	1,9451	1,9653	1,9786
13	1,3113	1,4240	1,5369	1,6415	1,7324	1,8069	1,8650	1,9083	1,9394	1,9610
14	1,2187	1,3185	1,4270	1,5356	1,6368	1,7255	1,7991	1,8574	1,9016	1,9339
15	1,1460	1,2280	1,3249	1,4296	1,5343	1,6325	1,7192	1,7919	1,8503	1,8951
16	1,0926	1,1556	1,2364	1,3306	1,4319	1,5333	1,6285	1,7133	1,7852	1,8435
17	1,0559	1,1013	1,1645	1,2441	1,3359	1,4340	1,5323	1,6250	1,7080	1,7789
18	1,0322	1,0630	1,1095	1,1728	1,2511	1,3407	1,4360	1,5314	1,6216	1,7030
19	1,0177	1,0374	1,0698	1,1174	1,1805	1,2577	1,3450	1,4378	1,5305	1,6186
20	1,0093	1,0213	1,0427	1,0765	1,1248	1,1878	1,2637	1,3491	1,4394	1,5297
21	1,0047	1,0116	1,0250	1,0479	1,0830	1,1318	1,1945	1,2693	1,3528	1,4409
22	1,0023	1,0061	1,0141	1,0288	1,0531	1,0892	1,1385	1,2009	1,2745	1,3563
23	1,0010	1,0030	1,0076	1,0167	1,0327	1,0582	1,0953	1,1449	1,2069	1,2794
24	1,0005	1,0015	1,0040	1,0093	1,0195	1,0367	1,0633	1,1011	1,1510	1,2125
25	1,0002	1,0007	1,0020	1,0050	1,0112	1,0223	1,0406	1,0683	1,1067	1,1568
26	1,0001	1,0003	1,0010	1,0026	1,0062	1,0131	1,0252	1,0446	1,0731	1,1122
27	1,0000	1,0001	1,0005	1,0013	1,0033	1,0075	1,0152	1,0282	1,0486	1,0779
28	1,0000	1,0001	1,0002	1,0006	1,0017	1,0041	1,0088	1,0173	1,0313	1,0525
29	1,0000	1,0000	1,0001	1,0003	1,0009	1,0022	1,0050	1,0103	1,0195	1,0343
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0004	1,0011	1,0027	1,0059	1,0118	1,0218
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0002	1,0006	1,0014	1,0033	1,0070	1,0135
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0003	1,0007	1,0018	1,0040	1,0081
33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0004	1,0010	1,0022	1,0047
34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0002	1,0005	1,0012	1,0027
35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0002	1,0006	1,0015
36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0003	1,0008
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0002	1,0004
38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0002
39	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001
40	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001

V.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$

(A táblázatban szereplő $0{,}0^3\,9903$ é. i. t. 0,00 9903 é. i. t. rövidítése.)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
—0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
—0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
—0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
—0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
—0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
—0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
—0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
—0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
—0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
—0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
—1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
—1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
—1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,09853
—1,3	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08691	0,08534	0,08379	0,08226
—1,4	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
—1,5	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
—1,6	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
—1,7	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
—1,8	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
—1,9	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	0,02500	0,02442	0,02385	0,02330
—2,0	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
—2,1	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
—2,2	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
—2,3	0,01072	0,01044	0,01017	$0{,}0^3\,9903$	$0{,}0^3\,9642$	$0{,}0^3\,9387$	$0{,}0^3\,9137$	$0{,}0^3\,8894$	$0{,}0^3\,8656$	$0{,}0^3\,8424$
—2,4	$0{,}0^3\,8198$	$0{,}0^3\,7976$	$0{,}0^3\,7760$	$0{,}0^3\,7549$	$0{,}0^3\,7344$	$0{,}0^3\,7143$	$0{,}0^3\,6947$	$0{,}0^3\,6756$	$0{,}0^3\,6569$	$0{,}0^3\,6387$
—2,5	$0{,}0^3\,6210$	$0{,}0^3\,6037$	$0{,}0^3\,5868$	$0{,}0^3\,5703$	$0{,}0^3\,5543$	$0{,}0^3\,5386$	$0{,}0^3\,5234$	$0{,}0^3\,5085$	$0{,}0^3\,4940$	$0{,}0^3\,4799$
—2,6	$0{,}0^3\,4661$	$0{,}0^3\,4527$	$0{,}0^3\,4396$	$0{,}0^3\,4269$	$0{,}0^3\,4145$	$0{,}0^3\,4025$	$0{,}0^3\,3907$	$0{,}0^3\,3793$	$0{,}0^3\,3681$	$0{,}0^3\,3573$
—2,7	$0{,}0^3\,3467$	$0{,}0^3\,3364$	$0{,}0^3\,3264$	$0{,}0^3\,3167$	$0{,}0^3\,3072$	$0{,}0^3\,2980$	$0{,}0^3\,2890$	$0{,}0^3\,2803$	$0{,}0^3\,2718$	$0{,}0^3\,2635$
—2,8	$0{,}0^3\,2555$	$0{,}0^3\,2477$	$0{,}0^3\,2401$	$0{,}0^3\,2327$	$0{,}0^3\,2256$	$0{,}0^3\,2186$	$0{,}0^3\,2118$	$0{,}0^3\,2052$	$0{,}0^3\,1988$	$0{,}0^3\,1926$
—2,9	$0{,}0^3\,1866$	$0{,}0^3\,1807$	$0{,}0^3\,1750$	$0{,}0^3\,1695$	$0{,}0^3\,1641$	$0{,}0^3\,1589$	$0{,}0^3\,1538$	$0{,}0^3\,1489$	$0{,}0^3\,1441$	$0{,}0^3\,1395$
—3,0	$0{,}0^3\,1350$	$0{,}0^3\,1306$	$0{,}0^3\,1264$	$0{,}0^3\,1223$	$0{,}0^3\,1183$	$0{,}0^3\,1144$	$0{,}0^3\,1107$	$0{,}0^3\,1070$	$0{,}0^3\,1035$	$0{,}0^3\,1001$
—3,1	$0{,}0^3\,9676$	$0{,}0^3\,9354$	$0{,}0^3\,9043$	$0{,}0^3\,8740$	$0{,}0^3\,8447$	$0{,}0^3\,8164$	$0{,}0^3\,7888$	$0{,}0^3\,7622$	$0{,}0^3\,7364$	$0{,}0^3\,7114$
—3,2	$0{,}0^3\,6871$	$0{,}0^3\,6637$	$0{,}0^3\,6410$	$0{,}0^3\,6190$	$0{,}0^3\,5976$	$0{,}0^3\,5770$	$0{,}0^3\,5571$	$0{,}0^3\,5377$	$0{,}0^3\,5190$	$0{,}0^3\,5009$
—3,3	$0{,}0^3\,4834$	$0{,}0^3\,4665$	$0{,}0^3\,4501$	$0{,}0^3\,4342$	$0{,}0^3\,4189$	$0{,}0^3\,4041$	$0{,}0^3\,3897$	$0{,}0^3\,3758$	$0{,}0^3\,3624$	$0{,}0^3\,3495$
—3,4	$0{,}0^3\,3369$	$0{,}0^3\,3248$	$0{,}0^3\,3131$	$0{,}0^3\,3018$	$0{,}0^3\,2909$	$0{,}0^3\,2803$	$0{,}0^3\,2701$	$0{,}0^3\,2602$	$0{,}0^3\,2507$	$0{,}0^3\,2415$
—3,5	$0{,}0^3\,2326$	$0{,}0^3\,2241$	$0{,}0^3\,2158$	$0{,}0^3\,2078$	$0{,}0^3\,2001$	$0{,}0^3\,1926$	$0{,}0^3\,1854$	$0{,}0^3\,1785$	$0{,}0^3\,1718$	$0{,}0^3\,1653$
—3,6	$0{,}0^3\,1591$	$0{,}0^3\,1531$	$0{,}0^3\,1473$	$0{,}0^3\,1417$	$0{,}0^3\,1363$	$0{,}0^3\,1311$	$0{,}0^3\,1261$	$0{,}0^3\,1213$	$0{,}0^3\,1166$	$0{,}0^3\,1121$
—3,7	$0{,}0^3\,1078$	$0{,}0^3\,1036$	$0{,}0^4\,9961$	$0{,}0^4\,9574$	$0{,}0^4\,9201$	$0{,}0^4\,8842$	$0{,}0^4\,8496$	$0{,}0^4\,8162$	$0{,}0^4\,7841$	$0{,}0^4\,7532$
—3,8	$0{,}0^4\,7235$	$0{,}0^4\,6948$	$0{,}0^4\,6673$	$0{,}0^4\,6407$	$0{,}0^4\,6152$	$0{,}0^4\,5906$	$0{,}0^4\,5669$	$0{,}0^4\,5442$	$0{,}0^4\,5223$	$0{,}0^4\,5012$
—3,9	$0{,}0^4\,4810$	$0{,}0^4\,4615$	$0{,}0^4\,4427$	$0{,}0^4\,4247$	$0{,}0^4\,4074$	$0{,}0^4\,3908$	$0{,}0^4\,3747$	$0{,}0^4\,3594$	$0{,}0^4\,3446$	$0{,}0^4\,3304$
—4,0	$0{,}0^4\,3167$	$0{,}0^4\,3036$	$0{,}0^4\,2910$	$0{,}0^4\,2789$	$0{,}0^4\,2673$	$0{,}0^4\,2561$	$0{,}0^4\,2454$	$0{,}0^4\,2351$	$0{,}0^4\,2252$	$0{,}0^4\,2157$
—4,1	$0{,}0^4\,2066$	$0{,}0^4\,1978$	$0{,}0^4\,1894$	$0{,}0^4\,1814$	$0{,}0^4\,1737$	$0{,}0^4\,1662$	$0{,}0^4\,1591$	$0{,}0^4\,1523$	$0{,}0^4\,1458$	$0{,}0^4\,1395$
—4,2	$0{,}0^4\,1335$	$0{,}0^4\,1277$	$0{,}0^4\,1222$	$0{,}0^4\,1168$	$0{,}0^4\,1118$	$0{,}0^4\,1069$	$0{,}0^4\,1022$	$0{,}0^5\,9774$	$0{,}0^5\,9345$	$0{,}0^5\,8934$
—4,3	$0{,}0^5\,8540$	$0{,}0^5\,8163$	$0{,}0^5\,7801$	$0{,}0^5\,7455$	$0{,}0^5\,7124$	$0{,}0^5\,6807$	$0{,}0^5\,6503$	$0{,}0^5\,6212$	$0{,}0^5\,5934$	$0{,}0^5\,5668$
—4,4	$0{,}0^5\,5413$	$0{,}0^5\,5169$	$0{,}0^5\,4935$	$0{,}0^5\,4712$	$0{,}0^5\,4498$	$0{,}0^5\,4294$	$0{,}0^5\,4098$	$0{,}0^5\,3911$	$0{,}0^5\,3732$	$0{,}0^5\,3561$
—4,5	$0{,}0^5\,3398$	$0{,}0^5\,3241$	$0{,}0^5\,3092$	$0{,}0^5\,2949$	$0{,}0^5\,2813$	$0{,}0^5\,2682$	$0{,}0^5\,2558$	$0{,}0^5\,2439$	$0{,}0^5\,2325$	$0{,}0^5\,2216$
—4,6	$0{,}0^5\,2112$	$0{,}0^5\,2013$	$0{,}0^5\,1919$	$0{,}0^5\,1828$	$0{,}0^5\,1742$	$0{,}0^5\,1660$	$0{,}0^5\,1581$	$0{,}0^5\,1506$	$0{,}0^5\,1434$	$0{,}0^5\,1366$
—4,7	$0{,}0^5\,1301$	$0{,}0^5\,1239$	$0{,}0^5\,1179$	$0{,}0^5\,1123$	$0{,}0^5\,1069$	$0{,}0^5\,1017$	$0{,}0^6\,9680$	$0{,}0^6\,9211$	$0{,}0^6\,8765$	$0{,}0^6\,8339$
—4,8	$0{,}0^6\,7933$	$0{,}0^6\,7547$	$0{,}0^6\,7178$	$0{,}0^6\,6827$	$0{,}0^6\,6492$	$0{,}0^6\,6173$	$0{,}0^6\,5869$	$0{,}0^6\,5580$	$0{,}0^6\,5304$	$0{,}0^6\,5042$
—4,9	$0{,}0^6\,4792$	$0{,}0^6\,4554$	$0{,}0^6\,4327$	$0{,}0^6\,4111$	$0{,}0^6\,3906$	$0{,}0^6\,3711$	$0{,}0^6\,3525$	$0{,}0^6\,3348$	$0{,}0^6\,3179$	$0{,}0^6\,3019$

V. táblázat folytatása

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	$0,9^2$ 0097	$0,9^2$ 0358	$0,9^2$ 0613	$0,9^2$ 0863	$0,9^2$ 1106	$0,9^2$ 1344	$0,9^2$ 1576
2,4	$0,9^2$ 1802	$0,9^2$ 2024	$0,9^2$ 2240	$0,9^2$ 2451	$0,9^2$ 2656	$0,9^2$ 2857	$0,9^2$ 3053	$0,9^2$ 3244	$0,9^2$ 3431	$0,9^2$ 3613
2,5	$0,9^2$ 3790	$0,9^2$ 3963	$0,9^2$ 4132	$0,9^2$ 4297	$0,9^2$ 4457	$0,9^2$ 4614	$0,9^2$ 4766	$0,9^2$ 4915	$0,9^2$ 5060	$0,9^2$ 5201
2,6	$0,9^2$ 5339	$0,9^2$ 5473	$0,9^2$ 5604	$0,9^2$ 5731	$0,9^2$ 5855	$0,9^2$ 5975	$0,9^2$ 6093	$0,9^2$ 6207	$0,9^2$ 6319	$0,9^2$ 6427
2,7	$0,9^2$ 6533	$0,9^2$ 6636	$0,9^2$ 6736	$0,9^2$ 6833	$0,9^2$ 6928	$0,9^2$ 7020	$0,9^2$ 7110	$0,9^2$ 7197	$0,9^2$ 7282	$0,9^2$ 7365
2,8	$0,9^2$ 7445	$0,9^2$ 7523	$0,9^2$ 7599	$0,9^2$ 7673	$0,9^2$ 7744	$0,9^2$ 7814	$0,9^2$ 7882	$0,9^2$ 7948	$0,9^2$ 8012	$0,9^2$ 8074
2,9	$0,9^2$ 8134	$0,9^2$ 8193	$0,9^2$ 8250	$0,9^2$ 8305	$0,9^2$ 8359	$0,9^2$ 8411	$0,9^2$ 8462	$0,9^2$ 8511	$0,9^2$ 8559	$0,9^2$ 8605
3,0	$0,9^2$ 8650	$0,9^2$ 8694	$0,9^2$ 8736	$0,9^2$ 8777	$0,9^2$ 8817	$0,9^2$ 8856	$0,9^2$ 8893	$0,9^2$ 8930	$0,9^2$ 8965	$0,9^2$ 8999
3,1	$0,9^3$ 0324	$0,9^3$ 0646	$0,9^3$ 0957	$0,9^2$ 1260	$0,9^2$ 1553	$0,9^2$ 1836	$0,9^2$ 2112	$0,9^2$ 2378	$0,9^2$ 2636	$0,9^2$ 2886
3,2	$0,9^3$ 3129	$0,9^3$ 3363	$0,9^3$ 3590	$0,9^2$ 3810	$0,9^2$ 4024	$0,9^2$ 4230	$0,9^2$ 4429	$0,9^2$ 4623	$0,9^2$ 4810	$0,9^2$ 4991
3,3	$0,9^2$ 5166	$0,9^2$ 5335	$0,9^2$ 5499	$0,9^2$ 5658	$0,9^2$ 5811	$0,9^2$ 5959	$0,9^2$ 6103	$0,9^2$ 6242	$0,9^2$ 6376	$0,9^2$ 6505
3,4	$0,9^2$ 6631	$0,9^2$ 6752	$0,9^2$ 6869	$0,9^2$ 6982	$0,9^2$ 7091	$0,9^2$ 7197	$0,9^2$ 7299	$0,9^2$ 7398	$0,9^2$ 7493	$0,9^2$ 7585
3,5	$0,9^2$ 7674	$0,9^2$ 7759	$0,9^2$ 7842	$0,9^2$ 7922	$0,9^2$ 7999	$0,9^2$ 8074	$0,9^2$ 8146	$0,9^2$ 8215	$0,9^2$ 8282	$0,9^2$ 8347
3,6	$0,9^2$ 8409	$0,9^2$ 8469	$0,9^2$ 8527	$0,9^2$ 8583	$0,9^2$ 8637	$0,9^2$ 8689	$0,9^2$ 8739	$0,9^2$ 8787	$0,9^2$ 8834	$0,9^2$ 8879
3,7	$0,9^2$ 8922	$0,9^2$ 8964	$0,9^4$ 0039	$0,9^4$ 0426	$0,9^4$ 0799	$0,9^4$ 1158	$0,9^4$ 1504	$0,9^4$ 1838	$0,9^4$ 2159	$0,9^4$ 2468
3,8	$0,9^4$ 2765	$0,9^4$ 3052	$0,9^4$ 3327	$0,9^4$ 3593	$0,9^4$ 3848	$0,9^4$ 4094	$0,9^4$ 4331	$0,9^4$ 4558	$0,9^4$ 4777	$0,9^4$ 4988
3,9	$0,9^4$ 5190	$0,9^4$ 5385	$0,9^4$ 5573	$0,9^4$ 5753	$0,9^4$ 5926	$0,9^4$ 6092	$0,9^4$ 6253	$0,9^4$ 6406	$0,9^4$ 6554	$0,9^4$ 6696
4,0	$0,9^4$ 6833	$0,9^4$ 6964	$0,9^4$ 7090	$0,9^4$ 7211	$0,9^4$ 7327	$0,9^4$ 7439	$0,9^4$ 7546	$0,9^4$ 7649	$0,9^4$ 7748	$0,9^4$ 7843
4,1	$0,9^4$ 7934	$0,9^4$ 8022	$0,9^4$ 8106	$0,9^4$ 8186	$0,9^4$ 8263	$0,9^4$ 8338	$0,9^4$ 8409	$0,9^4$ 8477	$0,9^4$ 8542	$0,9^4$ 8605
4,2	$0,9^4$ 8665	$0,9^4$ 8723	$0,9^4$ 8778	$0,9^4$ 8832	$0,9^4$ 8882	$0,9^4$ 8931	$0,9^4$ 8978	$0,9^5$ 0226	$0,9^5$ 0655	$0,9^5$ 1066
4,3	$0,9^5$ 1460	$0,9^5$ 1837	$0,9^5$ 2199	$0,9^5$ 2545	$0,9^5$ 2876	$0,9^5$ 3193	$0,9^5$ 3497	$0,9^5$ 3788	$0,9^5$ 4066	$0,9^5$ 4332
4,4	$0,9^5$ 4587	$0,9^5$ 4831	$0,9^5$ 5065	$0,9^5$ 5288	$0,9^5$ 5502	$0,9^5$ 5706	$0,9^5$ 5902	$0,9^5$ 6089	$0,9^5$ 6268	$0,9^5$ 6439
4,5	$0,9^5$ 6602	$0,9^5$ 6759	$0,9^5$ 6908	$0,9^5$ 7051	$0,9^5$ 7187	$0,9^5$ 7318	$0,9^5$ 7442	$0,9^5$ 7561	$0,9^5$ 7675	$0,9^5$ 7784
4,6	$0,9^5$ 7888	$0,9^5$ 7987	$0,9^5$ 8081	$0,9^5$ 8172	$0,9^5$ 8258	$0,9^5$ 8340	$0,9^5$ 8419	$0,9^5$ 8494	$0,9^5$ 8566	$0,9^5$ 8634
4,7	$0,9^5$ 8699	$0,9^5$ 8761	$0,9^5$ 8821	$0,9^5$ 8877	$0,9^5$ 8931	$0,9^5$ 8983	$0,9^5$ 0320	$0,9^5$ 0789	$0,9^5$ 1235	$0,9^5$ 1661
4,8	$0,9^5$ 2067	$0,9^5$ 2453	$0,9^5$ 2822	$0,9^5$ 3173	$0,9^5$ 3508	$0,9^5$ 3827	$0,9^5$ 4131	$0,9^5$ 4420	$0,9^5$ 4696	$0,9^5$ 4958
4,9	$0,9^5$ 5208	$0,9^5$ 5446	$0,9^5$ 5673	$0,9^5$ 5889	$0,9^5$ 6094	$0,9^5$ 6289	$0,9^5$ 6475	$0,9^5$ 6652	$0,9^5$ 6821	$0,9^5$ 6981

VI.

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

(A táblázatban szereplő $0{,}0^2\,9871$ é. i. t. $0{,}00\,9871$ é. i. t. rövidítése.)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	$0{,}0^2\,9871$	$0{,}0^2\,9606$	$0{,}0^2\,9347$	$0{,}0^2\,9094$	$0{,}0^2\,8846$	$0{,}0^2\,8605$	$0{,}0^2\,8370$	$0{,}0^2\,8140$
2,8	$0{,}0^2\,7915$	$0{,}0^2\,7697$	$0{,}0^2\,7483$	$0{,}0^2\,7274$	$0{,}0^2\,7071$	$0{,}0^2\,6873$	$0{,}0^2\,6679$	$0{,}0^2\,6491$	$0{,}0^2\,6307$	$0{,}0^2\,6127$
2,9	$0{,}0^2\,5953$	$0{,}0^2\,5782$	$0{,}0^2\,5616$	$0{,}0^2\,5454$	$0{,}0^2\,5296$	$0{,}0^2\,5143$	$0{,}0^2\,4993$	$0{,}0^2\,4847$	$0{,}0^2\,4705$	$0{,}0^2\,4567$
3,0	$0{,}0^2\,4432$	$0{,}0^2\,4301$	$0{,}0^2\,4173$	$0{,}0^2\,4049$	$0{,}0^2\,3928$	$0{,}0^2\,3810$	$0{,}0^2\,3695$	$0{,}0^2\,3584$	$0{,}0^2\,3475$	$0{,}0^2\,3370$
3,1	$0{,}0^2\,3267$	$0{,}0^2\,3167$	$0{,}0^2\,3070$	$0{,}0^2\,2975$	$0{,}0^2\,2884$	$0{,}0^2\,2794$	$0{,}0^2\,2707$	$0{,}0^2\,2623$	$0{,}0^2\,2541$	$0{,}0^2\,2461$
3,2	$0{,}0^2\,2384$	$0{,}0^2\,2309$	$0{,}0^2\,2236$	$0{,}0^2\,2165$	$0{,}0^2\,2096$	$0{,}0^2\,2029$	$0{,}0^2\,1964$	$0{,}0^2\,1901$	$0{,}0^2\,1840$	$0{,}0^2\,1780$
3,3	$0{,}0^2\,1723$	$0{,}0^2\,1667$	$0{,}0^2\,1612$	$0{,}0^2\,1560$	$0{,}0^2\,1508$	$0{,}0^2\,1459$	$0{,}0^2\,1411$	$0{,}0^2\,1364$	$0{,}0^2\,1319$	$0{,}0^2\,1275$
3,4	$0{,}0^2\,1232$	$0{,}0^2\,1191$	$0{,}0^2\,1151$	$0{,}0^2\,1112$	$0{,}0^2\,1075$	$0{,}0^2\,1038$	$0{,}0^2\,1003$	$0{,}0^2\,9689$	$0{,}0^2\,9358$	$0{,}0^2\,9037$
3,5	$0{,}0^2\,8727$	$0{,}0^2\,8426$	$0{,}0^2\,8135$	$0{,}0^2\,7853$	$0{,}0^2\,7581$	$0{,}0^2\,7317$	$0{,}0^2\,7061$	$0{,}0^2\,6814$	$0{,}0^2\,6575$	$0{,}0^2\,6343$
3,6	$0{,}0^2\,6119$	$0{,}0^2\,5902$	$0{,}0^2\,5693$	$0{,}0^2\,5490$	$0{,}0^2\,5294$	$0{,}0^2\,5105$	$0{,}0^2\,4921$	$0{,}0^2\,4744$	$0{,}0^2\,4573$	$0{,}0^2\,4408$
3,7	$0{,}0^2\,4248$	$0{,}0^2\,4093$	$0{,}0^2\,3944$	$0{,}0^2\,3800$	$0{,}0^2\,3661$	$0{,}0^2\,3526$	$0{,}0^2\,3396$	$0{,}0^2\,3271$	$0{,}0^2\,3149$	$0{,}0^2\,3032$
3,8	$0{,}0^2\,2919$	$0{,}0^2\,2810$	$0{,}0^2\,2705$	$0{,}0^2\,2604$	$0{,}0^2\,2506$	$0{,}0^2\,2411$	$0{,}0^2\,2320$	$0{,}0^2\,2232$	$0{,}0^2\,2147$	$0{,}0^2\,2065$
3,9	$0{,}0^2\,1987$	$0{,}0^2\,1910$	$0{,}0^2\,1837$	$0{,}0^2\,1766$	$0{,}0^2\,1698$	$0{,}0^2\,1633$	$0{,}0^2\,1569$	$0{,}0^2\,1508$	$0{,}0^2\,1449$	$0{,}0^2\,1393$
4,0	$0{,}0^3\,1338$	$0{,}0^3\,1286$	$0{,}0^3\,1235$	$0{,}0^3\,1186$	$0{,}0^3\,1140$	$0{,}0^3\,1094$	$0{,}0^3\,1051$	$0{,}0^3\,1009$	$0{,}0^4\,9687$	$0{,}0^4\,9299$
4,1	$0{,}0^4\,8926$	$0{,}0^4\,8567$	$0{,}0^4\,8222$	$0{,}0^4\,7890$	$0{,}0^4\,7570$	$0{,}0^4\,7263$	$0{,}0^4\,6967$	$0{,}0^4\,6683$	$0{,}0^4\,6410$	$0{,}0^4\,6147$
4,2	$0{,}0^4\,5894$	$0{,}0^4\,5652$	$0{,}0^4\,5418$	$0{,}0^4\,5194$	$0{,}0^4\,4979$	$0{,}0^4\,4772$	$0{,}0^4\,4573$	$0{,}0^4\,4382$	$0{,}0^4\,4199$	$0{,}0^4\,4023$
4,3	$0{,}0^4\,3854$	$0{,}0^4\,3691$	$0{,}0^4\,3535$	$0{,}0^4\,3386$	$0{,}0^4\,3242$	$0{,}0^4\,3104$	$0{,}0^4\,2972$	$0{,}0^4\,2845$	$0{,}0^4\,2723$	$0{,}0^4\,2606$
4,4	$0{,}0^4\,2494$	$0{,}0^4\,2387$	$0{,}0^4\,2284$	$0{,}0^4\,2185$	$0{,}0^4\,2090$	$0{,}0^4\,1999$	$0{,}0^4\,1912$	$0{,}0^4\,1829$	$0{,}0^4\,1749$	$0{,}0^4\,1672$
4,5	$0{,}0^4\,1598$	$0{,}0^4\,1528$	$0{,}0^4\,1461$	$0{,}0^4\,1396$	$0{,}0^4\,1334$	$0{,}0^4\,1275$	$0{,}0^4\,1218$	$0{,}0^4\,1164$	$0{,}0^4\,1112$	$0{,}0^4\,1062$
4,6	$0{,}0^4\,1014$	$0{,}0^5\,9684$	$0{,}0^5\,9248$	$0{,}0^5\,8830$	$0{,}0^5\,8430$	$0{,}0^5\,8047$	$0{,}0^5\,7681$	$0{,}0^5\,7331$	$0{,}0^5\,6996$	$0{,}0^5\,6676$
4,7	$0{,}0^5\,6370$	$0{,}0^5\,6077$	$0{,}0^5\,5797$	$0{,}0^5\,5530$	$0{,}0^5\,5274$	$0{,}0^5\,5030$	$0{,}0^5\,4796$	$0{,}0^5\,4573$	$0{,}0^5\,4360$	$0{,}0^5\,4156$
4,8	$0{,}0^5\,3961$	$0{,}0^5\,3775$	$0{,}0^5\,3598$	$0{,}0^5\,3428$	$0{,}0^5\,3267$	$0{,}0^5\,3112$	$0{,}0^5\,2965$	$0{,}0^5\,2824$	$0{,}0^5\,2690$	$0{,}0^5\,2561$
4,9	$0{,}0^5\,2439$	$0{,}0^5\,2322$	$0{,}0^5\,2211$	$0{,}0^5\,2105$	$0{,}0^5\,2003$	$0{,}0^5\,1907$	$0{,}0^5\,1814$	$0{,}0^5\,1727$	$0{,}0^5\,1643$	$0{,}0^5\,1563$

VII.

$\sqrt{n\,p\,q}$ $(q = 1 - p)$

n	p 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0,2179	0,3000	0,3571	0,4000	0,4330	0,4583	0,4770	0,4899	0,4975	0,5000
2	0,3082	0,4243	0,5050	0,5657	0,6124	0,6481	0,6745	0,6928	0,7036	0,7071
3	0,3775	0,5196	0,6185	0,6928	0,7500	0,7937	0,8261	0,8485	0,8617	0,8660
4	0,4359	0,6000	0,7141	0,8000	0,8660	0,9165	0,9539	0,9798	0,9950	1,0000
5	0,4873	0,6708	0,7984	0,8944	0,9682	1,0247	1,0665	1,0954	1,1124	1,1180
6	0,5339	0,7348	0,8746	0,9798	1,0607	1,1225	1,1683	1,2000	1,2186	1,2247
7	0,5766	0,7937	0,9447	1,0583	1,1456	1,2124	1,2619	1,2961	1,3162	1,3229
8	0,6164	0,8485	1,0100	1,1314	1,2247	1,2961	1,3491	1,3856	1,4071	1,4142
9	0,6538	0,9000	1,0712	1,2000	1,2990	1,3748	1,4309	1,4697	1,4925	1,5000
10	0,6892	0,9487	1,1292	1,2649	1,3693	1,4491	1,5083	1,5492	1,5732	1,5811
11	0,7228	0,9950	1,1843	1,3266	1,4361	1,5199	1,5819	1,6248	1,6500	1,6583
12	0,7550	1,0392	1,2369	1,3856	1,5000	1,5875	1,6523	1,6971	1,7234	1,7321
13	0,7858	1,0817	1,2874	1,4422	1,5612	1,6523	1,7197	1,7664	1,7937	1,8028
14	0,8155	1,1225	1,3360	1,4967	1,6202	1,7146	1,7847	1,8330	1,8615	1,8708
15	0,8441	1,1619	1,3829	1,5492	1,6771	1,7748	1,8473	1,8974	1,9268	1,9365
16	0,8718	1,2000	1,4283	1,6000	1,7321	1,8330	1,9079	1,9596	1,9900	2,0000
17	0,8986	1,2369	1,4722	1,6492	1,7854	1,8894	1,9666	2,0199	2,0512	2,0616
18	0,9247	1,2728	1,5149	1,6971	1,8371	1,9442	2,0236	2,0785	2,1107	2,1213
19	0,9500	1,3077	1,5564	1,7436	1,8875	1,9975	2,0791	2,1354	2,1685	2,1794
20	0,9747	1,3416	1,5968	1,7888	1,9364	2,0493	2,1330	2,1908	2,2248	2,2360

VIII.

$\sqrt{p\,q}$ $(p = 1 - q)$

p	$\sqrt{pq}$	p	$\sqrt{pq}$	p	$\sqrt{pq}$	p	$\sqrt{pq}$	p	$\sqrt{pq}$
0,005	0,0705	0,105	0,3066	0,205	0,4037	0,305	0,4604	0,405	0,4909
0,010	0,0995	0,110	0,3129	0,210	0,4073	0,310	0,4625	0,410	0,4918
0,015	0,1216	0,115	0,3190	0,215	0,4108	0,315	0,4645	0,415	0,4927
0,020	0,1400	0,120	0,3250	0,220	0,4142	0,320	0,4665	0,420	0,4936
0,025	0,1561	0,125	0,3307	0,225	0,4176	0,325	0,4684	0,425	0,4943
0,030	0,1706	0,130	0,3363	0,230	0,4208	0,330	0,4702	0,430	0,4951
0,035	0,1838	0,135	0,3417	0,235	0,4240	0,335	0,4720	0,435	0,4958
0,040	0,1960	0,140	0,3470	0,240	0,4271	0,340	0,4737	0,440	0,4964
0,045	0,2073	0,145	0,3521	0,245	0,4301	0,345	0,4754	0,445	0,4970
0,050	0,2179	0,150	0,3571	0,250	0,4330	0,350	0,4770	0,450	0,4975
0,055	0,2280	0,155	0,3619	0,255	0,4359	0,355	0,4785	0,455	0,4980
0,060	0,2375	0,160	0,3666	0,260	0,4386	0,360	0,4800	0,460	0,4984
0,065	0,2465	0,165	0,3712	0,265	0,4413	0,365	0,4814	0,465	0,4988
0,070	0,2551	0,170	0,3756	0,270	0,4440	0,370	0,4828	0,470	0,4991
0,075	0,2634	0,175	0,3800	0,275	0,4465	0,375	0,4841	0,475	0,4994
0,080	0,2713	0,180	0,3842	0,280	0,4490	0,380	0,4854	0,480	0,4996
0,085	0,2789	0,185	0,3883	0,285	0,4514	0,385	0,4866	0,485	0,4998
0,090	0,2862	0,190	0,3923	0,290	0,4538	0,390	0,4877	0,490	0,4999
0,095	0,2932	0,195	0,3962	0,295	0,4560	0,395	0,4889	0,495	0,5000
0,100	0,3000	0,200	0,4000	0,300	0,4583	0,400	0,4899	0,500	0,5000

IX.

$\log_{10} n!$

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
1	0,0000	61	83,7055	121	200,9082	181	331,5606	241	470,9914
2	0,3010	62	85,4979	122	202,9945	182	333,8207	242	473,3752
3	0,7782	63	87,2972	123	205,0844	183	336,0832	243	475,7608
4	1,3802	64	89,1034	124	207,1779	184	338,3480	244	478,1482
5	2,0792	65	90,9163	125	209,2748	185	340,6152	245	480,5374
6	2,8573	66	92,7359	126	211,3751	186	342,8847	246	482,9283
7	3,7024	67	94,5619	127	213,4790	187	345,1565	247	485,3210
8	4,6055	68	96,3945	128	215,5862	188	347,4307	248	487,7154
9	5,5598	69	98,2333	129	217,6967	189	349,7071	249	490,1116
10	6,5598	70	100,0784	130	219,8107	190	351,9859	250	492,5096
11	7,6012	71	101,9297	131	221,9280	191	354,2669	251	494,9093
12	8,6803	72	103,7870	132	224,0485	192	356,5502	252	497,3107
13	9,7943	73	105,6503	133	226,1724	193	358,8358	253	499,7138
14	10,9404	74	107,5196	134	228,2995	194	361,1236	254	502,1186
15	12,1165	75	109,3946	135	230,4298	195	363,4136	255	504,5252
16	13,3206	76	111,2754	136	232,5634	196	365,7059	256	506,9334
17	14,5511	77	113,1619	137	234,7001	197	368,0003	257	509,3433
18	15,8063	78	115,0540	138	236,8400	198	370,2970	258	511,7549
19	17,0851	79	116,9516	139	238,9830	199	372,5959	259	514,1682
20	18,3861	80	118,8547	140	241,1291	200	374,8969	260	516,5832
21	19,7083	81	120,7632	141	243,2783	201	377,2001	261	518,9999
22	21,0508	82	122,6770	142	245,4306	202	379,5054	262	521,4182
23	22,4125	83	124,5961	143	247,5860	203	381,8129	263	523,8381
24	23,7927	84	126,5204	144	249,7443	204	384,1226	264	526,2597
25	25,1906	85	128,4498	145	251,9057	205	386,4343	265	528,6830
26	26,6056	86	130,3843	146	254,0700	206	388,7482	266	531,1307
27	28,0370	87	132,3238	147	256,2374	207	391,0642	267	533,5624
28	29,4841	88	134,2683	148	258,4076	208	393,3822	268	535,9929
29	30,9465	89	136,2177	149	260,5808	209	395,7024	269	538,3234
30	32,4237	90	138,1719	150	262,7569	210	398,0246	270	540,8625
31	33,9150	91	140,1310	151	264,9359	211	400,3489	271	543,2566
32	35,4202	92	142,0948	152	267,1177	212	402,6752	272	545,6912
33	36,9387	93	144,0632	153	269,3024	213	405,0036	273	548,1273
34	38,4702	94	146,0364	154	271,4809	214	407,3340	274	550,5651
35	40,0142	95	148,0141	155	273,6803	215	409,6664	275	553,0044
36	41,5705	96	149,9964	156	275,8734	216	412,0009	276	555,4453
37	43,1387	97	151,9831	157	278,0693	217	414,3373	277	557,8878
38	44,7185	98	153,9744	158	280,2679	218	416,6758	278	560,3318
39	46,3096	99	155,9700	159	282,4693	219	419,0162	279	562,7774
40	47,9116	100	157,9700	160	284,6735	220	421,3587	280	565,2246
41	49,5244	101	159,9743	161	286,8803	221	423,7031	281	567,6733
42	51,1477	102	161,9829	162	289,0898	222	426,0494	282	570,1235
43	52,7811	103	163,9958	163	291,3020	223	428,3977	283	572,5753
44	54,4246	104	166,0128	164	293,5168	224	430,7480	284	575,0287
45	56,0778	105	168,0340	165	295,7343	225	433,1002	285	577,4835
46	57,7406	106	170,0593	166	297,9544	226	435,4543	286	579,9399
47	59,4127	107	172,0887	167	300,1771	227	437,8103	287	582,3977
48	61,0939	108	174,1221	168	302,4024	228	440,1682	288	584,8571
49	62,7841	109	176,1595	169	304,6303	229	442,5281	289	587,3180
50	64,4831	110	178,2009	170	306,8608	230	444,8898	290	589,7804
51	66,1906	111	180,2462	171	309,0938	231	447,2534	291	592,2443
52	67,9066	112	182,2955	172	311,3293	232	449,6189	292	594,7097
53	69,6309	113	184,3485	173	313,5674	233	451,9862	293	597,1766
54	71,3633	114	186,4054	174	315,8079	234	454,3555	294	599,6449
55	73,1037	115	188,4661	175	318,0509	235	456,7265	295	602,1147
56	74,8519	116	190,5306	176	320,2965	236	459,0994	296	604,5860
57	76,6077	117	192,5988	177	322,5444	237	461,4742	297	607,0588
58	78,3712	118	194,6707	178	324,7948	238	463,8508	298	609,5330
59	80,1420	119	196,7462	179	327,0477	239	466,2292	299	612,0087
60	81,9202	120	198,8254	180	329,3030	240	468,6094	300	614,4858

IX. táblázat folytatása

n	log $n!$	n	log $n!$	n	log $n!$	n	log $n!$	n	log $n!$
301	616,9644	341	717,2404	381	819,5559	421	923,6961	461	1029,4874
302	619,4444	342	719,7744	382	822,1379	422	926,3214	462	1032,1520
303	621,9258	343	722,3097	383	824,7211	423	928,9478	463	1034,8176
304	624,4087	344	724,8463	384	827,3055	224	931,5751	464	1037,4841
305	626,8930	345	727,3841	385	829,8909	425	934,2035	465	1040,1516
306	629,3787	346	729,9232	386	832,4775	426	936,8329	466	1042,8200
307	631,8659	347	732,4635	387	835,0652	427	939,4633	467	1045,4893
308	6 4,3544	348	735,0051	388	837,6540	428	942,0948	468	1048,1595
309	636,8444	349	737,5479	389	840,2440	429	944,7272	469	1050,8307
310	639,3357	350	740,0920	390	842,8351	430	947,3607	470	1053,5028
311	641,8285	351	742,6373	391	845,4272	431	949,9952	471	1056,1758
312	644,3226	352	745,1838	392	848,0205	432	952,6307	472	1058,8498
313	646,8182	353	747,7316	393	850,6149	433	955,2672	473	1061,5246
314	649,3151	354	750,2806	394	853,2104	434	957,9047	474	1064,2004
315	651,8134	355	752,8308	395	855,8070	435	960,5431	475	1066,8771
316	654,3131	356	755,3823	396	858,4047	436	963,1826	476	1069,5547
317	656,8142	357	757,9349	397	861,0035	437	965,8231	477	1072,2332
318	659,3166	358	760,4888	398	863,6034	438	968,4646	478	1074,9127
319	661,8204	359	763,0439	399	866,2044	439	971,1071	479	1077,5930
320	664,3255	360	765,6002	400	868,8064	440	973,7505	480	1080,2742
321	666,8320	361	768,1577	401	871,4096	441	976,3949	481	1082,9564
322	669,3399	362	770,7164	402	874,0138	442	979,0404	482	1085,6394
323	671,8491	363	773,2764	403	876,6191	443	981,6868	483	1088,3234
324	674, 596	364	775,8375	404	879,2255	444	984,3342	484	1091,0082
325	676,8715	365	778,3997	405	881,8329	445	986,9825	485	1093,6940
326	679,3847	366	780,9632	406	884,4415	446	989,6318	486	1096,3806
327	681,8993	367	783,5279	407	887,0510	447	992,2822	487	1099,0681
328	684,4152	368	786,0937	408	889,6617	448	994,9334	488	1101,7565
329	686,9324	369	788,6608	409	892,2734	449	997,5857	489	1104,4458
330	689,4509	370	791,2290	410	894,8862	450	1000,2389	490	1107,1360
331	691,9707	371	793,7983	411	897,5001	451	1002,8931	491	1109,8271
332	694,4918	372	796,3689	412	900,1150	452	1005,5482	492	1112,5191
333	697,0143	373	798,9406	413	902,7309	453	1008,2043	493	1115,2119
334	699,5380	374	801,5135	414	905,3479	454	1010,8614	494	1117,9057
335	702,0631	375	804,0875	415	907,9660	455	1013,5194	495	1120,6003
336	704,5894	376	806,6627	416	910,5850	456	1016,1783	496	1123,2958
337	707,1170	377	809,2390	417	913,2052	457	1018,8383	497	1125,9921
338	709,6460	378	811,8165	418	915,8264	458	1021,4991	498	1128,6893
339	712,1762	379	814,3952	419	918,4486	459	1024,1609	499	1131,3874
340	714,7076	380	816,9749	420	921,0718	460	1026,8237	500	1134,0864

X.

e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,00000	0,60	0,54881	1,20	0,30119	1,80	0,16530
0,01	0,99005	0,61	0,54335	1,21	0,29820	1,81	0,16365
0,02	0,98020	0,62	0,53794	1,22	0,29523	1,82	0,16203
0,03	0,97045	0,63	0,53259	1,23	0,29229	1,83	0,16041
0,04	0,96079	0,64	0,52729	1,24	0,28938	1,84	0,15882
0,05	0,95123	0,65	0,52205	1,25	0,28650	1,85	0,15724
0,06	0,94176	0,66	0,51685	1,26	0,28365	1,86	0,15567
0,07	0,93239	0,67	0,51171	1,27	0,28083	1,87	0,15412
0,08	0,92312	0,68	0,50662	1,28	0,27804	1,88	0,15259
0,09	0,91393	0,69	0,50158	1,29	0,27527	1,89	0,15107
0,10	0,90484	0,70	0,49659	1,30	0,27253	1,90	0,14957
0,11	0,89583	0,71	0,49164	1,31	0,26982	1,91	0,14808
0,12	0,88692	0,72	0,48675	1,32	0,26714	1,92	0,14661
0,13	0,87810	0,73	0,48191	1,33	0,26448	1,93	0,14515
0,14	0,86936	0,74	0,47711	1,34	0,26185	1,94	0,14370
0,15	0,86071	0,75	0,47237	1,35	0,25924	1,95	0,14227
0,16	0,85214	0,76	0,46767	1,36	0,25666	1,96	0,14086
0,17	0,84366	0,77	0,46301	1,37	0,25411	1,97	0,13946
0,18	0,83527	0,78	0,45841	1,38	0,25158	1,98	0,13807
0,19	0,82696	0,79	0,45384	1,39	0,24908	1,99	0,13670
0,20	0,81873	0,80	0,44933	1,40	0,24660	2,00	0,13534
0,21	0,81058	0,81	0,44486	1,41	0,24414	2,01	0,13399
0,22	0,80252	0,82	0,44043	1,42	0,24171	2,02	0,13266
0,23	0,79453	0,83	0,43605	1,43	0,23931	2,03	0,13134
0,24	0,78663	0,84	0,43171	1,44	0,23693	2,04	0,13003
0,25	0,77880	0,85	0,42741	1,45	0,23457	2,05	0,12873
0,26	0,77105	0,86	0,42316	1,46	0,23224	2,06	0,12745
0,27	0,76338	0,87	0,41895	1,47	0,22993	2,07	0,12619
0,28	0,75578	0,88	0,41478	1,48	0,22764	2,08	0,12493
0,29	0,74826	0,89	0,41066	1,49	0,22537	2,09	0,12369
0,30	0,74082	0,90	0,40657	1,50	0,22313	2,10	0,12246
0,31	0,73345	0,91	0,40252	1,51	0,22091	2,11	0,12124
0,32	0,72615	0,92	0,39852	1,52	0,21871	2,12	0,12003
0,33	0,71892	0,93	0,39455	1,53	0,21654	2,13	0,11884
0,34	0,71177	0,94	0,39063	1,54	0,21438	2,14	0,11765
0,35	0,70469	0,95	0,38674	1,55	0,21225	2,15	0,11648
0,36	0,69768	0,96	0,38289	1,56	0,21014	2,16	0,11533
0,37	0,69073	0,97	0,37908	1,57	0,20805	2,17	0,11418
0,38	0,68386	0,98	0,37531	1,58	0,20598	2,18	0,11304
0,39	0,67706	0,99	0,37158	1,59	0,20393	2,19	0,11192
0,40	0,67032	1,00	0,36788	1,60	0,20190	2,20	0,11080
0,41	0,66365	1,01	0,36422	1,61	0,19989	2,21	0,10970
0,42	0,65705	1,02	0,36059	1,62	0,19790	2,22	0,10861
0,43	0,65051	1,03	0,35701	1,63	0,19593	2,23	0,10753
0,44	0,64404	1,04	0,35345	1,64	0,19398	2,24	0,10646
0,45	0,63763	1,05	0,34994	1,65	0,19205	2,25	0,10540
0,46	0,63128	1,06	0,34646	1,66	0,19014	2,26	0,10435
0,47	0,62500	1,07	0,34301	1,67	0,18825	2,27	0,10331
0,48	0,61878	1,08	0,33960	1,68	0,18637	2,28	0,10228
0,49	0,61263	1,09	0,33622	1,69	0,18452	2,29	0,10127
0,50	0,60653	1,10	0,33287	1,70	0,18268	2,30	0,10026
0,51	0,60050	1,11	0,32956	1,71	0,18087	2,31	0,09926
0,52	0,59452	1,12	0,32628	1,72	0,17907	2,32	0,09827
0,53	0,58860	1,13	0,32303	1,73	0,17728	2,33	0,09730
0,54	0,58275	1,14	0,31982	1,74	0,17552	2,34	0,09633
0,55	0,57695	1,15	0,31664	1,75	0,17377	2,35	0,09537
0,56	0,57121	1,16	0,31349	1,76	0,17204	2,36	0,09442
0,57	0,56553	1,17	0,31037	1,77	0,17033	2,37	0,09348
0,58	0,55990	1,18	0,30728	1,78	0,16864	2,38	0,09255
0,59	0,55433	1,19	0,30422	1,79	0,16696	2,39	0,09163

X. táblázat folytatása

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
2,40	0,09072	2,70	0,06721	3,00	0,04979	5,00	0,00674
2,41	0,08982	2,71	0,06654	3,05	0,04736	5,10	0,00610
2,42	0,08892	2,72	0,06587	3,10	0,04505	5,20	0,00552
2,43	0,08804	2,73	0,06522	3,15	0,04285	5,30	0,00499
2,44	0,08716	2,74	0,06457	3,20	0,04076	5,40	0,00452
2,45	0,08629	2,75	0,06393	3,25	0,03877	5,50	0,00409
2,46	0,08544	2,76	0,06329	3,30	0,03688	5,60	0,00370
2,47	0,08458	2,77	0,06266	3,35	0,03508	5,70	0,00335
2,48	0,08374	2,78	0,06204	3,40	0,03337	5,80	0,00303
2,49	0,08291	2,79	0,06142	3,45	0,03175	5,90	0,00274
2,50	0,08208	2,80	0,06081	3,50	0,03020	6,00	0,00248
2,51	0,08127	2,81	0,06020	3,55	0,02872	6,25	0,00193
2,52	0,08046	2,82	0,05961	3,60	0,02732	6,50	0,00150
2,53	0,07966	2,83	0,05901	3,65	0,02599	6,75	0,00117
2,54	0,07887	2,84	0,05843	3,70	0,02472	7,00	0,00091
2,55	0,07808	2,85	0,05784	3,75	0,02352	7,50	0,00055
2,56	0,07730	2,86	0,05727	3,80	0,02237	8,00	0,00034
2,57	0,07654	2,87	0,05670	3,85	0,02128	8,50	0,00020
2,58	0,07577	2,88	0,05613	3,90	0,02024	9,00	0,00012
2,59	0,07502	2,89	0,05558	3,95	0,01925	9,50	0,00007
2,60	0,07427	2,90	0,05502	4,00	0,01832	10,00	0,00005
2,61	0,07353	2,91	0,05448	4,10	0,01657		
2,62	0,07280	2,92	0,05393	4,20	0,01500		
2,63	0,07208	2,93	0,05340	4,30	0,01357		
2,64	0,07136	2,94	0,05287	4,40	0,01228		
2,65	0,07065	2,95	0,05234	4,50	0,01111		
2,66	0,06995	2,96	0,05182	4,60	0,01005		
2,67	0,06925	2,97	0,05130	4,70	0,00910		
2,68	0,06856	2,98	0,05079	4,80	0,00823		
2,69	0,06788	2,99	0,05029	4,90	0,00745		

E KÖTET

TARTALOMJEGYZÉKE

A) ÁLTALÁNOS RÉSZ

Írta: MEDGYESSY PÁL

Előszó e részhez 11
Az A) részben szereplő rövidítések. Egyes jelölések 14

1. §. A valószínűségszámítás tárgya. Események, eseményalgebra 15

a) A valószínűségszámítás tárgya 15
b) Események algebrája 16
c) BOOLE-algebra 18

Példák és feladatok 18

2. §. Események valószínűsége 24

a) Hogyan alkotunk matematikai elméletet 24
b) A valószínűségszámítás megalapozása 25
c) A KOLMOGOROV-féle axiómák 27
d) Egyszerűbb tételek 28
e) Klasszikus kiszámítási mód 29
f) Feltételes valószínűség 29
g) Két esemény szorzatának valószínűsége 30
h) A teljes valószínűség tétele 30
i) BAYES tétele 30
j) Események függetlensége. A „szorzási tétel" 31
k) Több esemény függetlensége 31
l) Kísérletek összekapcsolása 31

Példák és feladatok 32

3. §. Valószínűségi változók, eloszlás- és sűrűségfüggvények 45

a) Valószínűségi változó 45
b) Eloszlásfüggvény 46
c) Valószínűségi változó absztrakt fogalma 46
d) Eloszlásfüggvények tulajdonságai 46
e) Valószínűség-eloszlás 47
f) Valószínűség-sűrűségfüggvény 47
g) Valószínűségi vektor. Többdimenziós eloszlásfüggvények 48
h) Feltételes eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény 50
i) Valószínűségi változók függetlensége 51
j) Tételek valószínűségi változók függetlenségéről 51
k) Komplex valószínűségi változó 52

Példák és feladatok 52

4. §. A leggyakoribb valószínűség-eloszlások 59

a) Binomiális eloszlás 59
b) Binomiális eloszlás közelítése 60
c) POISSON-eloszlás mint közelítés 62
d) A POISSON-eloszlás mint önálló eloszlás 63
e) Egyéb egydimenziós valószínűség-eloszlások 65
f) Polinomiális eloszlás 66

Példák és feladatok 67

5. §. A leggyakoribb eloszlásfüggvények 76

a) Normális eloszlásfüggvény 76
b) Többdimenziós normális eloszlásfüggvény 78
c) Egyenletes eloszlásfüggvény 78
d) Többdimenziós egyenletes eloszlásfüggvény 79
e) Geometriai valószínűségek 80
f) Exponenciális eloszlásfüggvény 80
g) PEARSON-féle eloszlásfüggvények 81

Példák és feladatok 81

6. §. Valószínűségi változók egyes függvényeinek eloszlásfüggvénye 87

a) Valószínűségi változó(k) függvényeinek eloszlásfüggvénye általában 87
b) Valószínűségi változók összegének eloszlásfüggvénye 88
c) Valószínűségi változók szorzatának eloszlásfüggvénye 89
d) Valószínűségi változók hányadosának eloszlásfüggvénye 89
e) Keverék 90
f) Véletlentől függő számú valószínűségi változó összegének eloszlásfüggvénye 91

Példák és feladatok 92

7. §. Valószínűségi változók jellemzői 108

a) A várható érték definíciója 108
b) Tételek a várható értékről 109
c) Feltételes várható érték 110
d) Valószínűségi vektorok esete 111
e) Komplex valószínűségi változók esete 112
f) A szórásnégyzet definíciója 112
g) Tételek a szórásnégyzetről 112
h) Valószínűségi vektorok esete 113
i) Momentumok 113
j) Korrelációs együttható 114
k) Tételek a korrelációs együtthatóról 115
l) Regressziós görbék és egyenesek 115

Példák és feladatok 117

8. §. A nagy számok törvényei 147

a) A valószínűség és relatív gyakoriság kapcsolata 147
b) Sztochasztikus konvergencia 150
c) CSEBISEV-egyenlőtlenség 150
d) A nagy számok törvényei 150
e) Valószínűségek gyakorlati megállapítása 151
f) BERNSTEJN-féle egyenlőtlenség 152
g) A nagy számok „erős" törvényei 152

Példák és feladatok 154

9. §. Karakterisztikus függvény, generátorfüggvény 159

a) Karakterisztikus függvény 159
b) A karakterisztikus függvény tulajdonságai 159
c) Unicitási és konvergenciatételek 160
d) Valószínűségi vektor karakterisztikus függvénye 161
e) Generátorfüggvény 162
f) A generátorfüggvény tulajdonságai 162
g) Valószínűségi vektor generátorfüggvénye 163
Példák és feladatok 163

10. §. Határeloszlástételek 175

a) A centrális határeloszlástétel 175
b) A normális eloszlásfüggvény előfordulásának magyarázata 176
c) Logaritmiko-normális eloszlásfüggvényhez való konvergencia 176
d) Stabilis eloszlásfüggvényhez való konvergencia 177
Példák és feladatok 177

Az A) rész feladatainak megoldása 182

Az 1. § feladatainak megoldása 182
A 2. § feladatainak megoldása 183
A 3. § feladatainak megoldása 191
A 4. § feladatainak megoldása 194
Az 5. § feladatainak megoldása 201
A 6. § feladatainak megoldása 204
A 7. § feladatainak megoldása 209
A 8. § feladatainak megoldása 216
A 9. § feladatainak megoldása 219
A 10. § feladatainak megoldása 221

Ajánlott irodalom 223

B) SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK

Írta: TAKÁCS LAJOS

Bevezetés 225

11. §. Markov-láncok 226

a) A MARKOV-lánc definíciója 226
b) Az átmenet- és abszolút valószínűségek 227
c) A MARKOV-láncok és állapotaiknak osztályozása 228
d) Nem periodikus MARKOV-lánc határeloszlás tételei 229
e) A periodikus MARKOV-láncok 231
f) Az abszorpció valószínűsége 231
Feladatok 231
g) MARKOV-láncok folytonos állapot esetén 234
Feladatok 235
h) Stacionárius valószínűségi sorozatok 236
Feladatok 236

12. §. Markov-folyamatok 237

a) Bevezetés 237
b) A MARKOV-folyamatok definíciója 237
c) A Poisson-folyamat 238
d) MARKOV-folyamat megszámlálható sok állapottal 239
e) MARKOV-folyamat folytonos állapotváltozással 242
f) MARKOV-folyamat folytonos és ugrásszerű állapotváltozással 243
Feladatok 244

13. §. Nem Markov típusú folyamatok 250

a) A sztochasztikus folyamatokról általában 250
b) Rekurrens folyamatok 250
c) Stacionárius sztochasztikus folyamatok 255
d) Sztochasztikus folyamatok által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatok 258
Feladatok 258

A B) rész feladatainak megoldása 262

A 11. § feladatainak megoldása 262
A 12. § feladatainak megoldása 274
A 13. § feladatainak megoldása 290

Ajánlott irodalom 305

Táblázatok 307

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: dr. Vágvölgyi Tibor igazgató
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Hámori József
Műszaki szerkesztő: Hülber Péter
A kézirat nyomdába érkezett: 1972. augusztus. Megjelent: 1973. március.
Példányszám: 2000. Terjedelem: 29 (A/5) ív
Készült: az 1966. évi második kiadás alapján, matrica felhasználásával, íves magasnyomással, az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint
Raktári szám: 44331/V.
72.8249 Egyetemi Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Janka Gyula igazgató

31,— Ft